RéGA, 9 mai 2012

Olivier WITTENBERG. – Autour du groupe de Chow des zéro-cycles

X variété sur un corps k

$Z_i(X) = \bigoplus_{\substack{W \subset X \\ \text{fermé irréd} \\ \text{de dim } i}} \mathbb{Z} \cdot W$ "cycles de dim i"

$i = \dim X - 1$
diviseurs de Weil

$f : Y \to X$ propre

$f_* : Z_i(Y) \to Z_i(X)$ par linéarité à partir de $f_* W = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim f(W) < \dim W \\ [k(W) : k(f(W))]\, f(W) & \text{sinon} \end{cases}$

$W \subset Y$

Un cycle $z \in Z_i(X)$ est <u>rationnellement équivalent à 0</u> si $z = \sum_j f_{j*}(\mathrm{div}(\pi_j))$

où $f_j : Y_j \to X$ propre

Y_j <u>normale</u>, $\pi_j \in k(Y_j)^*$

$\dim Y_j = i + 1$

pour pouvoir définir le diviseur

En général, Y_j est le normalisé d'une sous-variété de X

<u>Def</u>. $CH_i(X) = Z_i(X) / \{z \underset{X}{\sim} 0\}$ groupe de Chow

pour pouvoir définir
la structure d'anneau

Si X est $\boxed{\text{lisse}}$,

$$CH^i(X) := CH_{\dim X - i}(X)$$

$$CH^*(X) = \bigoplus_{i \geq 0} CH^i(X)$$

est un anneau gradué.

$$CH^0(X) = \mathbb{Z}$$

$$CH^1(X) = \operatorname{Pic}(X)$$

<u>Exemple</u>: $CH^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$

$CH_0(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ tous les points sont rationnellement équivalents

X <u>courbe</u>

$$CH_0(X) = CH^1(X) = \operatorname{Pic}(X)$$

$X(k) \neq \emptyset$ $\quad J = \operatorname{Jac}(X)$

$$0 \to J(k) \to \underset{\substack{\parallel \\ CH_0(X)}}{\operatorname{Pic}(X)} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

<u>Surfaces</u>

$X \subset \mathbb{P}^3_k$ surface lisse

conique passant par les deux points

<u>Fait</u>: $\deg(X) = 2 \underset{\text{(Swan)}}{\Rightarrow} CH_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

$A_0(X) = 0$

[Il y a toujours, pour X propre,

$$CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$
$$P \longmapsto [k(P):k]$$

$$A_0(X) := \mathrm{Ker}(\deg)$$]

<u>Prop.</u> $CH_0(X)$ est un invariant birationnel pour les variétés propres et lisses (car $k = 0$)

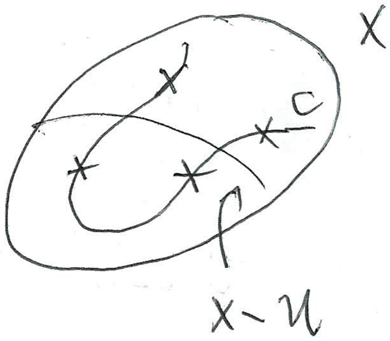
Ce n'est pas vrai en général, e.g. $\mathrm{Pic}(X)$

<u>preuve</u>:

<u>Lemme</u>: $\mathcal{U} \subset X$ ouvert dense

<u>déplacement</u> $\forall z \in Z_0(X)$, $\exists z' \in Z_0(\mathcal{U})$ $\quad z \underset{X}{\sim} z'$

<u>Dem</u>: Soit $C \subset X$ courbe lisse contenant $\mathrm{Supp}(z)$ et rencontrant $\mathcal{U}$. (th. à la Bertini)



$z \in \mathrm{Div}(C)$

$z = A - B \quad A, B \in \mathrm{Div}(C)$ très amples

on bouge A, B pour éviter $C \cap (X \setminus \mathcal{U})$

<u>Preuve prop.</u> $f : Y \to X$ morphisme birationnel

$$\begin{tikzcd} CH_0(X) \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & CH_0(Y) \arrow[l, shift left, "\text{lemme}"] \arrow[d, "f_*"] \\ & CH_0(X) \end{tikzcd}$$

$\square$

Cor: $X \subset \mathbb{P}^3$ degré 3

Si $k = \bar{k}$, alors $A_0(X) = 0$.

elles sont birationnels à $\mathbb{P}^2$

$k = \mathbb{R}$ $\quad 0$

$\mathbb{Z}/2$ si 2 comp. connexes

Rappel

$k = \bar{k}$

X propre lisse$/k$, $x_0 \in X$, la variété d'Albanese de X, Alb_X est une variété abélienne munie de $\varphi : X \to Alb_X$, $x_0 \mapsto 0$

qui est universelle au sens suivant :

$\forall A$ var. ab.,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A \\ Alb_X \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd} \qquad x_0 \mapsto 0$$

nulle quand X simpl. connexe

Pour les courbes, c'est la jacobienne. En général, le dual de $\mathrm{Pic}(X)$.

