RéGA, 11 avril 2012

Jean-Pierre DEMAILLY. – Singularités analytiques et faisceaux d'idéaux multiplicateurs

X variété $/_{\mathbb{C}}$ $\quad \dim_{\mathbb{C}} X = n$

par exemple X projective $/_{\mathbb{C}}$ (lisse)

affine $/_{\mathbb{C}}$ (lisse)

$\Omega \subset X$ ouvert de carte

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$

$$u(z) = \sum_{|I|=p,\, |J|=q} u_{IJ}(z)\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$I = (i_1 < i_2 < \ldots < i_p)$

$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$

$u_{IJ} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ forme diff

mesures, $\mathcal{D}'(\Omega)$ "courant" (De Rham, Lelong)

différentielle extérieure d

$(\mathcal{E}^k(\Omega)$ k-formes, $d)$ $\quad H^k_{dR}(\Omega, \mathbb{K})$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$d = \underset{(1,0)}{\partial} + \underset{(0,1)}{\bar{\partial}}$$

$\partial \quad (p,q) \rightsquigarrow (p+1, q)$

$\bar\partial \quad (p,q) \rightsquigarrow (p, q+1)$

$$\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{d^2} = \underset{\underset{(2,0)}{}}{\overset{}{\underset{0}{\partial^2}}} + \underset{(0,2)}{\underset{0}{\bar\partial^2}} + \underbrace{\partial\bar\partial + \bar\partial\partial}_{(1,1)} \to 0$$

cohomologie de Dolbeault :

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C}) = H^q(\mathcal{E}^{p,\bullet}(X), \bar\partial)$$

$E \to X$ fibré vectoriel holomorphe

$$E_{|U_j} \simeq U_j \times \mathbb{C}^r \qquad r = \text{rang}(E)$$

$$(z, \xi_k) \longmapsto (z, \underbrace{g_{jk}(z)}_{\text{hol}} \cdot \xi_k)$$

$$u \in \mathcal{E}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^*_X \otimes E)$$

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q \\ 1 \le \lambda \le r}} u_{IJ,\lambda}(z)\, dz_I \wedge d\bar z_J \otimes \underset{\text{repère holomorphe}}{e_\lambda} \qquad (*)$$

<u>Observation</u>: $\bar\partial$ bien défini sur les sections $(*)$

car $\bar\partial e_\lambda = 0$.

$H^{p,q}_{\bar\partial}(X, E)$

Complexe de faisceaux

$$\underline{\mathcal{E}}^{p,q}_{X,E} \xrightarrow{\bar\partial} \underline{\mathcal{E}}^{p,q+1}_{X,E} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

le faisceau des sections holomorphes

exact en degré $q \geq 1$

$$\ker \bar\partial : \mathcal{E}^{p,0}_{X,E} \to \mathcal{E}^{p,1}_{X,E} = \mathcal{O}(\Omega^p_X \otimes E)$$

$$\sum u_I(z)\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$$

Isomorphisme de Dolbeault

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X, E) \simeq \underbrace{H^q}_{\text{faisceau}}(X, \Omega^p_X \otimes E)$$

X projective: $\boxed{\text{"GAGA"}}$ de Serre 1955

<u>Fonctions plurisousharmoniques</u> (psh)

analogue des fonctions convexes de plusieurs variables

f' croissante $\quad f'' = \mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mesure ≥ 0

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \qquad f'(x) = \mu(]-\infty, x])$$

convexe $\Rightarrow$ continue

φ convexe sur Ω convexe $\subset \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \geq 0$$

φ psh sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

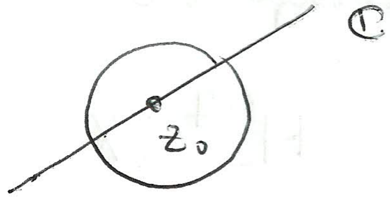
$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) \text{ hermitienne } \geq 0$$

$$\boxed{n = 1 \quad \Delta \varphi \geq 0}$$

sous harmonicité

$$(*) \quad \varphi(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + \xi e^{i\theta})\, d\theta$$

vrai pour les fonctions convexes réelles



Exemple fondamental :

$$\varphi(z) = c \log \sum |f_j|^2 \quad f_j \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \text{psh}$$

$$\varphi(z) = -\infty \quad \text{sur} \quad \bigcap f_j^{-1}(0)$$

$$\varphi : \Omega \to [-\infty, +\infty[\quad \text{scs}$$

semi-continue sup + $(*)$

$$\begin{array}{l} L \\ \downarrow \\ X \end{array} \quad \text{fibré holomorphe en droites (rang } L = 1)$$

