Exposé au Réga 14/11/2012 IHP

Orateur : FU Lie (ENS - Paris 6)

Autours des cycles algébriques : coniveau de Hodge et décomposition de la diagonale

Un objectif de géométrie algébrique est de comprendre les sous-variétés d'une variété algébrique donnée.

Rappelons que pour étudier les hypersurfaces (i.e. sous-variété de codimension 1), on étude leur combinaisons linéaires munies de certain relation d'équivalence, à savoir, les diviseurs et l'équivalence linéaire. On fera la même chose pour les sous variétés de codimensions supérieures :

- X : une variété algébrique $/k$ de dimension n (toujours supposée séparée, intègre, type fini sur un corps k)

- Pour chaque $0 \leq i \leq n$,

$$X_{(i)} := X^{(n-i)} := \text{l'ensemble des sous-variétés intègres de dimension } i \text{ de } X.$$

abélianiser

Def $$Z_i(X) := Z^{n-i}(X) := \mathbb{Z} \cdot X_{(i)} = \mathbb{Z} \cdot X^{(n-i)}$$

Le groupe des cycles algébriques de dimension i de X

Def (Équivalence rationnelle)

- $Z_i(X)_{rat}$ est le sous-groupe de $Z_i(X)$ engendré par des cycles algébriques de la forme suivante :

$$\nu_* \operatorname{div}(\nu^*\phi)$$

où
  - ϕ est une fonction rationnelle (non-nulle) sur une sous-variété W de dimension $(i+1)$ de X :

$$\phi \in K(W)^*, \quad W \in X_{(i+1)}$$

  - $\nu : \widehat{W} \to W$ la normalisation de W.
  - $\nu^*\phi$ est la fonction rationnelle ϕ vue comme une fonction rationnelle sur $\widehat{W}$.
  - $\operatorname{div}(\nu^*\phi)$ est le "diviseur" de la fonction $\nu^*\phi$ sur $\widehat{W}$

dre est bien-défini
$\widehat{W}$ est lisse
codimension 1

$$\operatorname{div}(\nu^*\phi) = \sum_{T \in \widehat{W}^{(1)}} \operatorname{ord}_T(\nu^*\phi) \cdot T$$

  - ν_* est l'image naïve (terme par terme).
    $\nu_*(T) = \deg(T/\nu(T)) \cdot \nu(T)$

$Z_i(X)_{rat}$ est appelé le sous groupe des i-cycles <u>rationnellement équivalents à zéro</u>.

Deux i-cycles $\gamma_1, \gamma_2 \in Z_i(X)$ sont dits <u>rationnellement équivalents</u> si $\gamma_1 - \gamma_2 \in Z_i(X)_{rat}$

- $CH_i(X) := CH^{n-i}(X) := Z_i(X) / Z_i(X)_{rat}$ <u>groupe de Chow</u>

- $CH_i(X)_{\mathbb{Q}} := CH^{n-i}(X)_{\mathbb{Q}} = CH_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = Z_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} / \underset{\mathbb{Q}\text{-rat}}{\sim}$

Exemple
- $CH^0(X) = \mathbb{Z}\cdot[X]$ ← la classe fondamentale de X
- $CH^1(X) = Z^1(X)/\underset{rat}{\sim} = \{\text{diviseurs de Weil}\}/\underset{\text{linéaire}}{\sim}$

$= Cl(X)$ "groupe des classes"

$\underset{X \text{ factorielle}}{\simeq} \operatorname{Pic}(X) := H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \dfrac{\{\text{diviseurs de Cartier}\}}{\sim \text{lin}}$

$= \dfrac{\{\text{fibrés en droite}\}}{\sim \text{isom}}$.

Propriétés fondamentales de CH

(1). (suite exacte de localisation)

Si $\underset{\text{fermée}}{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{j}{\hookleftarrow} \underset{\text{ouverte}}{U}$ complémentaires, alors

$CH_i(Z) \xrightarrow[i_*]{} CH_i(X) \xrightarrow[j^*]{} CH_i(U) \to 0$ est exacte.

(2) (Fonctorialités)

- $f: X \to Y$ propre $\Rightarrow$ $f_*: CH_i(X) \longrightarrow CH_i(Y)$
- $f: X \to Y$ l.c.i (c'est-à-dire $\exists$ factorisation $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{g} Y$ avec i plongement régulier, g morphisme lisse.)

$\Rightarrow$ $f^*: CH^i(Y) \longrightarrow CH^i(X)$

En particulier, si X, Y sont lisses, on a f^*.

(Puisque $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{\Gamma_f} X\times Y \xrightarrow{pr_2} Y$ est une factorisation avec Γ_f plongement régulier, pr_2 lisse)

- $f_{1*}\circ f_{2*} = (f_1\circ f_2)_*$; $f_1^*\circ f_2^* = (f_2\circ f_1)^*$.

(3) (Structure d'anneau : produit d'intersection)

Si X est <u>lisse</u>, $CH^*(X) := \bigoplus_{i=0}^{n} CH^i(X)$ est un anneau unitaire, commutatif, associatif, gradué :

$$\bullet : CH^i(X) \times CH^j(X) \longrightarrow CH^{i+j}(X)$$

Si $f: X \to Y$ morphisme entre deux variétés <u>lisses</u>

alors $f^*: CH^*(Y) \longrightarrow CH^*(X)$ est un morphisme d'anneaux.

i.e. $f^*(z_1 \cdot z_2) = f^*(z_1) \cdot f^*(z_2)$. $\forall z_1, z_2 \in CH^*(Y)$.

(4) (Formule de projection) $f: X \to Y$; X, Y : projectives lisses.

alors $\forall z_1 \in CH^*(X)$, $z_2 \in CH^*(Y)$,

$$f_*(f^*(z_2) \cdot z_1) = z_2 \cdot f_*(z_1)$$

Dans la suite, on suppose la variété X qu'on étude est ~~lisse~~ Projective lisse$/\mathbb{C}$

L'étude des sous variétés de $X \rightsquigarrow$ l'étude de $CH^*(X)$

Problème : $CH^*(X)$: l'anneau de Chow est un invariant mystérieux, difficile à calculer, parfois "énorme".

