RéGA, 9 mai 2012

MATHIEU HURUGUEN. – Introduction aux variétés toriques

I. Géométrie convexe discrète

$M \cong \mathbb{Z}^n \qquad N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$

$V^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M \qquad V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

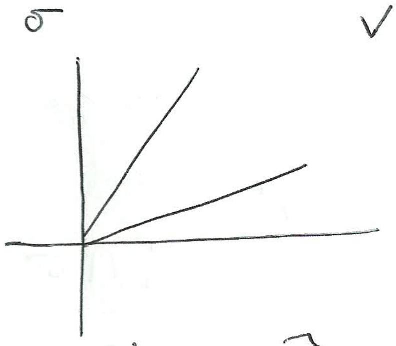
<u>Def.</u> Un cône polyédral dans V est l'ensemble des combinaisons linéaires à coeff. positifs d'un ensemble fini de vecteurs dans V

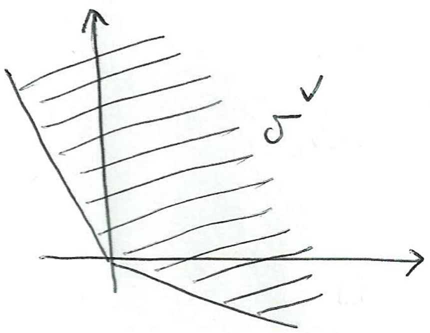
$\sigma \subseteq V$ un cône

<u>Def.</u> $\sigma^\vee = \{ l \in V^* \quad l_{|\sigma} \geq 0 \}$

<u>Prop.</u> $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$

<u>Def.</u> Une face de σ est l'intersection d'un hyperplan $\{l = 0\}$ avec σ, $l \in \sigma^\vee$





<u>Prop.</u> Une face d'un cône polyédral est un cône polyédral.

<u>Preuve</u> $\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$

$\ell \in \sigma^\vee$

$$\ell\Big(\sum \underset{\underset{\mathbb{R}_+}{\cap}}{a_i} v_i\Big) = 0$$

$\ell(v_i) \geq 0$

ssi $(a_i \neq 0 \Rightarrow \ell(v_i) = 0)$

$\{\ell = 0\} \cap \sigma = \langle v_1, \dots v_r \rangle$

$\ell(v_1) = \dots = \ell(v_r) = 0$

et les autres $\ell(v_i)$ sont > 0 □

<u>Prop.</u> L'intersection de 2 faces est une face.

<u>Preuve</u>: $\ell, \ell' \in \sigma^\vee$, $\ell + \ell'$ découpe l'intersection □

<u>Prop.</u> σ un cône, τ une face

les faces de τ sont les faces de σ incluses dans τ.

<u>Preuve</u>:

$\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Une face de τ est une face de σ.

$\ell \in V^*$ $\qquad$ $\ell' \in \tau^\vee$

$\tau = \{\ell = 0\} \cap \sigma$ $\qquad$ $p \in \mathbb{N}$, $\{\ell' + p\ell = 0\}$

assez grand

$\ell'(v_1), \dots \ell'(v_r) \geq 0$

$\tau = \langle v_1, \dots v_r \rangle$, $\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$ □