Martin ORR. — La conjecture de Manin-Mumford et les structures o-minimales (Réga, 18/1/2012)

<u>Conjecture</u> (Manin-Mumford)

$X \subseteq A$ variété abélienne$/\mathbb{C}$

$\uparrow$
courbe

Si X contient une infinité de points de torsion, alors c'est un translaté d'une sous-variété abélienne $X = B + x$, $x \in A$.

<u>Conjecture</u> (Mordell)

X courbe sur un corps de nombres K de genre ≥ 2, alors $X(K)$ est fini.

<u>Idée</u> : plonger X dans $\mathrm{Jac}(X)$

$$X(K) = X(\mathbb{C}) \cap \underbrace{\mathrm{Jac}(X)(K)}_{\substack{\text{groupe ab.} \\ \text{de type fini}}}$$

<u>Conjecture</u> : $\underset{\text{courbe}}{X} \subseteq \underset{\text{var. ab.}}{A}$, $\Gamma \subseteq A$ groupe de type fini

Alors $X \cap \Gamma$ est fini (si X n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne).

$\Gamma = \{0\} \Rightarrow$ points de torsion

Conjecture (Mordell-Lang)

A var. ab, Γ groupe de type fini

$\mathrm{Div}(\Gamma) = \{a \in A : \exists n \in \mathbb{Z} \ \ n \cdot a \in \Gamma\}$

X courbe $\Rightarrow X \cap \mathrm{Div}(\Gamma)$ est fini (si ce n'est pas un translaté..)

Conjecture : A var. ab, $X \subseteq A$ sous variété si X contient un ensemble Zariski dense de points de torsion, alors c'est un translaté d'une sous-variété abélienne.

dém par
- Raynaud (83) géométrique mod p^2
- Coleman p-adique
- Serre-Hindry représentations galoisiennes

(Vojta, Faltings ~ Mordell-Lang)

- Szpiro - Ullmo - Zhang (Bogomolov)
- Hrushovski : (ACFA) alg. closed field with autom.
- Pila - Zannier (o-minimal)

Théorie de modèls

Ensembles définissables : on fixe un ensemble M, des fonctions $M^k \to M$, des relations sur M^k

formule avec ces fonctions + relations qui définit un ensemble dans M^n

$(\mathbb{R}, \text{anneau})$: $M = \mathbb{R}$ $\quad -: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad 0, 1 : \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$

↑ polynôme à coeff. $\mathbb{Z}$ (paramètres)

$\exists, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$

Dans $(\mathbb{C}, \text{anneau})$ tous les ensembles définissables sont $\{\underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_i(\underline{x}) = 0 \wedge g_i(x) \neq 0\}$

Dans $(\mathbb{R}, \text{anneau})$, il n'y a pas d'élimination de quantificateurs : $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \; x = y^2\} = \{x \geq 0\}$

$(\mathbb{R}, \text{anneau}, <)$ admet d'élimination de quantificateurs

Dans $(\mathbb{R}, \text{anneau}, <) = \mathbb{R}_{alg}$, les ens déf. =

ensembles semi-algébriques

ensembles déf $\subseteq \mathbb{R}$

$$\bigwedge f_i(x)=0 \wedge g_i(x)\neq 0 \wedge h_i(x)>0$$

réunion finie de points et des intervalles

On dit qu'une structure $(M, <, \dots)$ est o-minimal si tout ensemble définissable dans M est une réunion finie de points et d'intervalles.

Ens. déf dans M^n, M structure o-minimale, a un # fini de composantes connexes (topologiquement simples) (Pillay, Steinhorn)

$\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}$, anneau, $<$, fonctions analytiques restreintes$)$

Si on avait tout cela, $\{x\in\mathbb{R} \mid \sin(x)=0\}$ infini discret (Gödel)

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ analytique, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ensemble borné

$$f_K(x) = \begin{cases} f(x) & x\in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

fonction analytique restreinte

Théorème. $\mathbb{R}_{an}$ est o-minimale

(Denef, van der Dries, Gabrielov)

$\mathbb{R}_{exp} := (\mathbb{R}, \text{anneau}, <, \exp)$ $\quad \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Théorème. $\mathbb{R}_{exp}$ est o-minimale

Théorème. $\mathbb{R}_{an, exp}$ est o-minimal

(van der Dries, Miller)

En général,
o-min $\cup$ o-min n'est
pas o-min

Théorème (Pila-Wilkie)

R o-minimal (anneau)

$X \subseteq R^n$ définissable

$$X^{alg} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{semialg} \\ \dim > 0}} Y$$