Idée : comparer $CH^*(X)$ avec autres invariants relativement faciles à calculer / mieux compris : la cohomologie.

Def X proj. lisse $/\mathbb{C}$

$$cl : CH^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \quad \text{"cohomologie de Betti"}$$
$$W \longmapsto [W] \text{ classe fondamentale.}$$
$$cl_{\mathbb{Q}} : CH^i(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

-clé L'application de classe, on souvent note $[\ ]$ pour simplicité.

Propriétés fondamentales (Compatibilités) :

(1) $[z_1 \cdot z_2] = [z_1] \cup [z_2]$.

(2) $[f^*(z)] = f^*([z])$; $[f_*(z)] = f_*([z])$.

(3) Def : Pour X, Y deux variétés projectives lisses, un cycle $\Gamma \in CH^*(X \times Y)$ est appelée une correspondance (algébrique) qui induit :

$$\Gamma_* : CH^*(X) \longrightarrow CH^*(Y)$$
$$z \longmapsto pr_{Y*}(pr_X^*(z) \cdot \Gamma)$$

analogue de transformés de Fourier-Mukai

$[\Gamma] \in H^{2*}(X \times Y)$ induit aussi

$$[\Gamma]_* : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$$
$$\alpha \longmapsto pr_{Y*}(pr_X^*(\alpha) \cup [\Gamma]).$$

Compatibilité : $[\Gamma_*(z)] = [\Gamma]_*([z])$

(aussi compatible avec transformés de F-M si on prend le "vecteur de Mukai")

Questions :

Q1 : Quelle est l'image de $cl : CH^i(X) \to H^{2i}(X,\mathbb{Z})$
— — — — — — — — — de $cl_{\mathbb{Q}} : CH^i(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2i}(X,\mathbb{Q})$?

Autrement-dit, comment peut-on détecter les classes "algébriques" parmi les classes d'un objet de nature transcendante ?

Q2 : Comment $CH^*(X)$ contrôle $H^*(X)$?

Q3 : Comment $H^*(X)$ contrôle $CH^*(X)$?

Exemple/Motivation (diviseurs : $CH^1(X)$)

X : projective lisse $/\mathbb{C}$, $CH^1(X) = \mathrm{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$

Par la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$

$\rightsquigarrow$ suite exacte longue : $0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X) \to \cdots$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[dr] & & H^2(X,\mathcal{O}_X) \\ & H^2(X,\mathbb{C}) \arrow[ur] \arrow[d, equal] & \\ & H^2(X,\mathcal{O}_X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^0(X,\Omega_X^2) & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \dfrac{H^1(X,\mathcal{O}_X)}{H^1(X,\mathbb{Z})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] & NS(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*)$$

variété abélienne

groupe (discret) de type fini.

onse Q 1 : $\mathrm{Im}\left(cl : CH^1(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \right)$ sont les classes entières de type (1,1).

(Théorème de Lefschetz sur (1,1)-classes)

ponse Q 2 : par exemple : si Pic(X) est discret, alors $H^1(X,\mathbb{Z})=0$

éponse Q3 : ⊛ contrôle Pic(X) par $H^2(X)$ et $H^1(X)$ munies de ses décompositions de Hodge.

Idée : Pour répondre Q1 ~ Q3, il faut tenir compte de la structure supplémentaire naturelle sur la cohomologie : la structure de Hodge.

(Pour une variété définie sur un corps de nombre / corps fini, la structure naturelle est la representation galoisienne)

Def (structure de Hodge)

Une $\left|\begin{array}{l}\mathbb{Z}- \\ \mathbb{Q}- \\ \mathbb{R}-\end{array}\right.$ <u>structure de Hodge (pure, effective) de poids k</u>

est un $\left|\begin{array}{l}\text{groupe de type fini} \\ \mathbb{Q}- \\ \mathbb{R}- \text{ espace vectoriel de dim} < \infty\end{array}\right.$ H, tel que

$$H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q \geq 0}} H^{p,q} \quad \text{avec} \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Un <u>morphisme</u> φ entre deux structures de Hodge H_1, H_2 de poids $k-2c$ et k respectivement, est un morphisme $\begin{array}{l}\mathbb{Z}- \\ \mathbb{Q}- \\ \mathbb{R}-\end{array}$ linéaire

$$\varphi : H_1 \longrightarrow H_2 \quad \text{, tel que}$$

$$\varphi_{\mathbb{C}}(H_1^{p,q}) \subseteq H_2^{p+c,q+c}, \quad \forall\ p+q=k,\ p,q \geq 0.$$

<u>Examples</u> :

- <u>Thm de Hodge</u> : X compacte kählérienne (en particulier, pour les variétés proj. lisses.)

  $H^k(X, \begin{smallmatrix}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Q} \\ \mathbb{R}\end{smallmatrix})$ est une $\begin{smallmatrix}\mathbb{Z}- \\ \mathbb{Q}- \\ \mathbb{R}-\end{smallmatrix}$ structure de Hodge de poids k

  avec $H^{p,q}(X) = \left\{ \alpha \in H^k(X, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha \text{ est représentable par} \\ \text{une forme fermée de type } (p,q)\end{array} \right\}$

  $$\simeq H^q(X, \Omega_X^p)$$

- $f : X \longrightarrow Y$ morphisme holomorphe entre deux variétés kählériennes compactes

  alors $f_* : H^*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$

  $f^* : H^*(Y, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$

  sont des morphismes de structures de Hodge.

- $\Gamma \in CH^*(X \times Y)$ correspondences algébrique, alors

  $[\Gamma]_* : H^*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$ est un morphisme de SH.

Def: si un morphism de SH est induite par une correspondence algébrique, on dit qu'il est <u>algébrique</u>.

