RÉGA, 9 mai 2012

MATHIEU HURUGUEN. – Introduction aux variétés toriques

I. Géométrie convexe discrète

$M \cong \mathbb{Z}^n \qquad N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$

$V^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M \qquad V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N$

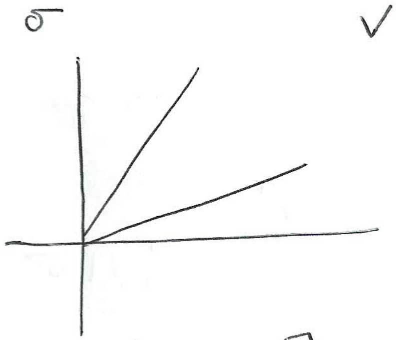
<u>Déf.</u> Un cône polyédral dans V est l'ensemble des combinaisons linéaires à coeff. positifs d'un ensemble fini de vecteurs dans V

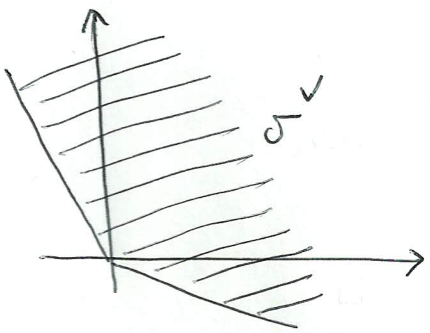
$\sigma \subseteq V$ un cône

<u>Déf.</u> $\sigma^\vee = \{ l \in V^* \quad l_{|\sigma} \geq 0 \}$

<u>Prop.</u> $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$

<u>Déf.</u> Une face de σ est l'intersection d'un hyperplan $\{l = 0\}$ avec σ
$l \in \sigma^\vee$





<u>Prop.</u> Une face d'un cône polyédral est un cône polyédral.

<u>Preuve</u> $\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$

$l \in \sigma^\vee$

$l(v_i) \geq 0$

$$l\big(\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}_+}}{\sum a_i} v_i\big) = 0$$

ssi $(a_i \neq 0 \Rightarrow l(v_i) = 0)$

$\{l = 0\} \cap \sigma = \langle v_1, \dots v_r \rangle$

$l(v_1) = \dots = l(v_r) = 0$

et les autres $l(v_i)$ sont > 0 $\square$

<u>Prop.</u> L'intersection de 2 faces est une face.

<u>Preuve</u>: $l, l' \in \sigma^\vee$, $l + l'$ découpe l'intersection $\square$

<u>Prop.</u> σ un cône, τ une face

les faces de τ sont les faces de σ incluses dans τ.

<u>Preuve</u>:

$\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Une face de τ est une face de σ.

$l \in V^*$ $\qquad$ $l' \in \tau^\vee$

$\tau = \{l = 0\} \cap \sigma$ $\qquad$ $p \in \mathbb{N}$, $\{l' + pl = 0\}$

assez grand

$l'(v_1), \dots l'(v_r) \geq 0$

$\tau = \langle v_1, \dots v_r \rangle$, $\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$ $\square$

<u>Déf</u>. Une facette de σ est une face de codimension 1.

<u>Prop</u>. Toute face $\neq \sigma$ est contenue dans une facette.

<u>Preuve</u>. $\tau = \{\ell = 0\} \cap \sigma$ $\rightsquigarrow$ V_τ l'espace vectoriel engendré par τ
$\quad\quad \parallel$
$\{v_1, \dots v_\tau\}$

$\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$

ℓ forme lin. sur V/V_τ $\square$

<u>Déf</u>. L'intérieur relatif de σ est l'intérieur de σ dans V_σ.

<u>Prop</u>. L'intérieur relatif de σ est le complémentaire de la réunion des facettes.

<u>Preuve</u>. $v \in \sigma$ hors de toutes les facettes. Supposons que v n'est pas dans l'intérieur relatif, $\exists\, (v_n)$ hors de σ, $v_n \to v$. On peut supposer $\ell_n \in \sigma^\vee$ tq. $\ell_n(v_n) < 0$. On peut supposer $\|\ell_n\| = 1$, $\ell_n \to \ell$, $\ell(v) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\ell(v) = 0$

v est sur une face, donc sur une facette Σ $\square$

Prop. Le dual $\sigma^\vee$ est un cône polyédral, rationnel si σ est rationnel.

Déf. σ est rationnel si on peut choisir des générateurs dans N

Preuve. On peut supposer σ de dim max

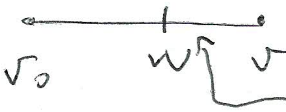
Pour toute facette τ, ℓ_τ

On montre que $\sigma^\vee = \langle \ell_\tau : \tau \text{ facette de } \sigma \rangle$

$\supseteq$ claire

Si $v \in V$ est tel que $\ell_\tau(v) \geq 0$ pour toute facette τ, alors $v \in \sigma$.

