Christophe SOULÉ. – Une introduction à la géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques (RéGA, 18/1/12)

Théorie d'Arakelov

Équations diophantiennes

$F(x,y) = 0 \qquad F \in \mathbb{Z}[u,v]$

solutions $x, y \in \mathbb{Z}$

1) Congruences

p premier $\quad F(x,y) \equiv 0 \ (p)$

schéma $\operatorname{Spec}\left(\mathbb{F}_p[u,v]/(F) \right)$

2) Solutions complexes

$F(x,y) = 0 \quad x, y \in \mathbb{C} \quad$ courbe$/\mathbb{C}$

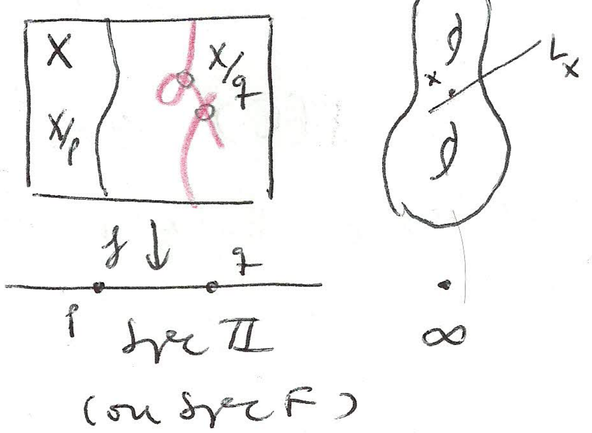
géométrie complexe hermitienne

Arakelov : faire 1) et 2) simultanément

$\left.\begin{array}{l}\text{géométrie alg.}\\ \text{des schémas sur } \mathbb{Z}\\ \text{géométrie complexe}\\ \quad\text{hermitienne}\end{array}\right\}$ géométrie d'Arakelov

X variété$/\mathbb{Z}$ de dim 2, proj. plate et semi-stable irréd, régulière

fibre générique lisse



$$X = \mathrm{Proj}\left(\frac{\mathbb{Z}[x_0, \dots x_N]}{(F_1, \dots F_k)}\right)$$

$1/2$ stable : $X/_{\mathbb{F}_q}$ n'a que des points doubles + conditions sur les $\mathbb{P}^1$ des réductions

Fontaine : on ne peut avoir que des fibres lisses

$X(\mathbb{C})$ surface de Riemann

Fibrés hermitiens inversibles sur X

$\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$

L : $\mathcal{O}_X$-module de rang un, $\forall x \in X$

$$L_x = \varinjlim_{U, x} \Gamma(U, L) \simeq \mathcal{O}_x$$

$L|_{X(\mathbb{C})} = L_{\mathbb{C}}$ fibré inversible holomorphe (Principe GAGA)

$\|\cdot\|$ sur L

$\forall x \in X(\mathbb{C})$, $L_x/m_x \simeq \mathbb{C}_x$ $\qquad \|\cdot\| : \mathbb{C}_x \longrightarrow \mathbb{R}^+$

variation de la norme

- $\|\lambda s\| = |\lambda| \, \|s\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\|s\| = 0 \iff s = 0$

$U \subset X(\mathbb{C})$ $\quad s \in \Gamma(U, L)$ $\quad s(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$

$U \ni x \longmapsto \|s(x)\|$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U

Soit $\bar{L}$ et $\bar{M}$ deux fibrés inversibles hermitiens

Arakelov définit $\boxed{\bar{L}\cdot\bar{M} \in \mathbb{R}}$

1) $\bar{L}\cdot\bar{M} = \bar{M}\cdot\bar{L}$

2) $\bar{L}\cdot(\bar{M}_1+\bar{M}_2) = \bar{L}\cdot\bar{M}_1 + \bar{L}\cdot\bar{M}_2$

Fibré dualisant relatif

$\mathcal{U} = X \setminus \{\text{pt. doubles}\}$

$f : \mathcal{U} \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ lisse

$\Omega^1_{\mathcal{U}}$ $\exists!$ fibré inversible ω_X sur X

tel que $\omega_{X|\mathcal{U}} \simeq \Omega^1_{\mathcal{U}}$.

