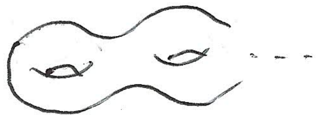
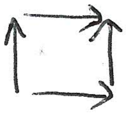
Courbes rationnelles sur les surfaces K3

Kummer, Kähler, Kodaira

K2

Classification des courbes

 $\mathbb{P}^1$	$E = \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+2\mathbb{Z}}$	
$g=0$	$g=1$	$g \geq 2$
courbure >0	courbure $=0$	courbure <0



<u>Ex</u> : points rationnels $C/_k$ une courbe de genre g

- si $g=0$, et que C a un point rationnel $C \simeq \mathbb{P}^1_k$, les points rationnels sont denses
- si $g=1$, et si C a un point, C est une courbe elliptique E, $E(k)$ est un groupe abélien de type fini
- si $g>1$, C a un nombre fini de points rationnels.

Généralités sur les surfaces K3

Pour le moment, on travaille sur $\mathbb{C}$.

Déf. Une surface K3 est une surface projective lisse X

(i) simplement connexe

(ii) de fibré canonique trivial

Rappel : Ω^1_X est le fibré des différentielles

$\Omega^2_X = \Lambda^2 \Omega^1_X$ est le fibré canonique

Remarque : La déf. a un sens sans l'hypothèse "projective" (en remplaçant par "compacte").

Elles sont toutes kählériennes.

Remarque : D'après un théorème (Yau), les K3 peuvent être munies d'une métrique kählérienne plate.

Remarque : $\Omega^1_X \simeq T_X$: une section sans zéro de Ω^2_X correspond à $\Omega^1_X \otimes \Omega^1_X \to \mathcal{O}_X$.

(forme symplectique $\omega \in H^0(X, \Omega^2_X)$ partout non-dégénérée)

Exemples

$i : X \subset \mathbb{P}^3$ hypersurface lisse

- X connexe, simplement connexe (Lefschetz)

Fibré conormal :

$$0 \to \mathcal{O}(-X) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to i_* \mathcal{O}_X \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}(-X)|_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{\mathbb{P}^3}|_X \to \Omega^1_X \to 0$$

fibré conormal

formule d'adjonction :

$$\Omega^2_X \simeq (\Omega^3_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}(X))|_X$$

$$\Omega^n_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-(n+1))$$

$$\Omega^3_{\mathbb{P}^3} \simeq \mathcal{O}(-4)$$

section : $\dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \dfrac{dx_2}{x_2} \wedge \dfrac{dx_3}{x_3}$

$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(d)$ $\quad d = \deg X$

$$\Omega^2_X \simeq \mathcal{O}(d-4)$$

Pour $d = 4$, X est une <u>surface K3</u>

$\Rightarrow$ quartiques dans $\mathbb{P}^3$

Ex: $\sum_{i=0}^{3} X_i^4 = 0$ surface de Fermat

est une K3

Numérologie

les surfaces dépendent de

$$\underbrace{\binom{7}{4}-1}_{\text{pol. hom.}} - \underbrace{(16-1)}_{PGL(3)} = 19 \text{ paramètres}$$

- surfaces de Kummer

A surface abélienne $\mathbb{C}^2/\Lambda$

$A \xrightarrow{i} A$ $\qquad \tilde{A}$ = éclatement des 16

$x \longmapsto -x$ $\qquad \pi \downarrow$ points fixes de i

$\qquad\qquad A$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{A} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ A & \xrightarrow{i} & A \end{array}$$

$\tilde{A}/\tilde{i}$ est projectif, lisse et simplement connexe

minuts: $\Lambda^i = \{0\}$

$X = \tilde{A}/\tilde{i}$ est une surface K3, de Kummer

$\tilde{A} \longrightarrow X$ revêtement double ramifié en 16 pts

nombres de Betti

$b_1 = b_3 = 0$

$b_2 = 16 + 6 = 22$

<u>Fait</u> : La surface de Fermat est de <u>Kummer</u>, donc $b_2 = 22$ pour les quartiques.

inspiré à la construction à partir d'un produit de 2 courbes ell.

Hirzebruch-Riemann-Roch :

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \int_X ch(\mathcal{O}_X)\, td(X) = \frac{e(X)}{12}$$

$e(X)$ est la caractéristique d'Euler de X

$$1 - 0 + 1 = \frac{2 + b_2}{12}$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \Omega^2_X)^*$$

<u>Cohomologie des surfaces</u> K3

$H^2(X, \mathbb{Q})$ est de dimension 22

$$H^2(X, \mathbb{C}) = \overset{1}{H^2(X, \mathcal{O}_X)} \oplus \overset{20}{H^1(X, \Omega^1_X)} \oplus \overset{1}{H^0(X, \Omega^2_X)}$$

$$\cup$$

$$H^2(X, \mathbb{Q})$$

$$H^p(X, \Omega^q_X) = H^q(X, \Omega^p_X) \quad \text{\underline{Hodge}}$$

$$H^1(X, \Omega^1_X) = H^1(X, T_X)$$ dimension universel de l'espace de déformations

groupe de Néron-Severi

dans $H^2(X, \mathbb{Q})$, on a $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ qui est engendré par les classes de cohomologie de courbes

Théorème (Lefschetz)

$$NS(X)_{\mathbb{Q}} = H^2(X, \mathbb{Q}) \cap H^1(X, \Omega^1_X)$$

Problème : quels sont les # de Betti b_2 d'une variété symplectique holomorphe ? Est-ce que $b_2 = 3$ peut se produire ? on ne connaît que 4 exemples.