- (Objets de Tate) $c \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Q}(c) = (2\pi i)^c \cdot \mathbb{Q}$$ et la decomposition est concentrée au bidegré $(-c,-c)$

Donc $\mathbb{Q}(c)$ est une structure de Hodge de poids $-2c$

- $H_1 \otimes_{\mathbb{Q}} H_2$, H^* , $H(c) := H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(c)$

Def: (classes de Hodge).

- $H^{2k}_{\mathbb{Z}}$: $\mathbb{Z}$-structure de Hodge de poids $2k$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hdg}^{2k}_{\mathbb{Z}} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H^{2k}_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\ H^{k,k} \arrow[r, hook] & H^{2k}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

"<u>classes de Hodge entières</u>"

- $H^{2k}_{\mathbb{Q}}$: $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poids $2k$

$$\mathrm{Hdg}^{2k}_{\mathbb{Q}} := H^{2k}_{\mathbb{Q}} \cap H^{k,k} \quad \text{dans } H^{2k}_{\mathbb{C}}.$$

"<u>classes de Hodge rationnelles</u>"

Example: Thm de Lefschetz (1,1)-classes:

$$\mathrm{Im}\,(cl : CH^1(X) \to H^2(X,\mathbb{Z})) = \mathrm{Hdg}^2_{\mathbb{Z}}(X)$$

Pour Q 1 :

On a toujours $\begin{cases} \mathrm{Im}\left(cl_{\mathbb{Q}} : CH^k(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2k}(X,\mathbb{Q})\right) \subseteq Hdg^{2k}_{\mathbb{Q}}(X) \\ \mathrm{Im}\left(cl : CH^k(X) \to H^{2k}(X,\mathbb{Z})\right) \subseteq Hdg^{2k}_{\mathbb{Z}}(X) \end{cases}$.

(Raison : une forme différentielle de degré $(2n-2k)$ a l'intégrale sur une sous-variété de codim k non-nulle $\Rightarrow$ elle est du type $(n-k, n-k)$)

Question (Hodge) A-t-on une égalité ci-dessus ?

Réponse : Non. contre-exemples :

* Atiyah - Hirzebruch
* Totaro
* Kollár

⋮

Conjecture (Hodge)

$$\mathrm{Im}\left(cl_{\mathbb{Q}} : CH^k(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2k}(X,\mathbb{Q})\right) = Hdg^{2k}_{\mathbb{Q}}(X).$$

Autrement-dit, toute classes de Hodge rationnelle est algébrique.

Cas connus :

(1) diviseurs $(k=1)$

(2) conjecture de Hodge pour H^{2i} $\Longrightarrow$ conj. de Hodge pour H^{2n-2i}

par Lefschetz difficile.

Donc $k=n-1$, (et toute variété de dim ≤ 3)

(3) Variété avec une décomposition cellulaire

G/P, où G est un groupe linéaire algébrique$/\mathbb{C}$
P est un sous-groupe parabolique.

ex : $\mathbb{P}^n$, $Gr(r,N)$, variété des drapeaux, ---

(Raison : $CH^* \simeq H^{2*}$)

(4) hypersurface cubique (lisse) dans $\mathbb{P}^5$ (Zucker)

<u>Démonstration</u> (Beauville-Donagi) $X \subseteq \mathbb{P}^5$ cubique lisse.

Le seule degré intéressant de $\deg = 4$

$F := \{ \ell \in Gr(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \mid \ell \subset X \}$,

P = la droite universelle $:= \{ (\ell, x) \in F \times X \mid x \in \ell \}$

on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & X \\ F \end{tikzcd}$$

<u>Beauville-Donagi</u> : $\varphi := p_* \circ q^* : H^4(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^2(F, \mathbb{Q})$ isom. (de HS)

$\psi := q_* \circ p^* \circ g^2 \quad : H^2(F, \mathbb{Q})_{prim} \xrightarrow{\simeq} H^4(X, \mathbb{Q})_{prim}$ isom. (de HS)

où g est la polarisation Plücker sur F.

<u>algèbre linéaire</u> :

$\psi \circ \varphi$ est un auto-morphisme de $H^4(X, \mathbb{Q})$,

donc $(\psi \circ \varphi)^{-1}$ peut s'écrire comme un polynôme de $\psi \circ \varphi$:
$(\psi \circ \varphi)^{-1} = Q(\psi \circ \varphi)$.

$\Rightarrow \quad \varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi)^{-1} \circ \psi = Q(\psi \circ \varphi) \circ \psi$ est algébrique !

Pour $\forall \alpha \in Hdg^4_{\mathbb{Q}}(X)$, $\varphi(\alpha) \in Hdg^2_{\mathbb{Q}}(F)$ donc est la classe d'un diviseur : $\varphi(\alpha) = [D]$

$\Longrightarrow \quad \alpha = \varphi^{-1}([D])$ est aussi algébrique.

algébrique algébrique

(4)

$\Uparrow$ X est Fano, $CH_0(X) = \mathbb{Z}$. $\square$

(5). Si $\exists$ un sous ensemble algébrique fermé Y de $\dim \leq 3$ dans X tel que $CH_0(Y)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$

alors la conjecture de Hodge de degré 4 pour X est vraie.

<u>Dém</u>. (Bloch-Srinivas) on utilise la décomposition de la diagonale.

Conséquences de la conjecture de Hodge

(1) soient X, Y deux variété projectives lisses,
$\varphi : H^{k-2c}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{Q})$ est un morphisme
de structures de Hodge (de bidegré (c,c)),
alors φ est <u>algébrique</u>, i.e. $\exists\, \Gamma \in CH^{\dim X + c}(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$
tel que $\varphi = [\Gamma]_*$.

Puisqu'on a le lemme élémentaire suivant :

Lemme : $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ une application linéaire entre deux structures de Hodge
alors φ est un morphisme de structures de Hodge
si et seulement si φ vu comme un élément dans la structure de Hodge $H_1^* \otimes H_2$ est une classe de Hodge.