Soit v_0 dans l'intérieur de σ. Tout élément de $[v_0, v[$ est dans l'intérieur de σ.



$\exists \tau$ facette $\quad \ell_\tau(w) = 0$

le dernier point $\in \sigma$

$w = t v_0 + (1-t) v$

$\ell_\tau(w) = 0 \Longrightarrow w = v$ $\square$

Prop. $\{\text{faces de } \sigma\} \longrightarrow \{\text{faces de } \sigma^\vee\}$

$$\tau \longmapsto \tau^\perp \cap \sigma^\vee = \tau^*$$

est une bijection décroissante.

<u>Preuve</u>

$\tau = \langle v_1, \dots v_r \rangle$

$\sigma = \langle v_1, \dots v_s \rangle$

Soit $l \in \sigma^\vee$, alors

$l \in \tau^\perp \Leftrightarrow l(v_1 + \dots + v_r) = 0$

Mq. $\tau = (\tau^\perp \cap \sigma^\vee)^\perp \cap \sigma$

$\subseteq$ est clair

$v \in \sigma \cap (\tau^\perp \cap \sigma^\vee)^\perp = \tau^*$

Soit $l \in \sigma^\vee$ qui découpe τ $\quad l(v) = 0 \Rightarrow v \in \tau$

$\square$

<u>Prop.</u> τ face de σ, $\dim \tau + \dim \tau^* = n$.

<u>Preuve</u>: $\tau^* \subseteq \tau^\perp$ est d'intérieur non vide

Soit $l \in \tau^\perp$ appartenant à $\sigma^\vee$
découpe la face τ

$\Leftrightarrow l(v_{r+1}) > 0 \quad \dots \quad l(v_s) > 0$ $\quad \square$

<u>Prop.</u> les conditions suivantes sont équivalentes:

1. σ ne contient pas de droite
2. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ $\qquad \sigma$ est saillant
3. $\{0\}$ est une face de σ
4. $\sigma^\vee$ est d'intérieur non vide

Preuve

$1 \Leftrightarrow 2$ clair

$2 \Leftrightarrow 3$ car la plus petite face de σ est $(\sigma^\vee)^\perp = \sigma \cap (-\sigma)$

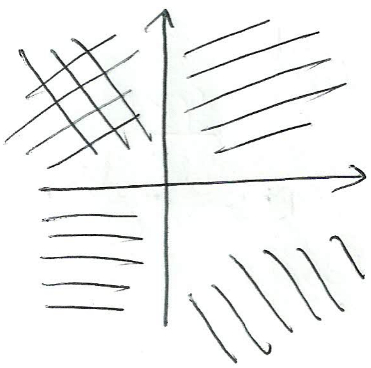
$3 \Leftrightarrow 4$ car $\dim \sigma + \dim \sigma \cap (-\sigma) = n$.

$\square$

II. Variétés toriques

Déf. Un éventail dans V est une collection finie de cônes polyédraux rationnels saillant tels que

1. Toute face d'un cône de Σ est dans Σ
2. L'intersection de deux cônes dans Σ est une face de chacun d'eux



groupe de Lie
chambre de Weil
donne une variété algébrique

Définition. k corps alg. clos. Soit σ un cône dans V.

On note $U_\sigma = \operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap M]$

Prop. $\sigma^\vee \cap M$ semi groupe de type fini

Preuve: $\sigma^\vee = \langle v_1, \dots v_s \rangle$ $v_i \in M$

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{s} t_i v_i \ : \ t_i \in [0,1] \right\}$$

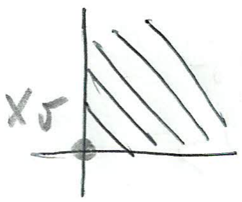
K est compact donc $K \cap M$ est fini □

Exemples

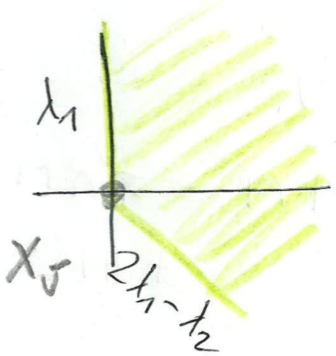
- $\sigma = \{0\}$ $\quad U_\sigma = T = \operatorname{Spec} k[M] = \operatorname{Spec} k[X_1^{\pm}, X_2^{\pm}]$

  tore dont le groupe de caractères est M

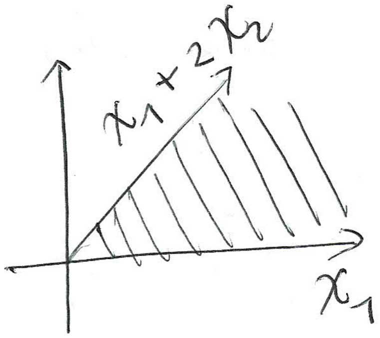
  x_σ = unité

- 

  $U_\sigma = \mathbb{A}^2$

- 

  $\rightsquigarrow$

$\sigma = \langle 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 \rangle \qquad \sigma^\vee \cap M = \langle X_1, X_1 + X_2, X_1 + 2X_2 \rangle$

$$U_\sigma = V(X_1 X_3 - X_2^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

