Ramla ABDELKATIF. — Du grand théorème de Fermat au programme de Langlands modulo p

RÉGA 14/12/11

p, ℓ premiers distincts

(I) Motivations

1) Grand thm. de Fermat

Idée : si $a^n + b^n = c^n$ avec $abc \neq 0$, alors on dispose de

$$E_{ab} : y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

Conj de Shimura-Taniyama-Weil

Si $E/\mathbb{Q}$ courbe elliptique de fonction L de Hasse-Weil $L(E,s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$, alors $\sum a_n q^n$ est une forme modulaire de poids 2 et de niveau N_E.

Wils-Taylor : cas semi-stable

Breuil-Conrad-Diamond-Taylor (2003) : cas général

Pour STW : $\forall n$, $E[\ell^n] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^2$

$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \circlearrowright E(\bar{\mathbb{Q}})$

$\rightsquigarrow E[\ell^\infty] = \mathbb{Z}_\ell \oplus \mathbb{Z}_\ell$

On a donc : $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$

représentation galoisienne ℓ-adique

$$G_{\mathbb{Q}_p} = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$$

$$\downarrow \rho$$

$$\rho_p \searrow \quad GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

Par ailleurs :

si f est une forme modulaire, on peut lui associer $\pi_f = \pi_\infty \otimes \bigotimes_p \pi_p \circlearrowright GL_2(\mathbb{Q}_p)$

$\pi_\infty \circlearrowright GL_2(\mathbb{R})$

Fin de STW : $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$

$$\downarrow$$

$$\overline{\rho} \searrow \quad GL_2(\mathbb{F}_\ell)$$

Idée : { déformations de $\overline{\rho}$ $G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ associées à des courbes elliptiques } $\supset$ { déf. de $\overline{\rho}$ qui suivent de E modulaires }

= si le 2ème ensemble est non vide

Langlands : le lien forme modulaire – courbe elliptique et on fait une correspondance

$$\{p \text{ et les } \rho_p\} \longleftrightarrow \{\pi_f = \pi_\infty \otimes \bigotimes_p \pi_p\}$$

Question : $\rho_p \overset{?}{\longleftrightarrow} \pi_p$ lisse irréductible

Si $p \nmid \ell N_E$, alors on sait faire :

Si $\ell \neq p \mid N_E$ Kutzko (1978)

Si $p = \ell$? ⇝ Colmez, Breuil : on sait faire si on enlève la limite

sinon ?

Quel intérêt : remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres $K/\mathbb{Q}$

$$G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \searrow$$
$$\downarrow$$
$$GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \twoheadrightarrow GL_2(\mathbb{F}_\ell)$$

② Conjectures de Serre

Soit f une forme modulaire, soit $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$

Alors il existe une représentation

$$\rho_{i,f} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

qui est : * irréductible
* impaire ($\det \rho(c) = -1$)

* géométrique (i.e. non ramifiée hors de p et des diviseurs premiers de N + pot. semi-stable en restriction à D_p) + autres conditions

Elle est de plus unique à conj. près.

À conj. près, on peut supposer que

$$\rho_{i,f} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbb{Z}}_p) \twoheadrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

de semi-simplifiée $\bar\rho_{i,f}$

<u>Conj.</u> (Fontaine–Mazur :)

Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ irréd impaire et géométrique, alors $\exists (i, f, j)$ |

$$\rho = \rho_{i,f} \otimes \chi_p^j$$

(χ_p : caract. cyclot. p-adique)

<u>Conj de Serre</u> : Si $\bar\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ irréd, impaire, alors $\exists (i, f)$ tels que

$$\bar\rho \simeq \overline{\rho_{i,f}}$$

Ici : – remplacer F par $\mathbb{Q}$

– $\bar\rho$ à valeurs dans $GL_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, dans $U(n,m)$ ou GSp_4

Correspondance de Langlands

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rep. galoisiens}\\ \text{p-adiques}\\ \text{mod } \ell\end{array}\right\} \overset{?}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{rep. de}\\ \text{groupes}\\ \text{linéaires}\end{array}\right\}$$

Question "ouverte"

$$\left\{\begin{array}{l}\text{certains}\\ \text{rep mod } \ell\\ \text{de } G_{\mathbb{Q}_p}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{certains}\\ \text{rep mod } \ell\\ \text{de } GL_n(\mathbb{Q}_p)\end{array}\right\}$$

Pour $n=2$: Brouil a mitié gré

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rep. semi-simples}\\ \text{de dim. 2 de}\\ G_{\mathbb{Q}_p} \text{ sur } \overline{\mathbb{F}}_\ell\end{array}\right\}/\simeq \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{certains}\\ \text{rep. semi-}\\ \text{simples de}\\ \text{dim 2 de}\\ GL_2(\mathbb{Q}_p) \text{ sur } \overline{\mathbb{F}}_\ell\end{array}\right\}/\simeq$$

$\overline{\mathbb{F}}_\ell$-rep. mod. lisses de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

Vocabulaire et notations

- $F/\mathbb{Q}_p$ finie ou $F = \mathbb{F}_q((t))$, $q = p^f$ — $\overline{\mathbb{F}}_q \supset k_F$ fixé
- $\mathcal{O}_F$ anneau des entiers
  $\mathfrak{p}_F = (\omega_F)$ $\quad k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$
- $G = GL_2(F) \supset B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad Z \simeq F^\times$
  $K = GL_2(\mathcal{O}_F) \quad T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