En particulier,

(2) <u>Conjecture Standard</u>

Soit X^n une variété projective lisse, L une polarisation.
alors $\varphi : H^{n+k}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\simeq]{(\cup c_1(L)^k)^{-1}} H^{n-k}(X, \mathbb{Q})$ est algébrique.
où φ est l'inverse de l'isomorphisme de Lefschetz difficile.

<u>Rq</u> : Il y a plusieurs versions de cette conjecture, cf. Kleiman.

Analogue —— Conjecture de Tate

Soit X une variété projective lisse $/ k = \mathbb{F}_q$, $q = p^r$,
ou k : corps de nombre

$G := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ groupe de Galois absolu de k.

Action : $G \circlearrowright H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$ continûment

On a toujours

$$\mathrm{Im}\left(cl : CH^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \right) \subseteq H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))^G$$

Conjecture (Tate) c'est une égalité.

Cas connus :

(1) diviseurs dans une variété abélienne (Tate-Zarhin / Faltings)

(2) variété de la forme G/P : $CH^* \simeq H^{2*}$

(3) Surfaces K3 ($p \geq 5$) (Charles)

Pour Q2 : (Contrôler H^* par CH^*)

Thm (Étaler l'équivalence rationnelle) [Bloch-Srinivas]

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme plat entre deux variétés quasi-projectives / $\mathbb{C}$. ← (L'hypothèse que le corps de base est $\mathbb{C}$ est cruciale, la conclusion n'est plus vraie sur un corps dénombrable $\overline{\mathbb{Q}}$ par exemple.)

Soit $Z \in CH^k(X)$ un cycle,

Si pour tout point très général $y \in Y$, on a

$$Z_y := Z|_{X_y} = 0 \quad \text{dans } CH^k(X_y), \quad \text{où } X_y = f^{-1}(y).$$

alors il existe un ouvert U de Y, tel que

$$m Z|_{f^{-1}(U)} = 0 \quad \text{dans } CH^k(f^{-1}(U)), \quad \text{pour un } m \in \mathbb{N}_+.$$

Pf: Par un argument de schéma d'Hilbert, on trouve que $\{y \in Y \mid Z_y = 0 \text{ in } CH^k(X_y)\}$ est une réunion dénombrable de sous-variétés fermées de Y.

Par le théorème de Baire, cet ensemble contient un ouvert s'il contient tout point très général, on peut supposer que l'hypothèse est vérifiée pour tout point $y \in Y$.

Puis, on fait le même argument de schéma d'Hilbert et le théorème de Baire. (Voir les détails dans [Voisin])

□

Conséquence :

Thm (Décomposition de la diagonale I)

Soit X une variété projective lisse$/\mathbb{C}$, soit $Y \subset X$ sous ensemble algébrique fermé de X.

Si les 0-cycles de X sont supportés sur Y : $CH_0(Y) \overset{i_*}{\twoheadrightarrow} CH_0(X)$ surjectif

alors $\exists\, m \in \mathbb{N}_+$, et une décomposition :

$$m\Delta_X = Z_1 + Z_2 \quad \text{dans} \quad CH_n(X \times X)$$

où Z_1 supporté sur $Y \times X$

Z_2 supporté sur $X \times D$ pour un $D \subsetneq X$ sous-ensemble alg. fermé de codim ≥ 1.

Preuve : On applique le thm de Bloch–Srinivas à

$$\begin{array}{c} X \times X - Y \times X \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ X \end{array}$$

$(\Delta_X)_x = x = 0$ dans $CH_0(X-Y)$. $\left(CH_0(Y) \twoheadrightarrow CH_0(X) \to \underset{\overset{\|}{0}}{CH_0(X-Y)} \to 0 \right)$

$\overset{\text{thm}}{\Longrightarrow} \quad m \cdot \Delta_X|_U = 0$ dans $CH_n((X-Y)\times U)$, $U \hookrightarrow X$ ouvert

$D := X - U$

$\Rightarrow CH_n(Y\times X \cup X \times D) \to CH_n(X \times X) \to CH_n((X-Y)\times U) \to 0$.

$$m\Delta_X \longmapsto 0$$

$\Rightarrow m\Delta_X = Z_1 + Z_2$ de la forme dans l'Énoncé. $\square$

Cor (théorème de Mumford I)

X proj. lisse $/\mathbb{C}$, $\dim X = n$. $Y \subset X$ sous-ensemble fermé de codimension $\geq c$

Si $CH_0(Y) \xrightarrow{i_*} CH_0(X)$ surjectif

alors $H^{n,0}(X) = H^{n-1,0}(X) = \cdots = H^{n-c+1,0}(X) = 0$.

Preuve : thm $\Rightarrow$ $m\Delta_X = Z_1 + Z_2$ dans $CH_n(X \times X)$

où : $Z_1 \subset Y \times X$, $Z_2 \subset X \times D$, $D \subsetneq X$ fermé.

$\forall \alpha \in H^{k,0}(X)$, $k \geq n-c+1$

$$m\alpha = m[\Delta_X]_*(\alpha) = [Z_1]_*(\alpha) + [Z_2]_*(\alpha)$$

$$= [Z_1]_*(\alpha|_Y) + i_{D_*}([Z_2]_*(\alpha))$$

Mais. $\alpha|_Y = 0$ puisque $\dim Y \leq n-c < k \Rightarrow H^{k,0}(Y) = 0$.

- $i_{D_*} : H^{k-2}(D) \longrightarrow H^k(X)$ a pour l'image contenue dans $H^{1,k-1}(X) \oplus \cdots \oplus H^{k-1,1}(X)$

$\Rightarrow i_{D_*}([Z_2]_*(\alpha)) \in H^{k,0}(X)$ est nul.

Donc $m\alpha = 0$.