X k-variété

str. mult.

$$U_\sigma(X) = \operatorname{Mor}_{\text{semi-gr.}}(\sigma^\vee \cap M \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

$$T(X) = \operatorname{Mor}_{\text{semi-gr}}(M, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*)$$

$$T(X) \times U_\sigma(X) \to U_\sigma(X)$$

le tore T agit sur U_σ

On note $x_\sigma \in U_\sigma(k)$ le point défini par

$$x_\sigma : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow k$$
$$x \longrightarrow 0 \text{ si } x \notin \sigma^\perp$$
$$1 \text{ si } x \in \sigma^\perp$$

est un morphisme de semi-groupes.

L'orbite de x_σ est le fermé de U_σ défini par l'idéal $\langle x,\ x \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp \rangle \subset k[\sigma^\vee \cap M]$

Prop. τ une face de σ, alors $\tau^\vee \cap M = \sigma^\vee \cap M + \mathbb{N}(-\ell))$

où ℓ découpe la face τ.

Preuve. déjà vue $\square$

Prop. $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$ est l'application naturelle $\operatorname{Spec} k[\tau^\vee \cap M] \to \operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap M]$

Preuve. $k[\tau^\vee \cap M] = k[\sigma^\vee \cap M]_\ell$

Prop-Déf. On peut recoller les U_σ pour obtenir une variété torique X_Σ.

$\sigma, \tau \in \Sigma$

$U_{\sigma\cap\tau} \subseteq U_\sigma$, $U_{\sigma\cap\tau} \subseteq U_\tau$

$x_\sigma \in X_\Sigma(k)$

<u>Prop.</u> $\sigma, \tau \in \Sigma$ $\quad x_\tau \in U_\sigma(k) \iff \tau \subseteq \sigma$

Si $\tau \subseteq \sigma$, $x_\tau \in U_\tau(k) \subseteq U_\sigma(k)$

si $x_\tau \in U_\sigma(k)$, $x_\tau \in U_{\sigma\cap\tau}(k)$

$$\begin{tikzcd} x_\tau : \tau^\vee \cap M \arrow[rr] \arrow[dr] & & k \\ & (\tau\cap\sigma)^\vee \cap M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

se prolonge ssi $\tau \cap \sigma = \tau$. □

<u>Prop.</u> $X_\Sigma(k) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} O_\sigma(k)$ orbite de x_σ

<u>Preuve</u> : $x \in X_\Sigma(k)$

Il existe un plus petit cône $\sigma \in \Sigma$ tel que $x \in U_\sigma(k)$, $x : \sigma^\vee \cap M \to k$ ne s'étend pas à $\tau^\vee \cap M$, où τ est une face de σ. Ceci équivaut au fait que $x^{-1}(k^*) = \sigma^\perp \cap M$.

<u>Prop.</u> Il existe un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_\sigma$

sur X_Σ tel que pour tout $\tau \in \Sigma$,

$$\mathcal{I}_\sigma(V_\tau) = \begin{cases} k[\tau^\vee \cap M] & \text{si } \sigma \nsubseteq \tau \\ k[\tau^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp] & \text{si } \sigma \subseteq \tau \end{cases}$$

Si $\tau' \subseteq \tau$ est une face de τ alors $I_\tau \to I_{\tau'}$

$$k[\tau^\vee \cap M] \to k[(\tau^\vee)^\vee \cap M]$$

1er cas : $\sigma \nsubseteq \tau$

2ème cas : $\sigma \subseteq \tau$ et $\sigma \nsubseteq \tau'$

Soit $\chi_0 \in \tau^\vee \cap M$ qui découpe la face τ'.

Soit $\chi \in (\tau')^\vee \cap M$. Il existe un entier n tel que $\chi + n\chi_0 \in \tau^\vee \cap M$.

Soit $\chi + n\chi_0 \notin \sigma^\perp$ et c'est bon.

Soit $\chi + (n+1)\chi_0 \notin \sigma^\perp$ et c'est bon.

3ème cas : $\sigma \subseteq \tau' \subseteq \tau$

$$\chi' \in (\tau^\vee)^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp$$

$$\chi' + n\chi_0 \in \tau^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp \quad \square$$

Prop. Le sous-schéma V_σ défini par $\mathcal{I}_\sigma$ est l'adhérence de O_σ.

