# DIFFÉRENTES VERSIONS DE LA SYMÉTRIE MIROIR

JÉRÉMY GUÉRÉ

Séminaire REGA de Mars 2013

## RÉFÉRENCES

Voici une liste de textes que je trouve éclairants pour approfondir certaines notions dont je parle dans mon exposé. Les références marquées d'une étoile sont les plus abordables.

**Présentation complète du problème de symétrie miroir :**
*A global mirror symmetry framework for the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence*, de Chiodo et Ruan (introduction)

**Champs algébriques de Deligne-Mumford :**
*Geometry of algebraic curves (volume II)*, de Arbarello, Cornalba et Griffiths (p. 279 à 306)*

**Cohomologie champêtre :**
*The quantum orbifold cohomology of weighted projective spaces*, de Coates, Corti, Lee et Tseng (p. 8 à 10)*

**Systèmes locaux et D-modules en général :**
*From quantum cohomology to integrable systems*, de Guest (p. 46 à 100)**

**Equation de Picard-Fuchs :**
*Picard-Fuchs equations of special one-parameter families of invertible polynomials*, de Gährs (thèse de doctorat)

**Théorie de Gromov-Witten champêtre :**
*Lectures on Gromov-Witten invariants of orbifolds*, de Abramovich*

**Fonctions J et théorie de Givental :**
*Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence*, de Chiodo, Iritani, Ruan (section 3)

Jérémy GUÉRÉ. – Différentes versions de la symétrie miroir

0) Exemple historique

$/\mathbb{C} \quad X_5 = \{ x_1^5 + \dots + x_5^5 = 0 \} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$

quintique de Fermat Calabi-Yau

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ 1 & & 101 & & 101 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$\exists\, X_5^\vee$ variété complexe CY telle que $h^{p,q}(X_5) = h^{3-p,q}(X_5^\vee)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

symétrie miroir cohomologique

$X_5^\vee$ construit comme une résolution des singularités de $X_5 / (\mu_5)^4$

$(\mu_5)^4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_5 \end{pmatrix} \det = 1,\ a_1, \dots a_5 \in \mu_5 \right\}$

$X_5 / (\mu_5)^4$ champ algébrique de Deligne-Mumford

1) le champ $\mathbb{P}(w_1, \dots w_N)$

soient $w_1, \dots w_N \in \mathbb{N}^+$

<u>déf</u>

$$\mathbb{P}(w_1, \dots w_N) = (\mathbb{C}^N - \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

où $\lambda \cdot (x_1, \dots x_N) = (\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$

<u>schéma</u>: $[x_1 : \dots : x_N]$

si $x_1 \neq 0$, $U_1 = \operatorname{Spec} A_1$ où $A_1 = \mathbb{C}[x_2, \dots x_N]^{\mu_{w_1}}$

<u>ex</u>: $\mathbb{P}(2,3)$

$[1:3] \sim [1:-3]$

vu comme un <u>champ</u>:

localement $(U_1, \mu_{w_1})$

$\vdots$

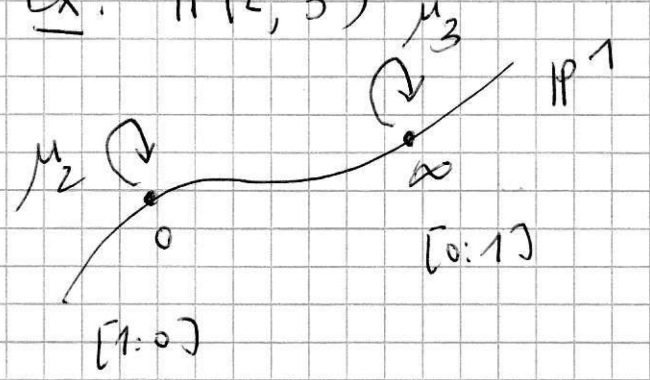
$(U_N, \mu_{w_N})$

<u>ex</u>: $\mathbb{P}(6) = [pt / \mu_6]$ $\quad$ $\mathbb{P}(7) = [pt / \mu_7]$

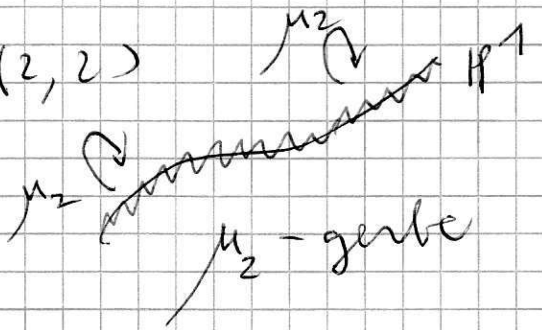
$|\mathbb{P}(6)| = pt = |\mathbb{P}(7)|$