$\square$

Rq : Dans la démonstration, on n'était pas assez rigureux : Y, D ne sont pas lisses et irréductibles en général. Mais on peut prendre une désingularisation pour chaque composante irréductible de Y et D, et prendre des cycles sur la désingularisation, tel que les poussés en avant de ces cycles ~~sont~~ exactement Z_1 ~~et~~ Z_2, et puis on fait le même argument sur $\tilde{D}$ et $\tilde{Y}$ au lieu de D et Y. On va omettre cette procédure dans la suite.

La réciproque est :

3) <u>Conjecture</u> (Bloch I) X une variété proj. lisse $/\mathbb{C}$. de dimension n.

Si $H^{n,0}(X) = \cdots = H^{n-c+1,0}(X) = 0$
alors $CH_0(X)$ est supporté sur un sous-ensemble algébrique fermé de codimension $\geq c$.

Pour {résumer / généraliser} les thm./conj. précédents, on introduit la notion de <u>coniveau</u> :

Def : Soit H une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poids k (pure, effective)
si dans la decomposition $H^{k,0} = \cdots = H^{k-c+1,c-1} = 0$,
on dit que H est de coniveau $\geq c$

$$H^{p,q} : \quad \underbrace{0 \cdots 0\,0\,0}_{c} \quad \boxed{} \quad \underbrace{0\,0\,0 \cdots 0}_{c}$$

<u>Exemple</u> : • <u>thm Mumford I</u> : si $CH_0(X)$ est supporté sur un sous-ensemble de codim $\geq c$, alors $H^n(X), \ldots, H^{n-c+1}(X)$ sont de coniveau ≥ 1.

• Toute la cohomologie de degré $\neq 0, 2n$ est de coniveau ≥ 1 pour une variété de Fano.

(<u>Raison</u> : $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $0 < i \leq n$, par le théorème d'annullation de Kodaira.)

Rq : Dans ce cas de Fano, la conjecture de Bloch pour coniveau 1 est trivialement vraie : $CH_0(X) = \mathbb{Z}$ en fait, parceque une variété de Fano est rationnellement connexe.

On peut itérer :

Thm (Décomposition de la diagonale II)

Soit X une variété projective lisse $/\mathbb{C}$ de dimension n.
Si on a des sous-ensembles algébriques fermés $Y_0, \dots, Y_n$ de X tels que $CH_i(X)$ est supporté sur Y_i, $\forall 0 \leq i \leq n$.
alors $\exists\, m \in \mathbb{N}_+$ et une décomposition de la diagonale

$$m\Delta_X = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n \quad \text{dans } CH_n(X \times X)$$

où Z_i est un n-cycle supporté sur $Y_i \times W_i$ avec W_i un sous-ensemble fermé de codimension $\geq i$

Dém : (1) $CH_0(Y_0) \twoheadrightarrow CH_0(X)$ implique :

$$m_0\Delta_X = Z_0 + Z_1' \quad \text{dans } CH_n(X \times X)$$

où $Z_0 \subset Y_0 \times X$, $W_0 := X$

$Z_1' \subset X \times W_1$, $W_1 \subset X$, $\operatorname{codim}_X(W_1) \geq 1$.

(2) On peut voir Z_1' comme une famille de 1-cycle de X paramétrisée par W_1.

Donc $CH_1(Y_1) \twoheadrightarrow CH_1(X)$ implique :

$$m_1 Z_1' = Z_1 + Z_2' \quad \text{dans } CH_n(X \times W_1)$$

où $Z_1 \subset Y_1 \times W_1$

$Z_2 \subset X \times W_2$, $W_2 \subset W_1$, $\operatorname{codim}_{W_1}(W_2) \geq 1$
($\Rightarrow \operatorname{codim}_X(W_2) \geq 2$)

$\vdots$

(n) $$m\Delta_X = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n \quad \text{dans } CH_n(X \times X)$$

où $m = m_0 m_1 \cdots m_n$.

et $Z_i \subset Y_i \times W_i$ $\quad \operatorname{codim} W_i \geq i$. $\square$

<u>Rq</u> : Le cas particulier où $\dim Y_i \leq i$ ($\forall 0\leq i\leq n$) est démontré par Paranjape, Laterveer...

<u>Cor</u> (Théorème de Mumford II)

Soit X une variété projective lisse $/\mathbb{C}$ de dimension n.

Si $CH_i(X)$ est supporté dans un sous-ensembles fermé de dimension d_i, $\forall 0\leq i\leq n$,

alors on a l'annulation de groupes de Hodge :

$$H^{p,q}(X)=0 \qquad \text{pour} \quad \forall p>\max\{d_0,\cdots,d_q\}$$

<u>Cor</u> En particulier, si $d_i = i$ $\forall 0\leq i\leq c-1$ pour un $c\in\mathbb{N}_+$,

(par exemple, si $CH_i(X)_{hom,\mathbb{Q}}=0$ $\forall i$)

alors $H^k(X,\mathbb{Q})^{\perp alg}$ est de coniveau $\geq c$. pour tout $0\leq k\leq 2n$.

La réciproque

(Q3) Conj (Bloch II) X proj. lisse$/\mathbb{C}$ de dim n. Si $H^k(X,\mathbb{Q})^{\perp alg}$ est de coniveau $\geq c$ pour tout k,

alors $CH_j(X)_{\mathbb{Q},hom}=0$ $\forall\, 0\leq j\leq c-1$.

Cas de surfaces (Bloch) S surface projective lisse$/\mathbb{C}$.

Si $H^{2,0}(S)=0$, alors $CH_0(S)_{hom} \xleftarrow{\simeq} Alb(S)$.

Cas connus (surface) :
- Surfaces de dimension de Kodaira ≤ 1.
- certains surfaces de type général. (Voisin)
- Conséquence de la conjecture de Nilpotence de Voevodsky.