X une surface K3

Existe-t-il sur X une infinité de courbes rationnelles ?

i.e. $\varphi : \mathbb{P}^1 \to X$ non constant

$d = 1, 2, 3$ réglés

les variétés abéliennes n'admettent pas de courbes rationnelles. $\varphi : \mathbb{P}^1 \to X$

forme diff

Conjecture (Bogomolov) X une surface K3.

Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.

"Possibilité logique" $X/\overline{\mathbb{Q}}$

Alors par tout point rationnel X passe une courbe rationnelle. Et sur un corps fini ?

Rappel : C une courbe nodale 

de genre arithmétique g

$\tilde{C} \longrightarrow C$ normalisation

$g(\tilde{C}) = \tilde{g}$ le genre géométrique C

$\tilde{g} = g - \#\{\text{noeuds}\}$ EX : courbe elliptique nodale

X, C section hyperplane lisse de genre g

← remplacer C par nC.

$H^0(\mathcal{O}(C))$

La dimension du système linéaire est $g = H^0(C, K_C)$

$K_C = \mathcal{O}(C)_{|C}$ (adjonction) canonique de l'espace ambiant n'existe pas.

Soit $n(g)$ ce nombre fini

<u>Formule</u> (Yau - Zaslow)

invariants de Gromov-Witten

$$\sum_{g\geq 0} n(g)\, q^g = \frac{q}{\Delta(q)}$$

$\Delta(q) = q \prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ forme modulaire de poids 12

<u>Th.</u> (Beauville)

(H) les courbes rationnelles sur X sont toutes nodales. Alors la formule de Y-Z est vraie.

C donne une famille de courbes

$$\mathcal{C} \longrightarrow \Pi \curvearrowleft \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(C)))$$

On introduit

$J^g\mathcal{C} \longrightarrow \Pi$ jacobienne compactifiée de degré g.

$J^g\mathcal{C} = \{(t, \mathcal{L}) \mid t\in\Pi,\ \mathcal{L}$ fibré de rang 1, sans torsion, de degré $g\}$

$$C^{(g)} \longrightarrow J(C)$$
$$(P_1, \dots P_g) \mapsto P_1 + \dots + P_g$$

<u>Faits</u> : • $\overline{J}^g \mathcal{C}$ est projective, lisse, simplement connexe

• $\overline{J}^g \mathcal{C}$ "hérite" de X une section de $\Omega^2_{J^g\mathcal{C}}$ symplectique (Mukai)

• $\overline{J}^g \mathcal{C}$ est birationnel à $X^{(g)} = X^g / \mathfrak{S}_g$

• Soit $X^{[g]}$ le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas de X de dim 0 et de longueur g. $X^{[g]}$ est proj. lisse, symplectique holomorphe.

$X^{[g]}$ et $\overline{J}^g \mathcal{C}$ sont birationnels

<u>Th</u> (Batyrev, Huybrechts)
Cela implique que ces variétés sont déformations l'une de l'autre.

$\Rightarrow \quad e(\overline{J}^g \mathcal{C}) = e(X^{[g]})$

$$\sum e(g)\, q^g = \frac{q}{\Delta(q)} \qquad \text{(Göttsche)}$$

A variété abélienne, dim. g

$H^i(A,\mathbb{Q}) = \Lambda H^1$

$b_i = \binom{2g}{i}$ $\quad e(A) = \sum (-1)^i b_i = \begin{cases} 0 & g>0 \\ 1 & g=0 \end{cases}$

Klemm – Maulik – Pandharipande – Scheidegger (2008)

$C \to \mathbb{P}^1$ courbe hyperelliptique de genre 2

$\boxed{X \mapsto nX}$

Une infinité

$$\begin{tikzcd}
 & & J(\tilde{C}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
C \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right] \arrow[dr, bend right] & J(C) & X \\
 & \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

<u>surface de Kummer</u>

involution associée à la courbe hyperelliptique

$H^2(X,\mathbb{Q})$

$\cap$

$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$

$\mathfrak{X} \longleftarrow$ famille de surfaces K3

$\downarrow$

Δ petit disque autour de 0 dans $\mathbb{C}$

$s \in \Delta$, $\quad H^2(\mathfrak{X}_s, \mathbb{Q}) \overset{an.}{\simeq} H^2(\mathfrak{X}_0, \mathbb{Q})$

$\eta \in H^0(\mathfrak{X}_s, \Omega^2_{\mathfrak{X}_s})$

application des périodes

$t_s(\eta)$ $\qquad$ $t_s(\eta) \cup t_s(\eta) = 0$

$$t_s(\eta) \cup t_s(\overline{\eta}) > 0$$

Elle est injective

Tout élément de cette forme est réalisé par une déformation (pas nécessairement projective)

Si, de plus, $t_s(\eta) \cup H = 0$, alors la déformation est projective.

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \to X$$

la dimension de l'espace des déformations de φ est contrôlé par $\mathcal{N}_\varphi$

$$h^0(\mathcal{N}_\varphi) - h^1(\mathcal{N}_\varphi)$$

$$d\varphi : T_{\mathbb{P}^1} \to \varphi^* T_X$$

"$\mathcal{N}_\varphi \simeq \Omega^1_{\mathbb{P}^1}$" $\qquad$ $h^0 - h^1$

$\qquad\qquad\qquad 0 - 1 = -1$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d] & \mathcal{X}' \arrow[d] \\
0 \arrow[r, hook] & \Delta^{20} \arrow[r, phantom, "\supset"] & Z
\end{tikzcd}$$

φ se déforme

de dim 19