(L, h) h métrique hermitienne sur L

$L|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{C}$

$\xi \in L_x \longmapsto (x, \theta(\xi))$ $\qquad \|\xi\|_h^2 = |\theta(\xi)|^2 \cdot e^{-\varphi(x)}$

poids

courbure : $\Theta_{L,h} \overset{\text{def}}{=} \frac{i}{2\pi} \partial\bar\partial \varphi$

$$= \frac{i}{2\pi} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} dz_j \wedge d\bar z_k$$

Il suffit que φ soit localement intégrable (au sens de Lebesgue)

$\varphi \in L^1_{loc}$

$$\begin{tikzcd} & \theta_1 \\ L|_{\mathcal{U}} \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & \\ & \theta_2 \end{tikzcd}$$

$\theta_1(\xi) \qquad e^{-\varphi_1}$

$$\theta_2(\xi) = \overbrace{g(z)}^{\mathcal{O}^*} \cdot \theta_1(\xi) \quad e^{-\varphi_2}$$

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z) + \underbrace{\log |g(z)|^2}_{\partial\bar\partial = 0}$$

<u>Affirmation</u> :

$\Theta_{L,h} \geq 0 \iff$ poids $e^{-\varphi}$ sont donnés par φ psh

Théorème de plongement de Kodaira

X projective, lisse $\quad \begin{matrix} L \\ \downarrow \\ X \end{matrix}$ fibré holom. en droites

Alors il y a équivalence entre :

(i) L est ample

(ii) $\exists$ structure hermitienne (L, h) C^∞

telle que $\omega = \frac{i}{2\pi} \Theta_{L,h} > 0$ définie positive

Métrique Kählerienne

X variété lisse / $\mathbb{C}$

$(1,1)$ forme C^∞ $\omega = i \sum \omega_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$

telle que • ω réelle $\bar{\omega} = \omega$ i.e. $\overline{\omega_{jk}} = \omega_{kj}$

• $\omega > 0 \iff (\omega_{jk}(z)) > 0$

• $d\omega = 0 \iff \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial z_\ell} = \frac{\partial \omega_{\ell k}}{\partial z_\ell}$

$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$

$= \frac{i}{2\pi} d(\bar{\partial} \varphi)$

intersection entre la géométrie riemannienne et la géométrie symplectique.

loc. exact $\Rightarrow d\omega = 0$

classe de cohomologie

$\left\{ \frac{i}{2\pi} \Theta_{L,h} \right\} \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$

Aussi : $H^{1,1}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C})$

$L \rightsquigarrow$ classe de Chern $c_1(L)_{\mathbb{Z}} \in H^2(X, \mathbb{Z})$

$\wr$

[Griffiths-Harris] $c_1(L)_{\mathbb{R}} \in H^2(X, \mathbb{R})$

$$\left\{ \frac{i}{2\pi} \Theta_{L,h} \right\} = c_1(L)_{\mathbb{R}}$$

<u>Kodaira</u> : X projective $/\mathbb{C}$

$\Updownarrow$

X variété complexe, compacte, possédant une métrique kählerienne ω telle que $\{\omega\} \in H^2(X, \mathbb{Q})$ (métrique de Hodge)

$\boxed{\Rightarrow}$ évident $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

$\uparrow$

$L = \mathcal{O}(1)_{|X} = \omega_{|X} > 0$ $\qquad \mathcal{O}(1) \qquad \mathcal{O}(-1)_{[z]} = \mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^{N+1}$

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial\bar\partial \log\left(1 + \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2 + \dots + \left|\frac{z_N}{z_0}\right|^2\right)$$

$$= \Theta_{\mathcal{O}(1),\, can} \in H^2(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$$

