Simone DIVERIO. — Sur la notion de positivité en géométrie algébrique et analytique complexe

X variété complexe compacte, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$L \downarrow X$ fibré en droites holomorphe

D diviseur sur X $\qquad \mathcal{O}_X(D)$ fibré en droites associé

si L est effectif $\iff H^0(X, L) \neq 0$

$E \subset H^0(X, L)$ sous-espace vectoriel

système linéaire : $|E| = \{\mathrm{div}(s)\}_{s \in E} \subset \mathrm{Div}(X)$

X compacte : $\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(s')$ ssi $s = \lambda s'$, $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow |E|$ est paramétré par $\mathbb{P}(E)$

Supposons que $|E|$ est sans points base i.e. $\forall x \in X$, $\exists s \in E$ tq. $s(x) \neq 0$.

$\Rightarrow H_x = \{s \in E \mid s(x) = 0\} \subset E$ est un hyperplan dans E

$$i_E : X \longrightarrow \mathbb{P}(E)^*$$
$$x \longmapsto H_x$$

Si $\{s_1, \dots s_N\}$ est une base pour E, alors

$\iota_E(x) = [s_0(x) : \dots : s_N(x)]$

pour deux travail : diff. multiples

$L = \iota_E^* \mathcal{O}(1)$, où $\mathcal{O}(1)$ est le fibré hyperplan sur $\mathbb{P}(E)^*$

Si $s = \sum \lambda_i s_i \in E$, $s = \iota_E^*(\sum \lambda_i z_i)$

$$\Rightarrow E = \iota_E^* H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^N \\ \text{non dégénérée} \\ \text{modulo transf.} \\ \text{projectives} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \to X \text{ avec} \\ E \subset H^0(X, L) \text{ où} \\ |E| \text{ sans point base} \end{array} \right\}$$

choix d'une base

Déf. $L \to X$ est dit très ample si $|L|$ donne un plongement $\iota_{|L|} : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L))^*$

• L est ample si $\exists\, m > 0$ tel que $L^{\otimes m}$ est très ample

Ex : sur une courbe de genre ≥ 2, $D = 2(p) - (q)$ pour un choix générique est ample mais pas très ample

$D \in \mathrm{Div}(X)$ $\qquad C \subset X$ courbe algébrique

$D \cdot C \qquad D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D) \rightsquigarrow c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{[\omega]} \qquad \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})$

Rappel : $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi i \bullet}} \mathcal{O}_X^* \to 0$

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

$$D \cdot C = \int_{C_{reg}} \omega$$

$D_1 \equiv_{num} D_2$ si $\forall\, C \subset X$, $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$

<u>Lemme</u>. $D_1, \dots D_k, D_1', \dots D_k'$

Si $D_j \equiv_{num} D_j'$ pour tout j. Alors pour tout $V^{\dim k} \subset X$: $\underbrace{(D_1 \cdots D_k)\cdot[V]}_{\int_V \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k} = (D_1' \cdots D_k')\cdot[V]$

<u>Théorème</u> (Nakai-Moishezon-Kleiman)

L est ample sur X projective ssi

$$(\underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_{\dim V = k \text{ fois}}) \cdot [V] = \int_V c_1(L)^{\dim V} > 0$$

pour tout $V \subset X$ irréductible.

Si X n'est pas projective, il pourrait ne pas y avoir des variétés. <u>Ex</u> : tore complexe en dim 2 (Debarre)

$L \to X$ $\quad \Omega \subset X \quad L|_\Omega := \Omega \times \mathbb{C} \xrightarrow{pr} \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$

Donner une métrique hermitienne sur $\Omega \Leftrightarrow$

$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \qquad \xi \in L_{|\Omega}$

$$\|\xi\|^2 = |\theta(\xi)| \cdot e^{-\varphi}$$

Une <u>métrique hermitienne</u> sur L est une fonction $h : L \to \mathbb{R}^+$ qui localement est de cette forme. Il existe une unique connexion compatible à la structure complexe et la métrique. Sa courbure :

$$\Theta(L, h) =_{\text{loc}} \partial\bar\partial\varphi = \sum_{j,k=1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} dz_j \wedge d\bar z_k$$

(1,1)-forme fermée

courbure de Chern

La matrice $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k}\right)$ est hermitienne.