L'unicité vient du fait que les pt doubles sont de codim 2

Arakelov

définit une métrique sur ω

$\bar{\omega} = (\omega, \|\cdot\|_{\text{Arakelov}})$

$\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}\cdot\bar{\omega} \in \mathbb{R}$

$\bar{\omega}^2 \geq 0$ (Faltings, 1984)

$\bar{\omega}^2 > 0$ (Ullmo, 1998)

Corollaire (Szpiro) Conjecture de Bogomolov

J = Jacobienne de X_F

$j : X(\bar{F}) \subset J(\bar{F})$

L'image de j est discrète pour la topologie de Néron-Tate

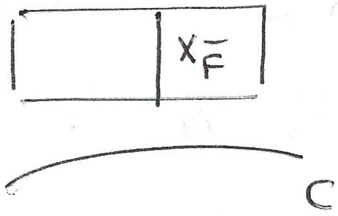
Hauteur de Néron-Tate $= 0$ que pour les points de torsion

Conjecture (Parshin, Moret-Bailly)

$\exists\, \alpha, \beta$ constantes telles que

$$\bar{\omega}^2 \leq \alpha \log |\Delta_{F/\mathbb{Q}}| + \beta [F:\mathbb{Q}]$$

α et β restent bornés quand la courbe X_F varie dans une famille projective



$\dfrac{\bar{\omega}^2}{[F:\mathbb{Q}]}$ invariante par extensions d'scalaires

Théorème (Parshin, Moret-Bailly)

La conjecture ci-dessus $\Rightarrow$

$\exists\, \gamma > 0$ tq si $a + b = c$, $\mathrm{pgcd}(a,b,c) = 1$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, alors :

$$abc \leq \Big(\prod_{p \mid abc} p \Big)^{\gamma}$$

En fait, la première conjecture implique

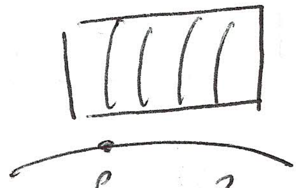
Mordell effectif : si X de genre ≥ 2, $\exists\, \alpha', \beta'$

$P \in X(K)$, $F \subset X$

$$h(P) \leq \alpha' \log |\Delta_K| + \beta' [K:\mathbb{Q}]$$

$\Longrightarrow \quad x^5 = y(y+1)$

$a = b + c \qquad P = (\sqrt[5]{m},\ y = \frac{a}{b}) \qquad x^5 = \frac{ac}{b^2} = m$



$P \qquad \overline{\omega}^2_{X/P}$

hauteur sur la courbe

Définition de l'intersection $\overline{L} \cdot \overline{M}$

s section rationnelle de L

t - - - - - - - - - - - - de M

$D = \mathrm{div}(s), \quad E = \mathrm{div}(t)$

On peut supposer: D, E irréductibles

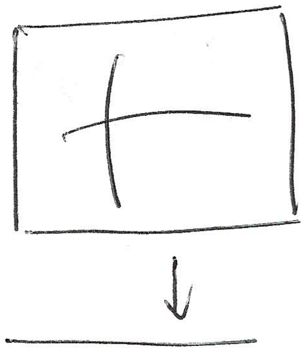
$f(D) \subset \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ est un fermé

↳ propre

1) $f(D) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, D horizontal

2) $f(D) = \{p\}$, D vertical

X

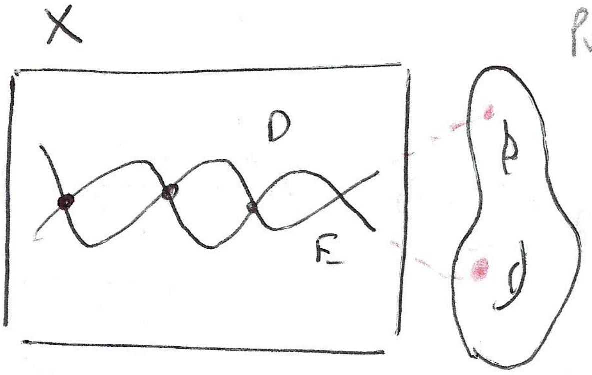


$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$

1) Si D vertical, $f(D) = \{p\}$

$$\overline{L} \cdot \overline{M} = \deg(M_{|D}) \log(p)$$

2) Si D et E sont horizontaux,



Pour ω, deux diviseurs
+ terme de différent
de chaque

$$D|_{X(\mathbb{C})} = \sum_i P_i$$

$$\bar{L}\cdot\bar{M} = \sum_{x \in D \cap E} \log \# \frac{\mathcal{O}_x}{(s,t)} - \sum_i \log \|t(P_i)\|$$

$$- \int_{X(\mathbb{C})} (\log \|s\|)\, c_1(\bar{M})$$

où $c_1(\bar{M}) = (1,1)$-forme sur $X(\mathbb{C})$

égale à $\dfrac{\partial\bar{\partial}}{2\pi i} \log \|t\|^2$ sur $X(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{div}(t)$