$$\dim Alb_X = \dim H^0(X, \Omega^1)$$

On définit :

$$alb : A_0(X) \longrightarrow Alb_X(k)$$
$$\sum n_P P \longmapsto \sum n_P \varphi(P)$$

(comp. à equiv. rat, morphisme de groupes, surjectif)

Théorème (Roitman, Milne)

alb induit un iso sur la torsion $(k=\bar{k})$

(Si $Alb_X = 0$, pas de torsion)

Corollaire : $X \subset \mathbb{P}^n$ hypersurface lisse de degré $d \leq n$. Alors $A_0(X) = 0$ $(k=\bar{k})$

Lemme. $\forall x \in X$, $\exists L \subset \mathbb{P}^n$ droite contenant x telle que soit $L \cap X = \{x\}$, soit $L \subset X$.

dém : $x = 0 \in \mathbb{A}^n$. Localement X $f=0$, où $f \in k[X_1, \dots X_n]$, $f = f_1 + f_2 + \cdots$ f_i homogène de degré i. Droite par 0 $(t\lambda_1, \dots t\lambda_n)$

$$f(t\lambda_1, \dots t\lambda_n) = t f_1(\lambda_1, \dots \lambda_n) + \dots + t^d f_d(\lambda_1, \dots \lambda_n)$$

On veut $f_1(\underline{\lambda}) = 0$ $\quad$ $d-1$ éq. homogènes en n variables

$\vdots$

$f_{d-1}(\underline{\lambda}) = 0$ $\quad \Longrightarrow \exists \underline{\lambda}$ $\quad \square$

Preuve du corollaire

Si par un point général de X ne passe pas une droite contenue dans X. Alors $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$$\mathbb{Z} = CH_0(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{i^*} CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \qquad L \cap X = \{x\}$$

$$L \longmapsto d \cdot x$$

coker (i^*) est annulé par d

$\Longrightarrow A_0(X)$ est annulé par d $\quad$ $\mathrm{Alb}_X = 0$

hyperface

Par Roitman, $A_0(X) = 0$.

$\square$

X projective lisse $/\mathbb{C}$

$$S^n X = X^n / S_n$$

$$\sigma_n : S^n X \times S^n X \longrightarrow A_0(X)$$
$$(a, b) \longmapsto a - b$$

__Prop.__ • les fibres de σ_n sont des réunions dénombrables de sous-variétés de $S^n X \times S^n X$

• $\exists\, Y \subset S^n X \times S^n X$ une réunion dénombrable de sous-variétés strictes telle que pour $y \notin Y$ $\dim \sigma_n^{-1}(\sigma_n(y))$ ne dépend pas de y

__Def.__ $\dim A_0(X) = \sup_n \{ \dim S^n X \times S^n X - \dim \sigma_n^{-1}(\sigma_n(y)) \}$ $\quad y \notin Y$

__Théorème__ (Mumford)

X surface $/\mathbb{C}$ (proj. lisse)

Si $H^0(X, \Omega^2) \neq 0$, alors $\dim A_0(X) = \infty$.

donc pas représentable

ce n'est pas un iso

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\ker \text{alb} \neq 0$

$$CH_0(U) \otimes \mathbb{Q} \neq 0 \quad \forall U \subset X \text{ dense}$$

<u>Exemple</u> : $X \subset \mathbb{P}^3$ surface de degré 4

C'est une surface K3 $\quad \dim A_0(X) = \infty$

$$(\Rightarrow A_0(X) \neq 0)$$

<u>Conjecture</u> (Bloch)

X surface$/\mathbb{C}$. Si $H^0(X, \Omega^2) = 0$, alors

alb est un isomorphisme.

$$F^0 CH_0(X) = CH_0(X)$$

$$F^1 CH_0(X) = A_0(X)$$

$$F^2 CH_0(X) = \ker(\text{alb})$$

$$F^i CH_0 / F^{i+1} CH_0 = 0 \underset{\text{conjecture}}{\Longleftrightarrow} H^0(X, \Omega^1) = 0$$

une filtration
qui vérifie ceci.

On conjecture que, sur $\overline{\mathbb{Q}}$, l'application alb
est toujours un iso.

<u>Remarque</u> : X surface K3 sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Alors $A_0(X) = 0$.

Preuve : $z \in Z_0(X)$, $\deg z = 0$

$\operatorname{supp} z \subset \underset{\text{courbe lisse}}{C} \subset X$ $\qquad$ $z \in \underset{\text{groupe de torsion}}{J(\overline{\mathbb{F}_p})}$

donc $z \in A_0(X)_{\text{tors}} \underset{\text{par Roitman}}{=} 0$ $\square$

Application du th. de Mumford

<u>Th</u> (Bloch, Murthy, Szpiro)

$\exists$ surface affine lisse $/\mathbb{C}$ ne se plongeant pas dans $\mathbb{A}^4$.