Une rep. $\rho : G \to GL(V)$ est dite :

<u>lisse</u> : tout vecteur est de stab. ouvert

<u>admissible</u> : pour tout ss-groupe ouvert compact H de G,

$$V^H = \{v \in V \mid \forall h \in H \quad \rho(h)\cdot v = v\}$$

est de dim. finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$\ell \neq p$	p
faux sur $\overline{\mathbb{F}}_p$: • mesure de Haar sur G à valeurs dans $\mathbb{F}_\ell$ • modèle de Whittaker : existence et unicité	<u>lemme clé</u> : toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-lisse non nulle d'un pro-p-groupe admet des vecteurs fixes

Deux pro-p-groupes intéressants :

- $K(1) = \{M \in K \mid M \equiv I_2 \ [\varpi_F]\}$

  $K/K(1) \simeq GL_2(k_F)$ ⇝ toute rep. lisse irréd. de K provient d'une représentation irréd. de $GL_2(k_F)$

- $I(1) \subset \{ M \in K \mid M \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [w_p] \}$

  ↳ caractère du tore $\hookrightarrow$ eq. de cat (voyez vous Olivier)

Rappel : mesure de Haar sur G à valeurs dans R = forme linéaire non nulle

$$C_c^\infty(G) \to R$$

invariante par translation à gauche sur G.

Voy. Bruth. 1996 (p. 25)

Induction : Soit H un sous-groupe de G

Soit σ H libre.

① H est fermé

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \{ f : G \to \sigma \text{ uniformément continues telles que } \forall b \in B, \forall g \in G \quad f(bg) = \sigma(b)(f(g)) \}$$

ex : $H = B$, $\sigma : B \to T \to \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ caractère

si $\mathrm{Ind}_B^G(\sigma)$ est irréductible, elle est dite de la série principale

Thm 1 : Soit $\chi_1 \otimes \chi_2 : B \twoheadrightarrow T \to \bar{\mathbb{F}}_\ell^\times$ lisse

① Si $\chi_1 \neq \chi_2$, $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_2)$ est irréd.

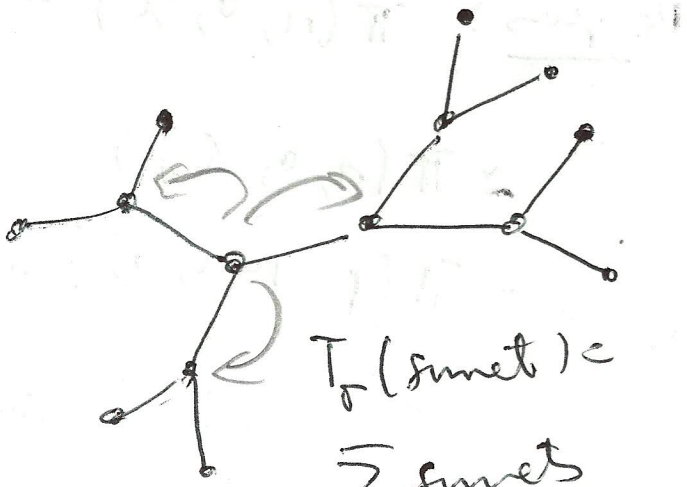
② $1 \to \chi \circ \det \to \mathrm{Ind}_B^G(\chi \circ \det) \to St \otimes (\chi \circ \det) \to 1$

non scindée

Pour les autres :

Thm 2 : Soit σ $\mathbb{Z}$ $K\mathbb{Z}$ lisse irréd à caract. central. Alors $H(G, K\mathbb{Z}, \sigma) \simeq \bar{\mathbb{F}}_\ell[T_\sigma]$

Bruhat-Tits



Def $\pi(\sigma, \lambda, \chi) := \dfrac{c\text{-}\mathrm{ind}_{K\mathbb{Z}}^G(\sigma)}{(T_\sigma - \lambda)} \otimes (\chi \circ \det)$

↑ paramétré par $\lambda \in [0, \#k_\ell]$

Thm 3. ⊘ Toute rep. lisse irréd (adm) à caractère central de G sur $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ est quotient d'une $\pi(\sigma, \lambda, \chi)$

② si $\lambda \neq 0$, alors $\pi(r, \lambda, \chi)$ est :

* une rep. principale
* une ext. de $(\chi \circ \det)$ par $St_G \otimes (\chi \circ \det)$

question : $\pi(r, 0, \chi) = ?$ $\quad \mathrm{Ind}_B^G(1)/1$

III. $F = \mathbb{Q}_p$

Thm (Breuil) $\pi(r, 0, \chi)$ est irréductible

De plus : $\pi(r, 0, \chi) \simeq \pi(p-1-r, 0, \chi_{\mu_{-1}})$

$\simeq \pi(r, 0, \chi_w)$

$= \pi(p-1-r, 0, \chi_{\mu_{-1}} w)$

$\uparrow$ car. cycl. mod p

$F^\times \to \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ nul sur $\mathcal{O}_F^\times$ et $w_F \to -1$