(1)

Simon PEPIN-LEHALLEUR -

$\boxed{\text{Motifs}}$: niveau de la cohomologie d'une variété algébrique, construit géométriquement

1-motif (courbes)

Motifs purs | Motifs mixtes

coh. var. proj. lisses | coh. var. arbitraires

Motifs purs

k corps

$$\mathrm{VarProj}(k)^{op} \longrightarrow \mathrm{CHM}^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$$

$\mathrm{CHM}^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$: objets (X, p) $\quad p \in CH^d(X \times X)$

p projecteurs

morphismes : groupes de Chow à coeff. dans $\mathbb{Q}$

$C/_k$ courbe proj. lisse géo. connexe

$$h(C) = \mathbb{1} \oplus h^1(C) \oplus \mathbb{1}(-1)$$

$$h(\mathbb{P}^1_k) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)$$

$d_1 \mathrm{CHM}^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$ = sous-cat. pleine des facteurs directs de $h^1(C)$, $C/_k$ courbe

$$d_1 \mathrm{CHM}^{eff}(k)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Var\,ab}/_k) \otimes \mathbb{Q}$$
$$h^1(C) \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

utilise : toute variété abélienne est isogène à un facteur direct de $\mathrm{Jac}(C)$.

2) $X \in \mathrm{Var\,Proj\,lisse}(k)$ $\quad d = \dim X$

Conj : $\exists\, \pi_i \in CH^d(X \times X)$

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \underbrace{(h(X), \pi_i)}_{h^i(X)}$$

$$\underbrace{h^0(X),\ h^1(X)}_{\text{Murre}},\ h^{2d}(X),\ h^{2d-1}(X)$$

H^* : cohomologie de Weil

H^* : $\mathrm{Var\,proj\,lisse}(k)^{op} \longrightarrow K\text{-e.v.}$

$$\xrightarrow{h} \mathrm{CHM}^{eff}(\ )_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{R_H}$$

tel que

$$R_H(h^1(X)) \simeq H^1(X)$$

I. 1-motifs de Deligne

k corps, $Sm/_k$ muni de la top. étale

déf. 1-motif de Deligne M sur k est un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & L & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & T & \to & G & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

où L est un réseau (après ext. séparable $\cong \mathbb{Z}^N$)

(i.e. $\exists\, \ell/_k$ séparable, $L_\ell \simeq \mathbb{Z}^N$)

- $A/_k$ var. abélienne
- $T/_k$ tore

($\Rightarrow G/_k$ var. semi-abélienne)

Un morphisme de 1-motifs est un morphisme de diagrams.

On note $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}(k)$ la cat. additive des 1-motifs de Deligne.

<u>Ex</u> :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & T & \to & G & \to & A & \to & 0 \end{array}\right] = M$$

$M \Leftrightarrow$ • G semi-abélienne

• $x \in G(k)$

À $M \in \mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}(k)$, on associe

$$\begin{array}{cccc} [M] = [& L & \to & G] \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & -1 & & 0 \end{array}$$ faisceau sur $(Sm/k)_{ét}$

Tout morphisme $[M] \to [M']$ provient de $M \to M'$ dans $M_1^{\mathbb{Z}}(k)$

Un quasi-isomorphisme $[M] \simeq [M']$ est un isomorphisme : $[L \to G] \xrightarrow[(f_L, f_G)]{} [L' \to G']$

$\begin{cases} \ker f_L \text{ réseau} \\ \ker f_G \text{ ext. d'un groupe fini par une var. semi abélienne} \end{cases}$

beaucoup de variantes possibles

- permettre de la torsion dans L
- permettre G non-connexe

<u>déf</u>: $M \in \mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}(k)$. Filtration pondérale :

$$W_n M = \begin{cases} 0 & n < -2 \\ [0 \to T] & n = -2 \\ [0 \to G] & n = -1 \\ M & n \geq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{M}_1^i(k)$
1-motifs purs de poids i

gr poids -1 var. ab.

gr poids 0 réseau

<u>déf</u>: $\mathcal{M}_1(k) = \mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}(k) \otimes \mathbb{Q}$

<u>remarque</u>: $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}(k)$ n'est pas abélienne

$A \xrightarrow{f} A'$ isogénie

$\ker_{\mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}}(f) = \operatorname{coker}_{\mathcal{M}_1^{\mathbb{Z}}}(f) = 0$

