RÉGA, 14 mars 2012 

Arno KRET. - Une formule de masse pour la strate supersingulière d'une courbe de Shimura

1. Algèbre à quaternions

$$D_0 = \left(\frac{-2, -5}{\mathbb{Q}}\right) \qquad \mathbb{Q}\langle\alpha,\beta\rangle \Big/ \begin{array}{l}\alpha^2 = -2\\ \beta^2 = -5\end{array}$$

$$\mathrm{disc}(D_0) = 5 \qquad\qquad \gamma = \alpha\beta$$

$$D := D_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) = \left(\frac{-2, -5}{\mathbb{Q}(i)}\right)$$

$$D \otimes \mathbb{Q}(i)_v = \begin{cases} M_2(\mathbb{Q}(i)_v) & v \nmid 5 \\ \text{ramifié} & v \mid 5 \end{cases}$$

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{C}) \circlearrowleft M \overset{i}{\longmapsto} \overline{M}^t$$

$$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & \\ & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\beta \longmapsto \begin{pmatrix} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \qquad M^* = I^{-1} M^i I$$

Donnée de Shimura

$$G(R) = \{ g \in \underset{\substack{\parallel \\ (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)}}{D_R^\times} \mid g^* g \in R^\times \}$$

$R$ : $\mathbb{Q}$-alg

Suite exacte: $\mathcal{U} \to G \to \mathbb{G}_m$ $\quad (\mathcal{U} = \mathcal{U}(1,1))$

$$h: \mathbb{C} \longrightarrow D_{\mathbb{R}} = M_2(\mathbb{C})$$
$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{pmatrix}$$

$h: \mathbb{C}^\times \longrightarrow G(\mathbb{R})$ algébrique

$X :=$ classe de $G(\mathbb{R})$-conj. de $h$

$$X \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \quad \text{structure complexe}$$
$$h' \longmapsto h'(i)$$

<u>Fait</u>: $X \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S^1 \simeq \mathfrak{h}^{\pm}$

$V := D^{opp}$-module à gauche avec espace $D$, multiplication à droite

$V \subset M_2(\mathbb{C})$ $\qquad (bv, w) = (v, b^{\iota} w)$

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) := i\big((\bar{a}x - a\bar{x}) + (\bar{b}y - b\bar{y}) - (\bar{c}z - \bar{z}c) - (\bar{d}w - d\bar{w})\big)$$

$\boxed{B := D^{opp}}$

$$V_{\mathbb{R}} = M_2(\mathbb{C}) \supset \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} =: W \circlearrowleft G(\mathbb{R})$$

$\mathbb{P}(W)$

sur $V$ forme hermitienne

$$(\cdot,\cdot)_H := (\cdot, i\cdot) + i(\cdot,\cdot) \qquad a_1\bar{b}_1 - a_2\bar{b}_2$$

$$W \supset \{x \in W \mid (x,x)_H = 0\}$$

<u>Ex:</u> $G(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{P}(W) \setminus S^1 \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
transitive

$$(G,X) \qquad G(\mathbb{Q})\backslash X \times (G(\mathbb{A}_f)/K)$$

$K$ ↑ sous-groupe compact ouvert

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}} \longleftarrow \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q} = \varinjlim \mathbb{Z}[\tfrac{1}{n}]$$

$$\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}} = \varinjlim \mathbb{Z}[1/N] \otimes \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{\text{restreint}} \mathbb{Q}_p$$

$D \supset \mathcal{O}_D \ni 1, \alpha, \beta, \gamma$ stable par $*$
ordre maximal

$$G_0(R) = \{g \in (\mathcal{O}_D \otimes R)^\times \mid g^* g \in R^\times\}$$
modèle

$$G_0(\hat{\mathbb{Z}}) \twoheadrightarrow G_0(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

$\underline{N \geq 3}$ $\quad K(N) := \{ g \in G_0(\hat{\mathbb{Z}}) \mid g \equiv 1 \mod N \}$

2 <u>Problème des modules</u>

$p \equiv 1 \mod 4$, $p \neq 5$, $p \nmid N$

on suppose $\mathcal{O}_D \otimes \mathbb{Z}_p$ maximal

<u>Ex:</u> $\underline{p = 41}$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$

$$V_{\mathbb{R}} = M_2(\mathbb{C}), \quad V_{\mathbb{C}} \supset V_1 = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$V_{\mathbb{C}} = M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C})$$

$$f = \det(X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + \gamma X_4 \mid V_1)[X_1 X_2 X_3 X_4])$$

$$= (X_1^2 + 2X_2^2 + 5X_3^2 + 10X_4^2)^2 \in \mathbb{Z}[X_1 \ldots X_4]$$

homogène deg 4

$$\mathbb{Z}_{(p)}\text{-schémas} \longrightarrow \text{Ens}$$

$$S \longmapsto (A, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pol.}}}{\lambda}, i, \bar{\eta}) / \text{équiv.}$$