Cas connus (général)
- variété de Fano ($c=1$)
- Équivalente à la conj. de Hodge généralisée pour intersections complètes générales, admettant la conjecture standard (Voisin)

Généralisation de la conjecture de Hodge

X = variété projective lisse$/\mathbb{C}$ de dimension n

Rappel : Soit $Y \subseteq X$ un sous-ensemble algébrique fermé on a une suite exacte longue :

$$\to H^{k-1}(X-Y,\mathbb{Q}) \to H^k_Y(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X-Y,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{k+1}_Y(X,\mathbb{Q}) \to \cdots$$

où $H^k_Y(X,\mathbb{Q}) := H^k(X, i_* i^! \underline{\mathbb{Q}}_X)$, $i : Y \hookrightarrow X$

Def : on dit qu'une classe de cohomology $\alpha \in H^k(X,\mathbb{Q})$ est supportée sur Y, si α est dans l'image de l'application

$$H^k_Y(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Q}).$$

ou de manière équivalente, si α est dans le noyau de

$$H^k(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X-Y,\mathbb{Q}).$$

Sur $H^k(X,\mathbb{Q})$ on a deux "filtrations de coniveau"

(1) $$N^c H^k(X,\mathbb{Q}) := \sum_{\substack{Y\subset X \\ \operatorname{codim} Y = c}} \operatorname{Im}\left(H^k_Y(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H^k(X,\mathbb{Q})\right)$$

$$= \sum_{\substack{Y\subset X \\ \operatorname{codim} Y = c}} \ker\left(H^k(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{j^*} H^k(X-Y,\mathbb{Q})\right)$$

Rq : $H^k_Y(X,\mathbb{Q})$ et $H^k(X-Y,\mathbb{Q})$ sont des structures de Hodge mixtes, i_* et j^* sont des morphismes des structures de Hodge mixtes.

$\Rightarrow$ $N^c H^k(X,\mathbb{Q})$ est une sous-structure de Hodge (pure) de $H^k(X,\mathbb{Q})$.

(2) $N^c_{Hdg} H^k(X,\mathbb{Q}) := \sum\limits_{\substack{L \subset H^k(X,\mathbb{Q}) \\ \text{sous structure} \\ \text{de Hodge de} \\ \text{coniveau} \geq c}} L$

On a toujours $N^c H^k(X,\mathbb{Q}) \subseteq N^c_{Hdg} H^k(X,\mathbb{Q})$.

<u>Conjecture</u> (Hodge-Grothendieck) c'est une égalité :

$$N^c_{Hdg} H^k(X,\mathbb{Q}) = N^c H^k(X,\mathbb{Q})$$

plus concretement, pour toute sous-structure de Hodge L de $H^k(X,\mathbb{Q})$, si coniveau de L est $\geq c$, alors L est supportée sur un sous-ensemble fermé Y de codim $\geq c$.

$$L \subset \ker\left(H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^k(X-Y,\mathbb{Q})\right)$$

Si on note $F^\cdot$ pour la <u>filtration de Hodge</u> de $H^k(X,\mathbb{C})$:

$$F^c H^k(X,\mathbb{C}) := \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p \geq c}} H^{p,q}(X)$$

$$\bar{F}^c H^k(X,\mathbb{C}) := \overline{F^c H^k(X,\mathbb{C})} = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ q \geq c}} H^{p,q}(X)$$

On a toujours

$$N^c H^k(X,\mathbb{C}) \subseteq N^c_{Hdg} H^k(X,\mathbb{C}) \subseteq F^c H^k(X,\mathbb{C}) \cap \bar{F}^c H^k(X,\mathbb{C})$$

Hodge a posé la question si $N^c H^k(X,\mathbb{C}) \overset{?}{=} F^c \cap \bar{F}^c H^k(X,\mathbb{C})$

Mais Grothendieck a remarqué que ceci ne peut pas être vrai car $F^c \cap \bar{F}^c$ n'est pas une sous-structure de Hodge en général, mais $N^c H^k(X,\mathbb{C})$ l'est. cf. Grothendieck : "The general Hodge conj is false for trivial reasons"

<u>Exemple</u> : La conjecture de Hodge est le cas spécial

$$\begin{cases} H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \\ c = k \end{cases}$$

Car une classe de Hodge est la même chose qu'une sous structure de Hodge de coniveau $=k$; et supportée sur un sous-ensemble de codimension k est la même chose que une combinaison linéaire des classes fondamentales des composantes de ce sous-ensemble.

•

<u>Prop</u> (Gap entre la conjecture de Hodge et sa généralisée)
Soit X une variété projective lisse $/\mathbb{C}$ de dim n.
Soit $L \subseteq H^k(X, \mathbb{Q})$ une sous structure de Hodge de coniveau c
($\Rightarrow L(c)$ est aussi une structure de Hodge effective de poids $k-2c$)
Si $L(c)$ peut se réaliser comme une sous structure de Hodge de $H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q})$ pour certaine variété projective lisse Y, alors la conjecture de Hodge (usuelle) pour $X \times Y$ implique que L est supportée sur un sous-ensemble de codim $\geq c$ de X.

<u>Dém</u> : Soit $L(c) \subset H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q})$ est une sous-structure de Hodge.
Comme $H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q})$ est polarisable, $L(c)$ est un facteur direct de $H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q})$; on a donc une projection de structures de Hodge

$$H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow L(c).$$

On compose : $\varphi : H^{k-2c}(Y, \mathbb{Q})(-c) \twoheadrightarrow L \hookrightarrow H^k(X, \mathbb{Q})$ est un morphisme de structures de Hodge.

La conj. de Hodge usuelle pour $Y \times X$

$\Rightarrow$ φ est <u>algébrique</u> : i.e. $\exists\, \Gamma \in CH^{\dim Y + c}(Y \times X)$

tq $\varphi = [\Gamma]_*$

$\Rightarrow$ $L = \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}([\Gamma]_*)$ supportée sur $pr_2(\Gamma)$

qui est un sous-ensemble de dimension $\leq \dim X - c$

$\square$.

Cas connus

- cas connus pour la conjecture de Hodge usuelle.
- certains cas de variété abélienne (Abdulali)
- <u>Thm</u> (Voisin) Admettant la conjecture standard, alors la conjecture de Bloch généralisée est equivalente à la conjecture de Hodge généralisée pour une intersection complète générale dans l'espace projectif.

