Hélène <u>ESNAULT</u>. — Relation entre $\pi_1^{\text{ét}}$ (dû à Grothendieck) et stratifications

X variété (algébrique) lisse $/\mathbb{C}$, $x \in X(\mathbb{C})$

$\pi_1^{\text{top}}(X, x) = \mathrm{Aut}(|_x)$ Riemann, Poincaré...

Catégorie des revêtements (topologiques)

<u>obj</u> : $\begin{array}{c} Y \\ \pi \downarrow \\ X \end{array}$ <u>morphismes</u> : $\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$

"Revêtements" $\xrightarrow[\text{foncteur fibre}]{|_x}$ Ens

$\pi \longmapsto \pi^{-1}(x)$

$g \in \mathrm{Aut}(|_x) = \{g_\pi\}$ tels que $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$

$g_{\pi_1} \circlearrowleft \pi_1^{-1}(x) \longrightarrow \pi_2^{-1}(x) \circlearrowright g_{\pi_2}$

- groupe abstrait
- <u>topologie</u> : engendrement fini

X schéma connexe

x point géométrique de X : $\mathrm{Spec}\, k \longrightarrow X$, $k = \bar{k}$

Catégorie des revêtements étales finis :

$$\begin{array}{ll}\underline{\text{Obj}}: & \begin{array}{c} Y \\ \downarrow \pi \\ X\end{array} \ \begin{array}{l}\text{étale}\\ \text{fini}\\ \end{array}\end{array} \qquad \underline{\text{Morph}}: \begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

propre

Revêtements étales finis $\longrightarrow$ Ens fini

$$\pi \longmapsto \pi^{-1}(x)$$

$\pi_1^{et}(X, x) = \mathrm{Aut}(1_x)$ profini, groupe top.

$X/_{\mathbb{C}}$ comme au début, $x \in X(\mathbb{C})$

$$\pi_1^{top}(X, x) \twoheadrightarrow \underset{\substack{\longleftarrow \\ H \text{ fini}}}{\lim} (\pi_1^{top} \to H) \atop \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\pi_1^{ét}(X, x)}$$

$\underline{\text{Thm}}$ (Maltsev) $X/\mathbb{C}$

$\pi_1^{ét}(X, x) = \{1\} \Rightarrow$ toute représentation complexe linéaire de $\pi_1^{top}(X, x)$ est triviale.

$\underline{\text{preuve}}$: $\rho : \pi_1^{top}(X, x) \to GL(n, \mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd} \gamma_1, \ldots \gamma_N & \rho(\gamma_i) \\ & GL(n, A) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

A anneau de type fini $/\mathbb{Z}[\frac{1}{M}]$

$\rho \neq 1 \Rightarrow \exists\, s \in \mathrm{Spec}\, A$ point fermé tq $\rho \otimes s \neq \{1\}$

$$\rho : \pi_1^{top}(X, x) \xrightarrow{\rho \otimes s} GL(n, \underbrace{k(s)}_{\text{fini } = \mathbb{F}_q})\,.$$