(Deligne)

Montrer que c'est symétrique :
appliquer la formule de Stokes 2 fois
(en faisant attention aux singularités)

<u>Riemann-Roch arithmétique</u>

Déterminant du laplacien

$\lambda_1, \dots \lambda_N > 0$ $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{-s} = \zeta_\lambda(s)$

$$\zeta_\lambda'(0) = -\sum_{i=1}^{N} \log(\lambda_i) \Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_N$$
$$= \exp(-\zeta_\lambda'(0))$$

$\lambda_1, \dots \lambda_N \dots > 0$ tel que

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-s}$$

Supposons :

1) $\zeta_\lambda(s)$ a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$

2) 0 n'est pas un pôle

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots := \exp(-\zeta_\lambda'(0))$$

<u>Exemple</u> : $\lambda_i = i$ $\quad \infty! = 1.2.3\dots = \sqrt{2\pi}$

$X(\mathbb{C})$ surface de Riemann

$(L_{\mathbb{C}}, \|.\|)$ choisissons une métrique sur $X(\mathbb{C})$

$$\mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{C}), L_{\mathbb{C}}) \underset{\bar\partial^*}{\overset{\bar\partial}{\rightleftarrows}} A^{0,1}(X(\mathbb{C}), L_{\mathbb{C}}) \ni \alpha, \beta$$

métrique L^2 $\quad (\alpha, \beta)_{L^2} = \int_{X(\mathbb{C})} \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle \, dx$

Il existe un adjoint $\bar\partial^*$: $\langle \alpha, \bar\partial \beta \rangle = \langle \bar\partial^* \alpha, \beta \rangle$

$$\Delta := \bar\partial^* \bar\partial$$

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ valeurs propres positives de Δ

<u>Fait</u> : $\zeta_\Delta(s)$ satisfait 1) et 2)

(noyau de la chaleur)

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots = \exp\left(-\zeta_\Delta'(0)\right) = \det{}'(\Delta)$$

X surface arithmétique

$\overline{L}$ fibré inversible hermitien sur X

On choisit une métrique sur $TX(\mathbb{C})$

Si $s \in \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{C}), L_{\mathbb{C}})$ $\quad \|s\|_{L^2} = \int_{X(\mathbb{C})} \|s\|^2 \, dx$

$H^0(X, L)$ = sections globales de L sur X

$\mathbb{Z}$-mod libre de rang fini (X projectif)

$$\widehat{\deg}(H^0) = -\log \mathrm{vol} \, \frac{H^0(X,L) \otimes \mathbb{R}}{H^0(X,L)}$$

$$H^0(X,L) \otimes \mathbb{C} = H^0(X(\mathbb{C}), L_{\mathbb{C}})$$

$H^1(X, L)$ de type fini $/\mathbb{Z}$ peut avoir de la torsion !

coh. de Čech de L sur X

$$\widehat{\deg}(H^1) = \log \# H^1(X,L)_{\mathrm{tors}} - \log \frac{H^1(X,L) \otimes \mathbb{R}}{H^1(X,L)}$$

<u>Théorème</u> (Deligne, Gillet-Soulé, Bismut)

$$\widehat{\deg}\, H^0 - \widehat{\deg}\, H^1 - \frac{1}{2} \log \det{}'(\Delta)$$
$$= \frac{\overline{L}\cdot\overline{L}}{2} - \frac{\overline{\omega}\cdot\overline{L}}{2} + \frac{\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}}{12}$$
$$+ \frac{1}{12} \sum_p \delta_p \log(N_p) - \frac{g-1}{12}\left(24\zeta'(-1)-1\right)$$

$\overline{\omega}$ avec la métrique duale de celle sur $TX(\mathbb{C})$

g = genre de $X(\mathbb{C})$

δ_p = nombre de pt. doubles dans la fibre en p,

$N_p = \# k(p)$

<u>Applications</u> :

→ Pour des puissances d'un faisceau ample

→ Variétés abéliennes