Simone DIVERIO. — Sur la notion de positivité en géométrie algébrique et analytique complexe

X variété complexe compacte, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ X \end{array} \quad \text{fibré en droites holomorphe}$$

D diviseur sur X $\qquad$ $\mathcal{O}_X(D)$ fibré en droites associé

si L est effectif $\iff H^0(X, L) \neq 0$

$E \subset H^0(X, L)$ sous-espace vectoriel

système linéaire : $|E| = \{\mathrm{div}(s)\}_{s \in E} \subset \mathrm{Div}(X)$

X compacte : $\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(s')$ ssi $s = \lambda s'$,

$\lambda \in \mathbb{C}^* \implies |E|$ est paramétré par $\mathbb{P}(E)$

Supposons que $|E|$ est sans points base

i.e. $\forall x \in X$, $\exists s \in E$ tq. $s(x) \neq 0$.

$\implies H_x = \{s \in E \mid s(x) = 0\} \subset E$ est un hyperplan dans E.

$$i_E : X \longrightarrow \mathbb{P}(E)^*$$
$$x \longmapsto H_x$$

Si $\{s_1, \dots s_N\}$ est une base pour E, alors pour deux travail : diff. multiples

$$\iota_E(x) = [s_0(x) : \dots : s_N(x)]$$

$L = \iota_E^* \mathcal{O}(1)$, où $\mathcal{O}(1)$ est le fibré hyperplan sur $\mathbb{P}(E)^*$

Si $s = \sum \lambda_i s_i \in E$, $s = \iota_E^*(\sum \lambda_i z_i)$

$$\Rightarrow E = \iota_E^* H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^N \\ \text{non dégénérée} \\ \text{modulo transf.} \\ \text{projectives} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \to X \text{ avec} \\ E \subset H^0(X, L) \text{ où} \\ |E| \text{ sans point base} \end{array} \right\}$$

choix d'une base

Déf. $L \to X$ est dit très ample si $|L|$ donne un plongement $\iota_{|L|} : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L))^*$

• L est ample si $\exists\, m > 0$ tel que $L^{\otimes m}$ est très ample

Ex : sur une courbe de genre ≥ 2, $D = 2(p) - (q)$ pour un choix générique est ample mais pas très ample

$D \in \mathrm{Div}(X)$ $\qquad C \subset X$ courbe algébrique

$$D \cdot C \qquad D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D) \rightsquigarrow c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

$$\overset{\shortparallel}{[\omega]} \qquad \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})$$

Rappel : $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi i \bullet}} \mathcal{O}_X^* \to 0$

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$