RéGA, 13 juin 2012

Jean-Pierre SERRE –

Revêtements des courbes algébriques

le cas complexe

Courbe : projective, lisse, géo. connexe

k alg. clos

$k = \mathbb{C}$ $\quad Y \xrightarrow{G} X$ revêt fini non ramifié (étale) galoisien

action de G est libre, $Y/G \simeq X$

(X, G) donnés $\Rightarrow Y$? Il existe ? Il y en a beaucoup ?

Réponse :

G, $g = g(X)$ genre de X

Y existe si et seulement si $x_1, y_1, \ldots x_g, y_g \in G$ engendrent G et $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1} = 1$.

Corollaire (modulo la classif. des groupes simples)

Si $g \geq 2$ et si G est simple, alors Y existe.

G $\quad u, v \quad x_1 = u,\ y_1 = v,\ x_2 = v,\ y_2 = u,$

autres $= 1$

Il n'est pas possible à l'heure actuelle de donner une preuve algébrique.

<u>dém</u>

$X(\mathbb{C})$ surface de Riemann compacte connexe

genre top $=$ genre alg. $= g$

<u>Topologie</u> : groupe fondamental

$x_1, \dots y_g$ + relation

Seifert – Threlfall

$\rightsquigarrow$ Y revêtement top. muni d'une structure complexe

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X(\mathbb{C}) \end{array}$$

flèche loc. un isom.

$\Rightarrow$ Y surface de Riemann

Montrer que une surface de Riemann compacte est algébrique

$\exists f$ holomorphe sur $Y \setminus \{P\}$ avec un pôle d'ordre fini en P

$n > 0$

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{L}(n) \to \text{qt de dim } n \to 0$$

coïncide avec $\mathcal{O}_Y$ en dehors de P

$$0 \to \mathbb{C} \to H^0(\mathcal{L}(n)) \to \underset{\text{dim } n}{\underset{\shortparallel}{H^0(-)}}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \text{ indépendant de } n$$

<u>Thm</u>: dim $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ est finie

Prendre $n > \dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$

C'est simplement un thm d'existence (obstruction via la suite exacte)

X variété analytique complexe

loc. libre → fibré vect. pour simplifier

$\mathcal{F}$ faisceau cohérent sur X

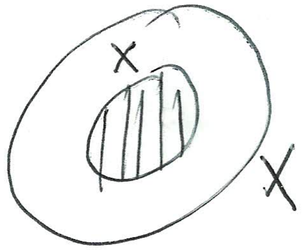
$H^0(X, \mathcal{F})$ dim finie

① structure d'espace de Banach

② loc. compact

$\Downarrow$

dim finie



théorème de Montel

$\boxed{\text{schémas de Hurwitz}}$

Caractéristique $p > 0$

X revêt. étale

G

→ Herbrand
(Journal de Crelle)

→ Weil, Avenir des math. ~1948

revêtements de $X \setminus S$, S fini

$X = \mathbb{P}^1$, $|S| = 3$ $S = 0, 1, \infty$

π_1 libre à 2 générateurs

purge en car 0 $\Rightarrow$ caractéristique p
(moyens
analytiques)

Abhyankar Amer. J 1957

Grothendieck, exp. Bourbaki 182 1959

En car $p > 0$, $|G|$ premier à p $\Rightarrow$

même chose en car. 0 pour g fixé

Situation complexe :
indépendant de la courbe
c'est pas vrai en car p.

De p à 0 :

$$\begin{array}{l} Y \\ G \big\downarrow \text{non ram.} \\ X \end{array}$$

(ou ram. d'ordre premier à p)

k corps alg. clos de car p

$$0 \to \overset{pW_2(k)}{I} \to W_2(k) \to k \to 0$$

$I \cong k$ $\qquad p^2$

anneau artinien
simple mais
modules diffèrent

$X_1 = X/_k$ $\qquad$ X_2 sur W plat lisse $\qquad$ $X_1 = X_2 \times_{W_2} k$

“$X_1 = X_2/_p X_2$”

Obstruction : $H^2(X_1, \text{Tangent}_X)$

se gén. en H^2
et si $=0$, choix
contrôlé par H^1

$X_n, \; X_{n-1}, \; \dots\dots$

$W_n \quad W_{n-1}$

limite

schéma formel

$\hat{X} = \lim X_n$

$k[T]$
à la fin
juste une série
formelle

$\hat{X}$ est algébrique $\qquad$ GAGA formel

comme dans le
doctrine GAGA

car il y
a des
diviseurs
amples

X var. ab. dim 2
on peut trouver $\hat{X}$ non
algébrique

$Y_0 \xrightarrow{G} X_0$ en car 0 sur $W(k)$

$Y \xrightarrow[G]{} X$

$$\begin{array}{cc} Y_1 & Y_2 \\ \downarrow \text{étale} & \downarrow \\ X_1 & X_2 \end{array}$$

unique à partir de Y_1

Quel que soit G, on peut relever en car 0 un revêtement (sur les vecteurs de Witt).