$N(X \setminus X^{alg}, T) =$

$\{x \in X \setminus X^{alg} \mid$ coordonnées rationnels de hauteur $\leq T\}$

$$H\left(\frac{a}{b}\right) = \max(|a|, |b|)$$

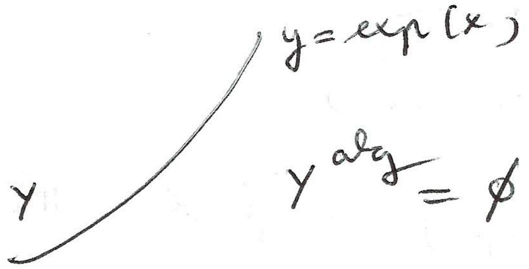
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que

$$N(X \setminus X^{alg}, T) < c\,T^{\varepsilon} \quad \forall T \geq 1$$

Pour $\mathbb{R}_{an}$, l'énoncé est vide...

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \exp(x)\}$

$X^{alg} = X$ tout point est dans $\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$



Variétés abéliens $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$

$\pi : \mathbb{C}^g \to A \subseteq \mathbb{P}^N$

$\mathbb{C}^g \cong \mathbb{R}^{2g}$

$\mathcal{F}$ domaine fondamental du réseau

$\pi|_{\mathcal{F}}$ définie dans $\mathbb{R}_{an}$

$X \subseteq A$ sous-var. alg, $\pi^{-1}(X) \cap \mathcal{F}$ déf. dans $\mathbb{R}_{an}$

On choisit une base de $\mathbb{R}^{2g}$ qui est aussi une base de Λ. Alors les points rationnels dans $\mathbb{R}^{2g}$ sont les points dont l'image c'est des points de torsion.

1) Hauteurs de points de torsion dans $\mathbb{R}^{2g}$ et bornes galoisiennes.

2) PW $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(X) \cap \mathcal{F}$ contient un ensemble semialgébrique

3) Ax – Lindemann : ens. semialg. $\subseteq \pi^{-1}(X) \cap \mathcal{F}$, $X \subseteq A$ alg. $\Rightarrow$ translaté d'une ss. var. ab.

<u>Thm</u> (Lang) Manin-Mumford pour $\mathbb{G}_m^n$

<u>Conj</u> (André-Oort) : S var. de Shimura

$X \subseteq S$ courbe alg. qui contient une infinité de points <u>spéciaux</u> $\Rightarrow X$ sous-variété spéciale

1) Hauteur d'un point $\underline{x} \in \mathbb{Q}^{2g}$

$\sim$ ordre de $\pi(x)$ dans A

Si $x \in X$, $x \in A_{tors}$ d'ordre N, alors il y a N^γ points dans $X \cap A_{tors}$ d'ordre N.

Supposons que X définie sur $\mathbb{Q}$

tous des points de torsion $\rightarrow$ $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\, x \subseteq X$

$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\, x| = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$

Masser : $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ borne pol. dans l'ordre de x

2) $X \subset A$ courbe

$\pi^{-1}(X) \cap \mathcal{F}$ contient un ss-ens. semialg.

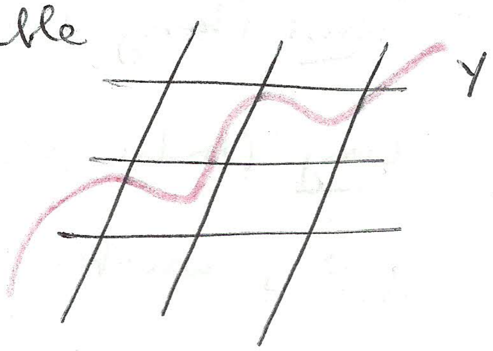
$Y \subseteq \pi^{-1}(X)$ compote anexe tq. $Y \cap \mathcal{F}$ contient un ens. semialg. Z

$Z \cap$ boule $=$ ens. anal. complexe $\cap$ boule

$Z \cap$ boule $= Y \cap$ boule $\Rightarrow Y$ algébrique

$D = \{ v \in \mathbb{C}^g : (v+Y) \cap \pi^{-1}(X) \cap \mathcal{F}$ est de dim $1 \}$

définissable



si $Y \cap (\mathcal{F} - v)$ est de dim 1, $v \in \Lambda$,

alors $(Y+v) \cap \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(X)$ est de dim 1.

$\overset{}{\underset{\text{PW}}{\Longrightarrow}}$ D contient un ens. semialg. de dim > 0.

$D \subseteq Y \Longrightarrow D = Y$

$D = \mathrm{Stab}(Y)$ groupe dans $\mathbb{C}^g$

donc l'image de D est une ss var. alg.