<u>Prop.</u> • $\mathcal{M}_1(k)$ est abélienne

• $i \in \{-2, 1, 0\}$ $M_1^i(k)$ est semi-simple

• $\mathcal{M}_1(k)$ est de dim. coh. ≤ 1

<u>dém</u>: $f : M = [L \xrightarrow{u} G] \xrightarrow{(f_L, f_G)} [L' \xrightarrow{u'} G']$

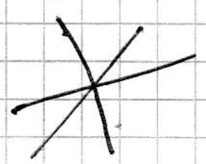
$\ker f = [\ker f_L \xrightarrow{[n]\circ u \quad n \gg 0} (\ker f_G)^0]$

$\mathrm{coker} f = [(\mathrm{coker} f_L)/_{tor} \xrightarrow{[m]\circ u \quad m \gg 0} (\mathrm{coker} f_G)]$

$C/_k$ courbe

$\hat{C} \xrightarrow{p} C$ semi-normalisation

(k fini radiciel, les sing. de $\hat{C}$ sont

analytiquement )

$\hat{C} \hookrightarrow \bar{C} \hookleftarrow Z$ complément
à l'∞

$H^1_m(C)(1) = [\mathrm{Div}^0_Z(\bar{C}) \to \mathrm{Pic}^0(\bar{C})]$

cohomologie motivique $\uparrow$ niveau $\in \mathcal{M}_1(k)$

des diviseurs supportés par Z

<u>déf</u> (Réalisation de Hodge)

Soit $M \in \mathcal{M}_1(k)$ $\quad R_{Hdg}(M) \in MHS_{\mathbb{Q}}$

$$R_{Hdg}(M) = \left(T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},\ W,\ F \right)$$

G groupe de Lie commutatif

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq \ker\left(\mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\exp} G \right)$$

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathbb{Z}}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d] \\
L \arrow[r, "u"'] & G(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

$$W_n T_{\mathbb{Z}}(M) = \begin{cases} 0 & i = -3 \\ H_1(T(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) & i = -2 \\ H_1(G(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) & i = 1 \\ T_{\mathbb{Z}}(M) & i \geq 0 \end{cases}$$

$$F^0\left(T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes \mathbb{C} \right) = \ker\left(T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Lie}\, G \right)$$

<u>Faits</u> : $R_{Hdg} : \mathcal{M}_1 \longrightarrow$ s-cat de MHS

obj de type

$\{(-1,-1), (-1,0), (0,-1), (0,0)\}$

polarisables

équivalence de catégories

$C/_{\mathbb{C}}$ courbe

$$R_{Hdg}\left(H^1_m(C)(1)\right) \underset{\text{dans } MHS_{\mathbb{Q}}}{\simeq} H^1(C(\mathbb{C}))(1)$$

<u>Conjecture</u> (Deligne)

Soit k corps de car. 0

$X/_k$ var. de dim pure n. Alors .....

II. Préfaisceaux <u>avec transferts</u>

Cor (k) <u>ob</u> : var. lisse $/_k$

Mor : $Cor(X, Y) = \langle V \subset X \times Y \mid$ $V \to X$ fini surjectif sur une composante irréductible $\rangle$

$V \in Cor(X, Y)$

$W \in Cor(Y, Z)$

$(V \times Z) \cap (X \times W)$ intersection propre

dans $X \times Y \times Z$

+ les composantes sont finies surjectives sur une

comp. irred de X

Cette propriété reste vraie après $\left(pr^{XYZ}_{XZ}\right)_*$.

Déf. Un préfaisceau avec transferts

est un foncteur contravariant additif

$\mathcal{F} : Cor(X, Y) \longrightarrow Ab$

Not : $PST(k)$ cat. des préfaisceaux avec

transferts en $\mathbb{Q}$-ev

$SHT(k)$ cat ... qui est un faisceau

étale

Ex : $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$

$\uparrow$ trace $\uparrow$ norme

Prop. $\mathcal{F} \in PST(k)$, $n \geq 0$

$$\mathcal{H}^n_{ét}(\mathcal{F}) = a_{ét}\left(U \mapsto H^n_{ét}(U, \mathcal{F})\right)$$

$\mathcal{H}^n_{ét}(\mathcal{F}) \in SHT(k)$ canoniquement

en particulier $a_{ét}\mathcal{F} \in SHT(k)$

$\mathbb{Q}_{tr}[X) = \mathrm{Cor}(-, X) \in SHT(k)$

pour $X \in Sm/_k$

déf. $\mathcal{F} \in PST(k)$ est dit $\mathbb{A}^1$-invariant si

$\forall X \in Sm/_k$

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_X)$$

déf: $\mathcal{F} \in PST(k)$

$$h_0(\mathcal{F})(X) := \mathrm{coker}\left(\mathcal{F}(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} \mathcal{F}(X)\right)$$

Fait: $h_0(\mathcal{F})$ est $\mathbb{A}^1$-invariant.