(L, h) est <u>positive</u> si $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k}\right)$ est définie positive en tout point.

$\frac{i}{2\pi}\Theta(L,h)$ est une (1,1)-forme <u>réelle</u> fermée (à cause de i)

$$\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(L)\right] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{C})$$

indépendante de la métrique $= c_1(L)$

Si $c_1(L) \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, je suppose qu'il existe $\omega \in c_1(L)$ (positive). Alors il existe une métrique h sur L tel que $\frac{i}{2\pi} \Theta(L,h) = \omega$ (à courbure positive)

L, h n'importe quelle métrique sur L

$$\frac{i}{2\pi}\Theta(L,h) - \omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial f$$

$h \rightsquigarrow h e^{f} = \tilde h$

loc $\rightsquigarrow e^{-\varphi + f}$

$$\frac{i}{2\pi}\Theta(L,\tilde h) = \frac{i}{2\pi}(\partial\bar\partial\varphi - \partial\bar\partial f) = \omega$$

(lemme $\partial\bar\partial$)

Si L' est un autre fibré t.q. $c_1(L) = c_1(L')$, alors il existe une métrique sur L' telle que ω' coincide avec ω.

<u>Théorème</u> (Kodaira) Si $L \to X$ est un fibré holomorphe sur X Kählerienne.

L est ample $\Leftrightarrow$ L est positif

L très ample $\Leftrightarrow$? Conj. de Fujita, big theorem

$\boxed{\Rightarrow}$ $\quad$ h over L, $e^{-\varphi}$ $\quad$ $h^{\otimes k}$ over $L^{\otimes k}$, $e^{-k\varphi}$ $\quad\quad$ $\sigma_0, \ldots \sigma_N \in H^0(X, L)$

$$\|\xi\|^2 = \frac{|\theta(\xi)|^2}{\left(\sum_{i=0}^{N} |\theta(\sigma_i(x))|^2\right)^{1/2}} \rightsquigarrow e^{-\log \sum |\sigma_j|^2} \quad \text{PSH}$$

restriction de Fubini-Study après avoir plongé

$\xi \in L_x$

$(\Longleftarrow)$

(1954) Théorème (annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano)

Si $L \to X$ est positif

$$H^{p,q}(X, L) = 0 \text{ lorsque } p+q > n$$

$$\cong$$

$$H^q(X, \Omega^p_X \otimes L)$$

$$p = n \Rightarrow \underline{H^q(X, K_X \otimes L)} = 0 \quad q \geq 1$$

Remarque. $L, E \to X$

$L > 0 \Rightarrow \exists k_0 > 0$ tq. $L^{\otimes k} \otimes E > 0 \quad k \geq k_0$.

h_L sur L positive

h_E sur E

$$\Theta(L^{\otimes k} \otimes E, h_L^{\otimes k} \otimes h_E) =$$

$$= \underbrace{k\,\Theta(L, h_L)}_{\text{pour } k \gg 0 \text{ cette partie ``gagne''}} + \Theta(E, h_E)$$

$\dim X = 1$

si $L \to X$ est positif, $p \in X$, $\exists\, k \gg 0$

t.q. $\xi \in L_p^{\otimes k}$ $\exists\, \sigma \in H^0(X, L^{\otimes k})$ t.q. $\sigma(p) = \xi$

$$m_{X,p} = \mathcal{O}_X(-p)$$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-p) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X / m_{X,p} \to 0$$

$\cdot \otimes L^{\otimes k}$: $0 \to \cancel{K_X \otimes} L^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_X(-p) \to K_X \otimes L^{\otimes k} \to$

$$\to K_X \otimes L^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_X / m_{X,p} \to 0$$

suite exacte longue :

$$H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes k}) \to (K_X \otimes L^{\otimes k})_p$$

$$\to H^1(X, K_X \otimes L^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_X(-p))$$

$$\| \quad 0 \text{ si } k \gg 0$$

Th. d'annulation de Serre ?

Après je tensorise aussi par $(K_X)^*$

L ample $\quad h^0(X, L^{\otimes k}) \sim \dfrac{k^{\dim X}}{(\dim X)!} (c_1(L))^{\dim X}$

nef

big $\quad$ plus adapté à la géo. birat. :

$q > 1$

$$H^q(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$$