Ramla ABDELLATIF. — Du grand Théorème de Fermat au programme de Langlands modulo p

RÉGA 14/12/11

p, ℓ premiers distincts

Ⓘ Motivations

1) Grand thm. de Fermat

Idée : si $a^n + b^n = c^n$ avec $abc \neq 0$, alors on dispose de

$$E_{ab} : y^2 = X(X-a^n)(X+b^n)$$

Conj de Shimura – Taniyama – Weil

si $E/_{\mathbb{Q}}$ courbe elliptique de fonction L de Hasse-Weil $L(E,s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, alors $\sum a_n q^n$ est une forme modulaire de poids 2 et de niveau N_E.

Wiles – Taylor : cas semi-stable

Breuil – Conrad – Diamond – Taylor (2003) : cas général

Pour STW : $\forall n$, $E[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/_{\ell^n\mathbb{Z}})^2$

$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Q}}) \circlearrowright E(\overline{\mathbb{Q}})$

$\rightsquigarrow E[\ell^\infty] = \mathbb{Z}_\ell \oplus \mathbb{Z}_\ell$

On a dit : $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$

représentation galoisienne ℓ-adique

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}_p} = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho_p"'] & G_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\rho"] \\ & GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \end{tikzcd}$$

Par ailleurs :

si f est une forme modulaire, on peut lui associer $\Pi_f = \Pi_\infty \otimes \bigotimes_p \Pi_p \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$

$\Pi_\infty \circlearrowleft GL_2(\mathbb{R})$

<u>Fin de</u> STW :

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"'] & GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \arrow[d] \\ & GL_2(\mathbb{F}_\ell) \end{tikzcd}$$

<u>Idée</u> : $\left\{ \text{déformations de } \overline{\rho} \quad G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \text{ associées à des courbes elliptiques} \right\} \supset \left\{ \text{déf. de } \overline{\rho} \text{ qui viennent de F modulaires} \right\}$

= si le 2ème ensemble est non vide