RÉGA, 13 juin 2012

Jean-Pierre SERRE

Revêtements des courbes algébriques

le cas complexe

Courbe : projective, lisse, géo. connexe
k alg. clos

$k = \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} Y & & \text{revêt fini} \\ G\downarrow & & \text{non ramifié} \\ X & & (\text{étale}) \end{array} \qquad \text{galoisien}$$

action de G et libre, $Y/G \xrightarrow{\sim} X$

(X, G) donnés $\Rightarrow$ Y ? Il existe ? Il y en a beaucoup ?

Réponse :

G, $g = g(X)$ genre de X

Y existe si et seulement si $x_1, y_1, \dots x_g, y_g \in G$ engendrent G et $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1} = 1$.

Corollaire (mvd la dans ds groups simples)

Si $g \geq 2$ et si G est simple, alors Y existe.

G u, v $x_1 = u$, $y_1 = v$, $x_2 = v$, $y_2 = u$,
autres $= 1$

Il n'est pas possible à l'heure actuelle de donner une preuve algébrique.

<u>dém</u>

$X(\mathbb{C})$ surface de Riemann compacte connexe

genre top $=$ genre alg. $= g$

<u>Topologie</u> : groupe fondamental
$x_1, \dots y_g$ + relation

Seifert - Threlfall

$\rightsquigarrow$ Y revêtement top. muni d'une structure complexe

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X(\mathbb{C}) \end{array}$$

flèche loc. un isom.

$\Rightarrow$ Y surface de Riemann

Montrer que une surface de Riemann compacte est algébrique

$\exists f$ holomorphe sur $Y \setminus \{P\}$ avec un pôle d'ordre fini en P

$n > 0$

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{L}(n) \to \text{qt de dim } n \to 0$$

coïncide avec $\mathcal{O}_Y$ en dehors de P

$$0 \to \mathbb{C} \to H^0(\mathcal{L}(n)) \to H^0(\underset{\substack{\shortparallel \\ \dim n}}{-})$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \text{ indépendant de } n$$

<u>Thm</u>: $\dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ est finie

Prendre $n > \dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$

C'est implicitement un thm d'existence (obstruction via la suite exacte)

X variété analytique complexe