Prop. $G/_k$ groupe alg. lisse sur k
commutatif

$\underline{G} = G \otimes \mathbb{Q}$ est muni d'une structure fonctorielle de faisceau avec transfert

Si G^0 variété semi-abélienne, $\underline{G}$ est $\mathbb{A}^1$-invariant.

<u>Thm</u> : $X, Y \in Sm/_k$, Y quasi-proj.

$$Cor(X, Y) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} Hom(X, Sym^d Y)$$

compatible à

$$Sym^d(Sym^{d'}) \longrightarrow Sym^{dd'}$$

$$\left[Sym^d G \xrightarrow{+} G \right]$$

<u>Thm</u> (Voevodsky)

$\mathcal{F} \in PST(k)$, $\mathbb{A}^1$-invariant

$\Rightarrow \mathcal{H}^n_{et}(\mathcal{F})$ est $\mathbb{A}^1$-invariant

<u>déf</u> : $HI(k)$ faisceaux avec transferts $\mathbb{A}^1$-invariants

III. Faisceaux n-motiviques

$(Sm/_k)_{\leq n}$ cat. var de dim $\leq n$

$Cor(k)_{\leq n}$ $\qquad \sigma_n : Sm/_k \to (Sm/_k)_{\leq n}$

$$\sigma_n^* : SHT(k)_{\leq n} \rightleftarrows SHT(k) : \sigma_{n*}$$

<u>déf</u>: $\mathcal{F} \in SHT(k)$ est n-<u>engendré</u> si

$$\sigma_n^* \sigma_{n*} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$$

$\mathcal{F} \in HI(k)$ est n-<u>motivique</u> si

$$h_0^{\text{ét}} \sigma_n^* \sigma_{n*} \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$$

$HI_{\leq n}(k)$ cat. des faisceaux n-motiviques.

<u>Ex</u>: • $h_0^{\text{ét}}(X) = h_0^{\text{ét}}(\mathbb{Q}_{tr}(X)) \in HI_{\leq \dim(X)}(k)$

• $G/_k$ groupe semi-ab. (psab)

si G^0 var. ab et $\pi_0(G)$ est un réseau

$\underline{G}$ est 1-engendré :

$\underline{G}$ apparaît comme quotient de $\underline{Alb}(C)$

pour C courbe lisse

Voevodsky : $h_0^{ét}(C) \simeq \underline{Alb}(C)$

$HI_{\leq n}(k)$ est abélienne, stable par

ext. et conoyau

lemme : $HI_{\leq 1}(k)$ stable par sous-objets

dans $HI(k)$.

Cor : $\forall$ G psab, $\underline{G}$ est 1-motivique

déf : $\mathcal{F} \in HI_{\leq 1}(k)$ est de type fini

si $\exists$ G psab, $\underline{G} \xrightarrow{q} \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ est de présentation finie si $\exists$ q comme

ci-dessus, $\ker q$ de type fini.

Thm : 1) Un faisceau 0-motivique est

une somme directe de repr. continues de

dim. finie de $Gal(\bar{k}/k)$.

2) Soit $\mathcal{F} \in HI_{\leq 1}(k)$

a) $\mathcal{F}$ est colim filtrante de faisceaux 1-motiviques de prés. finie

b) Si $\mathcal{F}$ est de prés. finie, il existe une suite exacte fonctorielle

$$0 \to \underline{L} \to \underline{G} \to \mathcal{F} \to \underline{\pi_0}(\mathcal{F}) \to 0$$

où $\underline{\pi_0}(\mathcal{F}) = \operatorname{colim}_{X \to \mathcal{F}} \mathbb{Z}_{tr}(\underline{\pi_0}(X))$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d] & C^{[-1,0]}(HI_{\leq 1}(k)) \\
\mathrm{Ind}(\mathcal{M}_1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Thm</u>: $D(\mathrm{Ind}(\mathcal{M}_1)) \to D(HI_{\leq 1}(k))$ est une équivalence de catégories.