  <u>Exemple</u> : Intersection complète de Fano satisfait

  $$H^{k,0}(X)=0 \quad \forall\, 1\leq k\leq n$$

  - $CH_0(X)=\mathbb{Z}$ (car X est rationnellement connexe)
  - $H^n(X,\mathbb{Q})$ est supportée sur un diviseur (par décomposition de la diagonale)
- <u>Thm</u> (F) $\gamma\in H^{2k}(X,\mathbb{Q})$ une classe de cohomologie <u>grosse</u> alors $\ker(\cup\gamma : H^{n-k}(X,\mathbb{Q})\longrightarrow H^{n+k}(X,\mathbb{Q}))$ est supportée sur un diviseur de X, admettant la conjecture standard.

Analogue : conjecture de Tate généralisée

X projective lisse $/ k = \mathbb{F}_q$, $q = p^r$

Def $L \subset H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sous-représentation galoisienne.

est de coniveau (de Tate) $\geq c$

si les valeurs propres de Frobenius géométrique sur $L(c)$ sont des entiers algébriques.

- $$N^c H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) := \sum_{\substack{Y \subset X \\ \mathrm{codim} \geq c}} \mathrm{Im}\left(H^i_{Y_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

$$= \sum_{\substack{Y \subset X \\ \mathrm{codim}\, Y \geq c}} \mathrm{Ker}\left(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X_{\bar{k}} - Y_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

$$N^c_{\mathrm{Tate}} H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) := \sum_{\substack{L \subset H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \text{sous représentation} \\ \text{de coniveau} \geq c}} L$$

On a toujours $N^c H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \subseteq N^c_{\mathrm{Tate}} H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$

Conj (Tate généralisée)

$$N^c H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = N^c_{\mathrm{Tate}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Q3 H^* contrôle CH^* ?

Motivation : X = proj. lisse$/\mathbb{C}$ de dimension n.

- $cl_{\mathbb{Q}} : CH^k(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^{2k}(X,\mathbb{Q})$

$$0 \to CH^k(X)_{\mathbb{Q},hom} \to CH^k(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Hdg^{2k}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{?} 0$$

- $AJ : CH^k(X)_{\mathbb{Q},hom} \longrightarrow J^{2k-1}(X)_{\mathbb{Q}} := \dfrac{\bigoplus_{p\geq k,\, p+q=2k-1} H^{p,q}(X)}{H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$\ker(AJ) = ?$

Question : $CH^k(X)_{\mathbb{Q}}$ est une extension sucessive des objets reliés aux structures de Hodge sur la cohomologie ?

Conjecture (Bloch-Beilinson)

Pour chaque variété complexe projective lisse X, et pour tout $0 \leq j \leq \dim X$, $CH^j(X)_{\mathbb{Q}}$ admet une filtration $F^\bullet$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(1). $F^0 CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = CH^j(X)_{\mathbb{Q}}$

$F^1 CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = CH^j(X)_{\mathbb{Q},hom} := \ker(cl_{\mathbb{Q}} : CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2j}(X,\mathbb{Q}))$

(Idéalement :

$F^2 CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = \ker(AJ_{\mathbb{Q}} : CH^j(X)_{\mathbb{Q},hom} \to J^{2j-1}(X)_{\mathbb{Q}})$)

(2) $F^s CH^i(X)_{\mathbb{Q}} \cdot F^r CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \subseteq F^{s+r} CH^{i+j}(X)_{\mathbb{Q}}$

(3) (Fonctorialité) $f : X \to Y$

$f_*(F^r CH(X)_{\mathbb{Q}}) \subseteq F^r CH(Y)_{\mathbb{Q}}$

$f^*(F^r CH(Y)_{\mathbb{Q}}) \subseteq F^r CH(X)_{\mathbb{Q}}$

Plus généralement, $F^\bullet$ est préservée par les correspondances algébriques

(4) (Finitude) $F^r CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = 0$ pour $r \gg 0$

(Idéalement, $F^{j+1} CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = 0$)

(5) $Gr_F^r CH^j(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\Gamma_*} Gr_F^r CH^{j+c}(Y)_{\mathbb{Q}}$ est nul

si $[\Gamma]_* : H^{2j-r}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2j+2c-r}(Y,\mathbb{Q})$ est nul sur $H^{0,2j-r}(X), \dots, H^{j-r,j}(X)$

où $\Gamma \in CH^{\dim X + c}(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$ est une correspondence algébrique.

Cas particulier de (5) :

(Q3) Si $H^{2j-r}(X,\mathbb{Q})$ satisfait $H^{0,2j-r}(X) = \cdots = H^{j-r,j}(X) = 0$

alors $Gr_F^r CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = 0$.

Version motivique :

- DM : la catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques

  par exemple, $DM_{gm}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}$ de Voevodsky.

- τ : une t-structure motivique sur DM

  $MM := DM^{\leq 0} \cap DM^{\geq 0}$ le cœur

  La catégorie abélienne des motifs mixtes.

  (idéalement : $D^b(MM) \simeq DM$)

$$\begin{tikzcd}
SmProj^{op} \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"] & Sm^{op} \arrow[d, "M^\vee"] \\
CHM \arrow[r, hook] \arrow[d] & DM_{gm} \arrow[d, "\bigoplus_i {}^\tau\mathcal{H}^i"] \\
NM \arrow[r, hook] & MM
\end{tikzcd}$$

$$M^\vee(X) = \bigoplus_i h^i(X)[-i]$$

- ${}^\tau\mathcal{H}^0 := \tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$, ${}^\tau\mathcal{H}^p := {}^\tau\mathcal{H}^0 \circ [p]$

Suite spectrale de "hypercohomologie motivique"

Pour tout $M \in DM$, on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, {}^{\tau}\mathcal{H}^q(M)[p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M[p+q])$$