$\boxed{\Leftarrow}$ on peut supposer $\{\omega\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$

$\exists (L, h)\ \mathcal{C}^\infty \quad D^2 = \Theta_{L,h} = \omega \quad (1,1) \qquad$ A. Weil

Par Kodaira, L est ample

$$\varphi_{(mL)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N = P(H^0(X, L^{\otimes m})^*)$$

$$x \longmapsto H_x = \{\sigma \mid \sigma(x) = 0\}$$

Théorème de Chow (version simple de GAGA)

Identité de <u>Bochner - Kodaira - Nakano</u>

(E, h) fibré vectoriel holomorphe sur X

$\exists$ connexion $\mathcal{C}^\infty$ unique ∇

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E) \underset{\nabla^{0,1}}{\overset{\nabla^{1,0}}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{p+1,q} T_X^* \otimes E)$$

$$\Lambda^{p,q+1}$$

$$\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$$

telle que $\cdot\ \nabla^{0,1} = \bar\partial$

$\cdot\ \nabla_{\mathrm{Herm}(E)} h = 0$

$$\Theta_{E,h} = \frac{i}{2\pi} \nabla_h^2$$

$$\frac{i}{2\pi} \nabla_h^2 u = \Theta_{E,h} \wedge u$$

$$\Theta_{E,h} \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{1,1} T_X^* \otimes \mathrm{Herm}(E, E))$$

$$\Theta_{E,h} = -\bar\partial(h^{-1}\partial h)$$

Espaces L^2

(X, ω) Kählerienne

$$L^2(X, \Lambda^{p,q}T_X^* \otimes E)$$

$$\|u\|^2 = \int_X |u(z)|^2_{\omega \otimes h}\, dV_\omega$$

$$dV_\omega = \frac{1}{n!}\omega^n = i^n \det(\omega_{jk}(z))\, dz_1\, d\bar z_1 \ldots dz_n\, d\bar z_n$$

$$\nabla^* = (\nabla^{1,0})^* + (\nabla^{0,1})^*$$

on définit des laplaciens :

$$\Delta' = (\nabla^{1,0})(\nabla^{1,0})^* + (\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0}$$

$$\Delta'' = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$$

X compacte

$$\langle\langle \Delta'' u, u \rangle\rangle = \|\bar\partial u\|^2 + \|\bar\partial^* u\|^2$$

$$\Delta'' u = 0 \iff \bar\partial u = 0 \text{ et } \bar\partial^* u = 0$$

théorie de Hodge L^2

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X, E) \underset{\text{Hodge } L^2}{\simeq} \mathcal{H}^{p,q}(X, E)$$

formes harmoniques

$$\ker \bar\partial^* = (\operatorname{Im} \bar\partial)^\perp$$

$$\ker \bar\partial \cap \ker \bar\partial^* = \ker \bar\partial \cap (\operatorname{Im} \bar\partial)^\perp$$

$$(p,q-1) \xrightarrow{\bar\partial^{p,q-1}} (p,q) \xrightarrow{\bar\partial} (p,q+1)$$

$$\operatorname{Im} \bar\partial^{p,q-1} \subset \ker \bar\partial^{p,q}$$

$$\Delta'' = \Delta' + \underbrace{A^{p,q}_{E,\omega,h}}_{\text{opérateur de courbure}}$$

<u>rang $E = 1$</u>

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{I,J}(z) \otimes e$$

$$\Theta_{E,h} = \frac{i}{2\pi} \sum \lambda_j \, dz_j \wedge d\bar z_j$$

$$\omega > 0 \qquad \omega = \frac{i}{2\pi} \sum dz_j \wedge d\bar z_j$$

$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ valeurs propres de courbure

$$A^{p,q}_{E,\omega,h} u = \sum \Big(\sum_{j \in J} \lambda_j - \sum_{j \in \complement I} \lambda_i \Big) u_{IJ}(z) \otimes e$$

$$\langle A^{p,q}_{E,\omega,h} u, u \rangle \geqslant (\lambda_1 + \dots + \lambda_q - (\lambda_{p+1} + \dots + \lambda_n))|u|$$

$$\|\bar\partial u\|^2 + \|\bar\partial^* u\|^2 \geqslant \|\nabla^{1,0} u\|^2 + \|(\nabla^{1,0} u)^*\|^2$$

$$+ \int_X (\lambda_1 + \dots + \lambda_q - (\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_n))|u|^2$$

inégalité BKN

$\bar\partial u = \bar\partial^* u = 0$

<u>conclusion</u> : Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_q - (\lambda_{p+1} + \dots + \lambda_n) > 0$