(on peut toujours plonger dans $\mathbb{A}^{2n+1}$)

analogue du th. de Whitney c'est <u>faux</u> !

C_1, C_2 courbes proj. lisses de genre ≥ 2

$S = C_1 \times C_2 \xrightarrow{p_i} C_i$

$z = p_1^* K_1 \cdot p_2^* K_2 \in Z_0(S)$

<u>Lemme</u>. $\exists (P_1, P_2) \in S$,

si $U = S \setminus (P_1 \times C_2) \cup (C_1 \times P_2)$

alors $z_{|U} \neq 0$ dans $CH_0(U)$.

<u>Th</u> de Mumford

$H^0(U, \Omega^2) \neq 0$.

k corps p-adique (ext. finie de $\mathbb{Q}_p$)

C courbe proj. lisse $/k$ $\quad C(k) \neq \emptyset$

$$A_0(C) = J(k) \simeq \mathbb{Z}_p^N \oplus (\text{fini})$$

groupe de Lie p-adique compact

En particulier, $A_0(C) = (\text{groupe } p\text{-divisible}) \oplus (\text{fini})$

$A_0(C)/n$ est fini pour tout n

$A_0(C)_{tors}$ est fini

<u>Théorème</u> (Saito – Sato, 2006)

X proj. lisse $/k$ p-adique (ou $k = \mathbb{Q}_p^{nr}$, $\underline{k = \mathbb{C}((t))}$)

$A_0(X)/n$ est fini si $(n,p)=1$ ($n=p$ on sait pas?) inconditionnelle

Sous une hypothèse du type "résolution de singularités",

$$A_0(X) = (p'\text{-divisible}) \oplus (\text{fini})$$

modèle rég. ayant fibre spéciale réduite à cnns.

<u>Théorème</u> (Asakura – Saito, 2007)
Sato, 2010

Il existe des surfaces lisses $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ de [illegible] degré 5 telles que $\forall \ell \neq p$, $A_0(X) \supset \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$
$\ell = p$

(la torsion n'est pas finie)

En <u>degré 4</u> ??

Comment détecter les 0-cycles ?

<u>Rappel</u> : k corps p-adique

$$\mathrm{inv} : \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$\uparrow$ th. de corps de classes locale

invariant fonctoriel

X schéma intègre

$$\boxed{\mathrm{Br}(X)} = \{\mathcal{O}_X\text{-alg. d'Azumaya}\}/\sim$$

$\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya : $\mathcal{O}_X$-algèbre (non comm.) loc. libre telle que $\forall x \in X$, $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)$ est une algèbre simple centrale sur $k(x)$.

<u>Accouplement</u>

X variété proj. lisse $/k$ p-adique

$$\mathrm{CH}_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\left(\sum n_P P, \mathcal{A}\right) \longmapsto \left\langle \sum n_P P, \mathcal{A} \right\rangle$$

où $\left\langle \sum n_P P, \mathcal{A} \right\rangle := \sum n_P \underbrace{\mathrm{inv}_{k(P)}(\mathcal{A} \otimes k(P))}_{\in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

seule méthode générale

Pour les courbes, $\mathrm{Br}\,\mathcal{X} = 0$ (Artin)

<u>Théorème</u> (Tate - Lichtenbaum)

$\langle\, , \rangle$ est non dégénéré des deux côtés si $\dim X = 1$.

<u>Théorème</u> (Colliot-Thélène, Saito, Sato)

Si X est une surface géométriquement rationnelle, l'accouplement

$$CH_0(X) \times \mathrm{Br}\, X / \mathrm{Br}\, \mathcal{X} \xrightarrow{\langle , \rangle} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est non dégénéré des deux côtés.

[$X/_k$, $\mathcal{X}/\mathcal{O}_k$ modèle régulier, $\mathrm{Br}\,\mathcal{X} \to \mathrm{Br}\, X$]

<u>Exemple</u> : $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = p t^3$$

Alors si $p \equiv 1 \pmod 3$, $A_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/3)^2$

$p \equiv 2 \pmod 3$, $A_0(X) \simeq \mathbb{Z}/3$

Si $p \equiv 1 \pmod 3$, $j \in \mathbb{Q}_p$ $(j^2 + j + 1 = 0)$. Soit A l'algèbre sur $k(X)$ engendrée par a, b tels que

$$a^3 = \frac{x + jy}{x+y}, \quad b^3 = p, \quad ab = j\, b a$$ (algèbre cyclique)

(α, β) : $H^1(k, \mathbb{Z}/3) \times H^1(k, \mu_3)$

symbole d'Hilbert

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, \mathbb{Z}/3) \times H^1(k, \mu_3) & & \\ \downarrow & & \| \\ & & k^*/k^{*3} \\ H^2(k, \mu_3) = {}_3\mathrm{Br}\, k & & \end{array}$$

$CH_0(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$

iso sur les corps finis
(Kato-Saito)