$A/S$ schéma abélien sur $S$ de dim. rel 4

$\lambda : A \to A^\vee$ degré premier à $p$

$i : \mathcal{O}_{B,(p)} \longrightarrow \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ ⟲ involution positive

respecte les involutions $\qquad f \mapsto \lambda^{-1} \circ f^\vee \circ \lambda$

$\bar{\eta}$ : structure de niveau $K(N)$

$S$ connexe, $\bar{s} \in S$ point géométrique

$$\Big( \varprojlim_{n,\,(p,n)=1} A[n](\bar{s}) \Big) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = H_1(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f^p) = H$$

Accouplement de Weil :

$$A[n] \times A^\vee[n] \longrightarrow \mu_n$$

$$\rightsquigarrow \quad H_1 \times H_1(A^\vee_{\bar{s}}) \to \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \varprojlim \mu_n(\bar{s})$$

$H_1 \xrightarrow{\lambda} H_1(A^\vee_{\bar{s}})$

$\varprojlim \mu_n(\bar{s}) = \mathbb{A}_f^p(1)$, $\qquad \mathbb{A}_f^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_f^p(1)$ $\boxed{\text{choix}}$

$$H_1 \times H_1 \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathbb{A}_f^p$$

$$\Big[ \mathrm{Isom}(V_{B,\langle\cdot,\cdot\rangle} \otimes \mathbb{A}_f^p, H_1) / K(N) \Big]^{\pi_1(S,\bar{s})}$$

mod un scalaire

$\hookrightarrow$ correspond à avoir la $N$-torsion définie sur $\mathbb{Q}$.

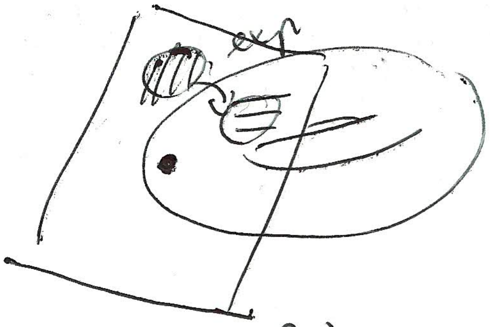
C'est l'ensemble des structures de niveau.

$(A, \lambda, i, \bar{\eta})$ doit satisfaire la condition déterminant.

$$\det\left(1 \cdot X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + \gamma X_4 \circlearrowleft \mathrm{Lie}_S(A)[X_1 \ldots X_4]\right)$$

$$\in \mathcal{O}_S(S)[X_1 \ldots X_4]$$

Ceci doit être égal au det précédent.




$H_1(A, \mathbb{R})$

$$H_1(A, \mathbb{C}) = H_{1,1} \oplus H_{1,2}$$

coïncide avec $V_1$.

Ceci n'a pas de sens en caractéristique $p$

Le problème de modules est représentable par un schéma $\boxed{\text{projectif}}$ quasi-projectif lisse de dim $\boxed{\text{rel } 1}$ sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ : $Sh_{K(N)}$

particulier à l'exemple !!

$$Sh_{K(N)}(\mathbb{C}) = {}_{G(\mathbb{Q})}\backslash X \times \left(G(\mathbb{A}_f)/_{K(N)}\right)$$

$\underline{\parallel}$

mint de Hasse

$\S$ **Thm**: $Sh_K(\mathbb{F}_{p^\alpha})$ $\alpha > 0$

$$Sh_{K,\mathbb{F}_q} = \underbrace{X_s} \amalg X_{ord}$$

$x \in Sh_K(\mathbb{F}_{p^\alpha})$

$$A_x \rightsquigarrow H_1(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$$

$X_s$ : toutes les valeurs propres ont la même valuation $p$-adique

**Théorème**

$$\boxed{\begin{aligned}\# X_s(\overline{\mathbb{F}_p}) = 2\chi(Sh_K(\mathbb{C})) \\ - \chi(Sh_{K'} I_p(\mathbb{C}))\end{aligned}}$$

$\chi = \dim H^0(Sh_K(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) - \dim H^1 + \dim H^2$

$$I_p = \{ g \in G_0(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times \times GL_2(\mathbb{Z}_p) \mid g \equiv (*) \times \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod p \}$$

$$K(N) \rightsquigarrow K' = K(N)^p I_p$$