RéGA, 8 février 2012

Michael <u>NAKAMAYE</u>. – Point base de filés en droites sur les var. projectives

X variété projective lisse $/\mathbb{C}$

D diviseur sur X

$$BS(D) = \{x \in X \mid \sigma(x) = 0 \text{ pour toute } \sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(kD)),\ k > 0\}$$

point base stable

<u>Exemple</u>

① D est ample $\Rightarrow BS(D) = \emptyset$

$\Leftarrow$ non, $D = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ sur $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

② D est effectif $\Rightarrow BS(D) \subsetneq X$

$\Leftarrow$ "oui", kD est eff. pour $k > 0$

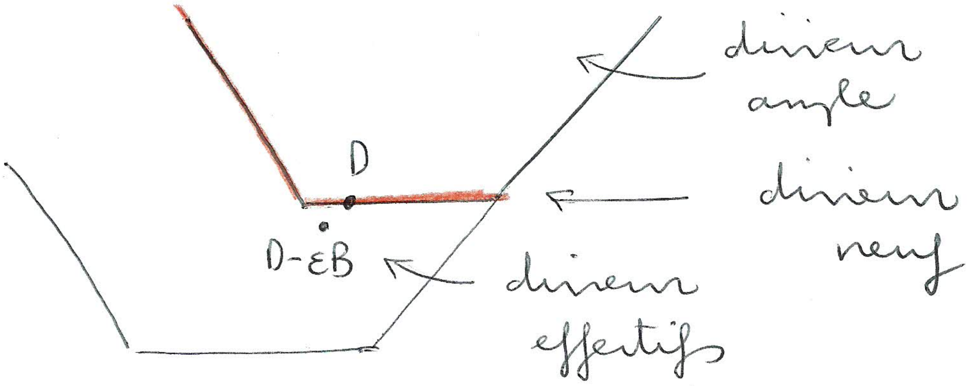
③ Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de $BS(D)$ quand kD est effectif pour $k > 0$, D est "très proche" d'un diviseur ample ?

$$NS(X) = \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} /_{\sim}$$

espace vectoriel de dim fini

équivalence numérique

$NS(X)_{\mathbb{R}}$ intersecté avec un plan



$D \cdot C \geq 0$

$BS(D)$ quand D nef mais pas ample ?

Quels sont les points base stables de $D-\varepsilon B$ quand B est ample, D nef pas ample?

[Si $D \cdot C = 0$, alors $(D-\varepsilon B)\cdot C < 0 \Rightarrow C \subset BS(D-\varepsilon B)$]

<u>Théorème</u> Si $0<\varepsilon \ll 1$, alors $BS(D-\varepsilon B) = D^{\perp}$

$$= \bigcup_{\substack{V \subset X \\ \deg_D(V)=0}} V.$$

<u>Question</u>: comment minorer ε? = donner un ε qui marche

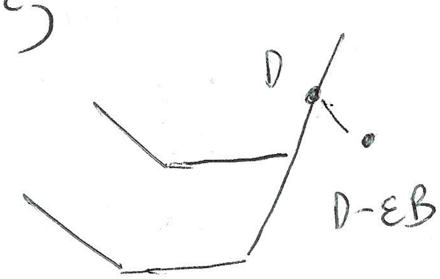
dém du théorème quand $\dim(X)=2$

ⓐ $D^{\perp} \subset BS(D-\varepsilon B)$ pas très dur (pour tout ε)

ⓑ $BS(D-\varepsilon B) \subset D^{\perp}$ pour $0<\varepsilon \ll 1$

[1] D nef

D gros = big $\quad h^0(X, \mathcal{O}_X(kD)) = O(k^2)$



B ample, effectif

$nD - B \underset{\text{lin. equiv}}{\sim}$ diviseur effectif quand $n \gg 0$

$$\underbrace{}_{}\geq O(n^2) - O(n)$$

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(nD-B)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$$

$O(n^2)$

$$\to H^0(B, \mathcal{O}_X(nD))$$

$O(n)$ Riemann-Roch

$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(nD-B)) > 0$ pour n suff. grand

$nD - B = E$ effectif

[2] pour $m \gg n$

$$\underset{-\frac{1}{2}B}{mD} = \frac{1}{2}B + \underbrace{(m-n)D}_{\substack{\text{nef + ample} \\ \text{et ample}}} + E \qquad BS(mD - \tfrac{1}{2}B) \subseteq E$$

[3] Supposons que $C \subset E$ et $C \cdot D > 0$

On va montrer que quand $m \gg 0$, si

$E = aC \times$ autres courbes, alors

$(m-n)D + \frac{1}{2}B + aC$ est ample

- $\left((m-n)D + \frac{1}{2}B + aC\right)^2 > 0$ quand $m >> 0$

$(m-n)^2 D^2 > 0$ puisque D nef et gros

partie dominante

- $\left((m-n)D + \frac{1}{2}B + aC\right) \cdot F > 0$

$\uparrow$

courbe irréd quelconque

Cas 1 : $F = C$

$\left((m-n)D + \frac{1}{2}B + aC\right) \cdot C \geq (m-n)D \cdot C + aC \cdot C$

$\geq (m-n) + aC \cdot C$

l'hypothèse $C \not\subset D^{\perp}$

Cas 2 : $F \neq C$

on utilise

$(m-n)D + \frac{1}{2}B$ ample

$\square$

$\Longrightarrow$ critère de Nakai

X de dim > 2

- $nD - B = E$ pour $n >> 0$
- Supposons F composante irréductible de E

avec $\deg_D(F) > 0$.

Pour $m \gg 0$, est-ce que

$$(m-n)D + \frac{1}{2}B + aF$$

$\hat{C}$ mult. dans E de F

est ample ?

- degré de toute courbe $C \subset F$ est positif
- si $D \cdot C = 0$, $C \subset F$ (fatale)

Théorème d'annulation (Kawamata-Viehweg)

X lisse, D diviseur big et nef. Alors :

$$H^i(X, K_X + D) = 0 \text{ pour tout } i > 0.$$

$nD - B$ pour $n \gg 0$

$\mathcal{I}$ = faisceau d'idéaux des points base (une schéma) de $|nD - B|$ $n \gg 0$

$\pi : \tilde{X} \to X$

$\tilde{X}$ lisse, $\pi^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \tilde{X} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ ← diviseur exceptionnel

desing. de l'éclatement de X le long $\mathcal{I}$

$\pi^*(nD - B)(-E)$ big sans point base

$\Longrightarrow$ nef

$$H^1(\tilde X, K_{\tilde X} + \pi^*(nD - B)(-E)) = 0$$

$$H^0(\tilde X, \pi^*(K_X + nD - B)(K_{\tilde X/X} - E)) = 0$$

$$H^1(X, K_X + nD - B \otimes \underbrace{\pi_* \mathcal{O}_{\tilde X}(K_{\tilde X/X} - E)}_{\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X}) = 0$$

supposons que

$\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X(\mathcal{J})) =$ pts base de $nD - B$

$$H^1(X, K_X + nD - B \otimes \mathcal{J}) = 0$$

$$Z = Z(\mathcal{J})$$

$$0 \to H^0(X, K_X + nD - B \otimes \mathcal{J}) \to H^0(X, K_X + nD - B)$$

$$\to H^0(Z, K_X + nD - B) \to 0$$

supposons qu'il existe W composante irréductible de Z dont $\deg_D(W) > 0$.

· construire une section $\boxed{\text{pour } n >> 0}$ $s \in H^0(Z, K_X + nD - B)$ qui ne s'annule pas sur un point générique y de W