- $$CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = H^{2j}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) := \mathrm{Hom}_{DM}(M(X), \mathbb{Q}(j)[2j])$$
$$= \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)^* \otimes \mathbb{Q}(j)[2j])$$
$$= \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)(n)[-2n] \otimes \mathbb{Q}(j)[2j])$$
$$= \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)(j-n)[2j-2n])$$

La suite spectrale <u>dégénère en E_2</u> pour $M = M(X)(r)$, $X \in SmProj/\mathbb{C}$

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, {}^{\tau}\mathcal{H}^q(M(X)(r))[p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)(r)[p+q])$$

[Fil]tration F^ν sur $\mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)(r)[p+q])$ induite par la filtration

$\tau_{\leq \nu}$ sur $M(X)(r)$

$$\Rightarrow \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, M(X)(r)[p+q]) = E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, {}^{\tau}\mathcal{H}^q(M(X)(r))[p])$$

- Prenons $p := \nu$, $r := j-n$, $q := 2j-2n-\nu$

$$\Rightarrow \mathrm{Gr}_F^\nu CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, {}^{\tau}\mathcal{H}^{2j-2n-\nu}(M(X)(j-n))[\nu])$$

Or $\quad M(X)^* = \bigoplus_{i=0}^{2n} h^i(X)[-i]$

$$\Rightarrow \quad M(X) = M(X)^*(n)[2n] = \bigoplus_{i=0}^{2n} h^i(X)(n)[2n-i]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^{2j-2n-\nu}(M(X)(j-n)) = h^{2j-\nu}(X)(j)$$

$\Rightarrow$ <u>Beilinson formule</u> :

$$Gr_F^\nu CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = Hom_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2j-\nu}(X)(j)[\nu])$$

$$\underset{\text{si } D^b(MM)=DM}{=\!=} Ext^\nu_{MM}(\mathbb{Q}, h^{2j-\nu}(X)(j))$$

<u>conj</u> : $\forall X$, $\exists F^\bullet$ sur $CH^*(X)_{\mathbb{Q}}$, tq

(1) ———
(2) ———
(3) ———
(4) ———
(5)' $Gr_F^\nu CH^j(X)_{\mathbb{Q}}$ est contrôlé par le motif $h^{2j-\nu}(X)$

Plus précisément, $Gr_F^\nu CH^j(X)_{\mathbb{Q}} = Hom_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2j-\nu}(X)(j)[\nu])$

$$\underset{D^b(MM)=DM}{=\!=} Ext^\nu_{MM}(\mathbb{Q}, h^{2j-\nu}(X)(j))$$

admettant la conjecture standard.

Prop : Admettant la conjecture de Hodge généralisée, Conj Bloch-Beilinson implique Conj de Bloch

Dém : On démontre pour Conj. de Bloch II,

Si $H^i(X)^{\perp alg}$ est de coniveau de Hodge $\geq c$, $\forall i$

$\xRightarrow{\text{Conj Hodge}}$ $H^i(X)^{\perp alg}$ est supporté sur un sous-ensemble fermé de codim $\geq c$

- Si $c \geq 1$, i.e. $H^i(X)^{\perp alg}$ supporté sur un diviseur

$$\begin{cases} h^1(X)=0 \\ h^{i-2}(\tilde{Y}) \twoheadrightarrow h^i(X)(1), \quad \forall i \geq 2, \text{ pour un } Y \subsetneq X \end{cases}$$

$\tilde{Y} \to Y$ désingularisation.

$$\xRightarrow[\text{dualité}]{\text{Poincaré}} \begin{cases} h^{2n-1}(X)=0 \\ h^i(X) \hookrightarrow h^i(\tilde{Y}), \quad \forall i \leq 2n-2. \text{ facteur directe} \end{cases}$$

Pour démontrer $CH_0(X)_{\mathbb{Q},hom}=0$:

$$\begin{cases} Gr_F^\nu CH_0(X)_{\mathbb{Q},hom} = Hom_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2n-\nu}(X)(n)[\nu]) \\ \qquad \underset{\nu\geq 2}{\hookrightarrow} Hom_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2n-\nu}(\tilde{Y})(n)[\nu]) \\ \qquad = Gr_F^\nu CH^n(\tilde{Y})_{\mathbb{Q}} = 0 \quad (\text{comme } \dim \tilde{Y} < n) \\ Gr_F^1 CH_0(X)_{\mathbb{Q},hom} = Hom_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2n-1}(X)(n)[1]) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F^1 CH_0(X)_{\mathbb{Q}} = 0$$

$$F^1 CH_0(X)_{\mathbb{Q}} = CH_0(X)_{\mathbb{Q},hom}.$$

- Par récurrence, il suffit de démontrer $F^1 CH_{c-1}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$

$$Gr_F^{\nu} CH_{c-1}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2(n-c+1)-\nu}(X)(n-c+1)[\nu])$$

coniveau de $H^i(X)^{\perp alg}$ est $\geq c$ $\overset{\text{Hodge}}{\Longrightarrow}$ $H^i(X)^{\perp alg}$ supp. sur un sous ensemble fermé de codim $\geq c$

$$\Rightarrow \quad h^{i-2c}(\tilde{Y}) \twoheadrightarrow h^i(X)(c) \quad , \forall i \geq 2c$$

$\tilde{Y}$ = lisse proj. de dim $\leq n-c$

$$\xrightarrow[\text{Poincaré}]{\text{dualité de}} \quad h^{2n-i}(X)(n-c) \hookrightarrow h^{2n-i}(\tilde{Y})(n-c) \quad \text{facteur directe (semisimplicité)}$$

$$\underset{\forall \nu \geq 1}{\Rightarrow} \quad Gr_F^{\nu} CH_{c-1}(X)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(\mathbb{Q}, h^{2n-2c+2-\nu}(\tilde{Y})(n-c+1)[\nu])$$

$$= Gr_F^{\nu} CH^{n-c+1}(\tilde{Y})_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{car } \dim \tilde{Y} \leq n-c$$

$$\Rightarrow \quad F^1 CH_{c-1}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$$

$\square$