Groth.
SGA 3
th. ext. étale
calculs de groupes

De 0 à p (p ne divise pas $|G|$)

$g=1$ courbe elliptique E

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ E \end{array}$$ revêt. étale, en car 0

Galois = noyau de $[p]$
groupe de type $(p,p) = G$

$p=2$
$\Rightarrow G$ résoluble
Feit-Th.

$p > 71$

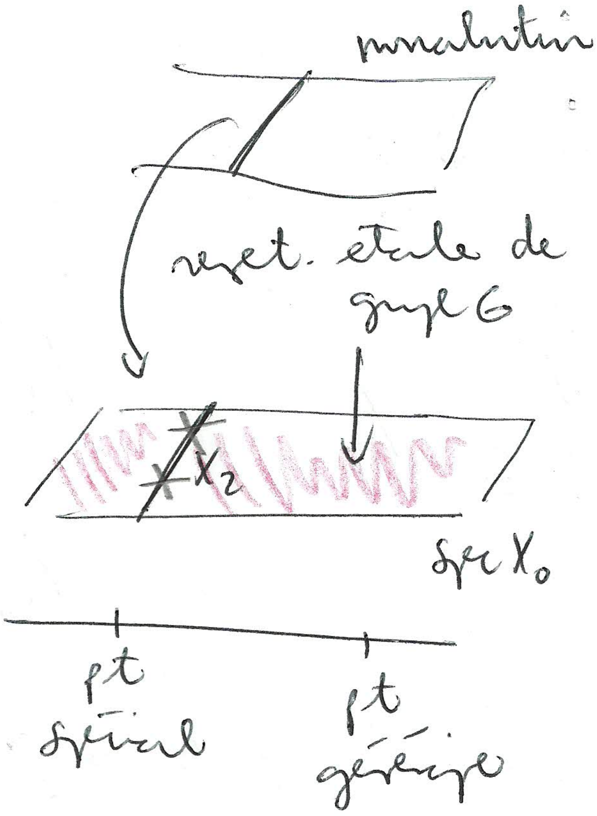
en car p : rang 1 ou 0

X_1 en car p.

X_0 relèvent en car. 0 sur les vecteurs de Witt (ext. finie)

$$\begin{array}{c} Y_0 \\ G \downarrow \\ X_0 \end{array}$$

A an. local
val. discrète



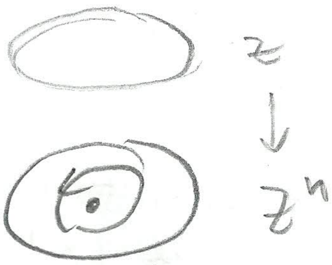
Obst : groupe d'inertie est d'ordre premier à p

Π uniformisante

$A(\Pi^{1/n})$

Lemme d'Abhyankar :

l'inertie disparaît après ext. par $A(\Pi^{1/n})$



Une configuration mange l'autre

revêtement de X_0 étale sauf dans un # fini de points

pureté : Zariski, Nagata

lieu ramifié pur de codim 1

1994

X courbe affine

X = droite affine

$x = y^p - y$ Artin-Schreier

$$\begin{array}{ccc} Y & & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & y^p - y \end{array}$$

$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\quad i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$y \mapsto y + i$

non ramifié en dehors de l'∞

mais ramifié sauvagement à l'∞

revêtement de la droite affine avec $G = A_5$

<u>Conjecture</u>

X possède un revêtement non ramifié de groupe $G \Longleftrightarrow G$ n'a aucun quotient différent de 1 d'indice premier à p

[Condition nécessaire car la droite affine en car 0 est simplement connexe]

Conj $\Leftarrow$

G est engendré par ses p-sous-groupes

ses sous-groupes de Sylow

1994 : Raynaud a démontré la conjecture pour la droite affine

GAGA formel
rigide

1994 Harbater cas général

X affine $\qquad G/pG \qquad 2g+m$ éléments

$(g, p_1, \dots p_m)$

$$x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots\cdots = 1$$

$g \geq 2 \quad |G|$ divisé par p. Comment attaquer la question de l'existence ?

$$\begin{array}{c} Y \\ G \downarrow \pi \\ X - F \end{array}$$

on peut le prolonger sur X (ramifié en F)

fermé

Il n'y a pas GAGA pour les affines.

var. proj

$\pi_* \mathcal{O}_Y$

$$\begin{array}{c} \mathcal{O} \;\; z \\ \downarrow \\ z^n \end{array}$$

$\mathcal{O}_X$

Grauert - Remmert

Grothendieck

$\mathbb{P}^2$ - courbe