$\Longrightarrow H^{p,q}(X, E) = 0$

<u>1^{er} cas</u> : $p = n$

$$\Theta_{E,h} > 0 \Longrightarrow H^{n,q}(X, E) = H^q(X, \Omega^n_X \otimes E)$$

<u>2^e cas</u> : Je choisis $\omega = \Theta_{E,h} > 0$, $\lambda_j = 1$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_q - (\lambda_{p+1} + \dots + \lambda_n) = p + q - n$$

$p + q > n \Longrightarrow H^{p,q}(X, E) = 0$

Cas essentiel : (L, h) $h = e^{-\varphi}$ localement

Faisceau multiplicateur :

$$\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$$
$$= \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid \exists V \ni x \int_V |f|^2 e^{-\varphi} < +\infty \right\}$$

X proj. $\sigma_1, \dots \sigma_N \in H^0(X, L^{\otimes m})$

$$\xi \in L_x \quad \|\xi\|_h^2 = \frac{|\theta(\xi)|^2}{\left(\sum |\theta^{\otimes m}(\sigma_j)|^2\right)^{1/m}}$$
$$= |\theta(\xi)|^2 e^{-\varphi(z)}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{m} \log \sum |\sigma_j|^2$$

dense dans le psh

"affine par morceaux dans les cones"

$$\int \frac{|f|^2}{\left(\sum |\sigma_j|^2\right)^{1/m}} < +\infty$$

$\mathcal{I} = (\sigma_j)$ $\xrightarrow{\text{log résolution}}$ $\int \frac{|f|^2}{\sum |z_j|^{2a_j}}$ $\in \mathbb{Q}$

on sait les calculer

Théorème d'annulation de Nadel

décorsé de la réthorique

X projective ou affine

$L \to X$ en droites holomorphes

(L, h) $h = e^{-\varphi}$ avec singularités

$\boxed{\mathcal{J}(h)}$ "faisceau multiplicateur de Nadel"

$\mathcal{J}(h) \subset \mathcal{O}_X$

On suppose $\Theta_{L,h} \geqslant \varepsilon \omega$ ω kählerienne C^∞
$\varepsilon > 0$

Conclusion

$$H^q(X, \Omega_X^n \otimes L \otimes \mathcal{J}(h)) = 0 \quad \forall q \geqslant 1$$

$$\|\bar\partial^* u\|^2 + \|\bar\partial u\|^2 \geqslant \int_X (\lambda_1 + \dots + \lambda_q) |u|^2$$

$|J| = n$ $\complement I = \emptyset$

$$\geqslant q\, \varepsilon \|u\|^2$$

$\uparrow$
par hypothèse

annulation des fns L^2 : $\int |u|^2 e^{-\varphi} < +\infty$

Thm. de Lefschetz difficile

Thm. d'annulation de Kodaira

$$\begin{array}{c} X_t \quad \mathfrak{X} \\ \downarrow \\ t \in S \end{array}$$

$h^0(X_t, K_{X_t}^{\otimes m})$ indépendant de t

Siu 2002

M. Paun 2005

On ne sait pas traduire la preuve au langage algébrique.

L pseudoeffectif

$\Updownarrow$

$\exists h$ $\Theta_{L,h} \geq 0$ avec singularités

$\exists h_{min}$ à sing. minimales $\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathcal{J}(h_{min})}$

le faisceau qui rentre dans le th. de Lefschetz

Dans le cas où il y a des sing. on ne peut pas prendre

$\omega = \Theta_{L,h}$

En fait, la conclusion est fausse pour $p \neq n$.