<u>Preuve</u> :

$\mathcal{O}_\sigma$ = le sous-schéma fermé d'idéal

$k[\sigma^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp]$.

$\overline{\mathcal{O}_\sigma} \subseteq V_\sigma$

On doit montrer : $\forall \tau \in \Sigma$ contenant σ,

l'adhérence de $\mathcal{O}_\sigma \subseteq U_\sigma \subseteq U_\tau$ est définie

par l'idéal $\mathcal{J}_\sigma(U_\tau)$.

$f \in k[\tau^\vee \cap M]$, $f = a_1 X_1 + \dots + a_s X_s$

f est dans $k[\sigma^\vee \cap M]$ et dans

$k[\sigma^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp \cap M]$. Soit X_0 qui découpe σ. Il existe m tel que $X_i + m X_0$ est en
$\in \tau^\vee$

dehors de $\sigma^\perp$ pour tout i

Comme $X_\sigma \in \sigma^\perp$, tous les X_i sont en dehors

de $\sigma^\perp$. $\Rightarrow f \in k[\tau^\vee \cap M \setminus \sigma^\perp]$. $\square$

<u>Prop.</u> $X_\tau \in \overline{\mathcal{O}_\sigma} \iff \sigma \subseteq \tau$

<u>Preuve</u>. $X_\sigma \in V_\sigma$ $X_\tau \in U_\tau$

$\mathcal{J}_\sigma(U_\tau) = k[\tau^\vee \cap M - \sigma^\perp]$

Prop. $V_\sigma = X_{\Sigma(\sigma)}$

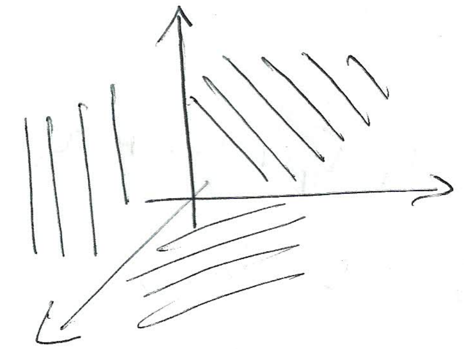
$\Sigma(\sigma) = \{ \tau \to V/\langle \text{ev. eng. par } \sigma \rangle , \ \sigma \subseteq \tau \}$

$\tau(\sigma)$

$U_\sigma \cap V_\sigma = O_\sigma$

Exemple : comment trouver l'éventail ~~de $\mathbb{P}^2$~~ d'une variété torique ?

$\mathbb{P}^2$



$\mathbb{P}^2 = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\} \cup \{z \neq 0\}$

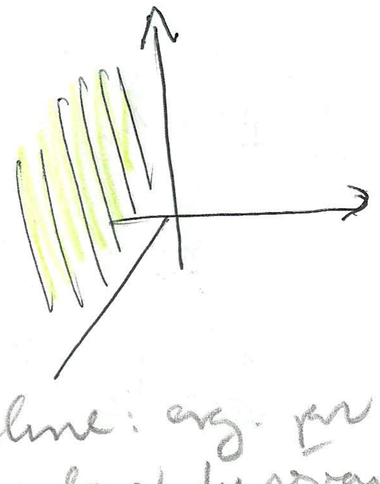
$\mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{P}^2$

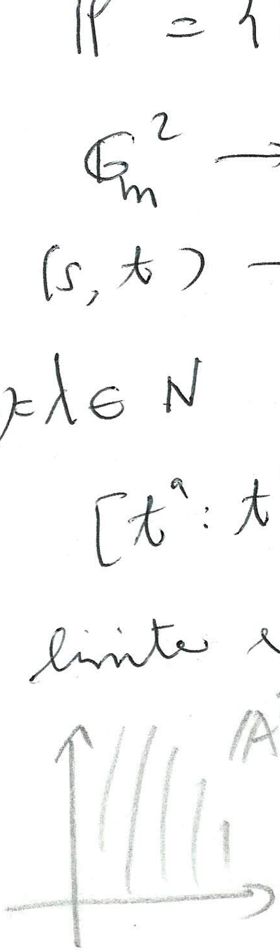
$(s, t) \to [s : t : 1]$

$(a,b) = \lambda \in N \qquad t \mapsto (t^a, t^b)$

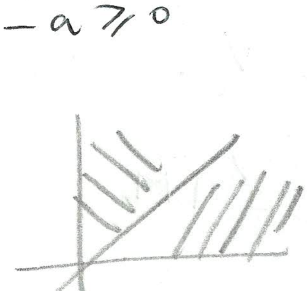
$[t^a : t^b : 1] = [1 : t^{b-a} : t^{-a}]$

limite en 0 ssi $\begin{cases} b-a \geq 0 \\ -a \geq 0 \end{cases}$





éclatement en 0



cône : eng. par une base du réseau