point champêtre

Ex : $\mathbb{P}(2,3)$




$\mathbb{P}(2,2)$




$$\mathbb{P}(1,2,2,6) \hookleftarrow \mathbb{P}(2,2,6) \simeq \mathbb{P}(1,1,3) \times \mathbb{P}(2)$$

stabilisateur
non-trivial $\mu_2$
sur chaque point

Prop : $\mathbb{P}(w_1, \dots w_N)$ est un champ lisse de dimension $\dim_{\mathbb{C}} = N-1$

déf : un polynôme $W$ est dit quasihomogène si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$W(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_N} x_N) = \lambda^d W(x_1, \dots x_N)$$

$$X_W = \{W = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}(w_1, \dots w_N)$$

Prop : $X_W$ est lisse $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} W(x_1, \dots x_N) = 0 \\ \partial_1 W(x_1, \dots x_N) = 0 \\ \vdots \\ \partial_N W(x_1, \dots x_N) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow X = 0$$

Prop : $X_W$ CY $\Leftrightarrow d = \sum w_j$

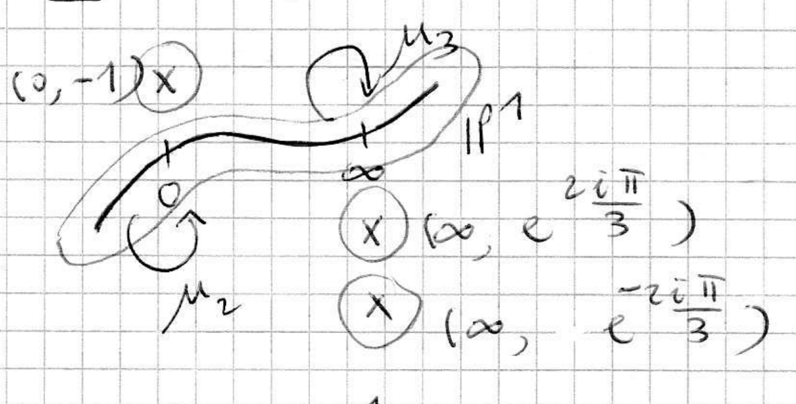
2) La cohomologie champêtre

$\mathcal{C}$ un champ

$\{(x, g),\ x \in \mathcal{C},\ g \in \mathrm{Stab}(x)\}$ $\rightsquigarrow$ espace grossier du champ d'inertie

champ d'inertie

Ex : $\mathbb{P}(2,3)$




3 classes supplémentaires

$|\mathbb{P}(2,3)| = \mathbb{P}^1$ classes $1, H \in H^{1,1}(\mathbb{P}^1)$

espace grossier

$1 \in H^{0,0}(\mathbb{P}^1)$

décalage : $h^{0,0} = 1$ $\quad 1$

$h^{1,1} = 1$ $\quad H$

$h^{1/2, 1/2} = 1$

$h^{1/3, 1/3} = 1$

$h^{2/3, 2/3} = 1$

<u>Ex</u> : $\mathbb{P}(1,2,2)$

champ d'inertie : $\mathbb{P}(1,2,2) \oplus \mathbb{P}(2,2)$

$1, H, H^2$ $\qquad$ $|\mathbb{P}(2,2)| = \mathbb{P}^1$

$1, H$

3) Le miroir

$$W = \sum_{k=1}^{p} a_k^{\mathbb{C}} \prod_{j=1}^{N} X_j^{\boxed{m_{k,j}}}$$ ← matrice M d'exposants

<u>hypothèse</u> : $p = N$ (*) polynôme inversible

↳ M détermine W

<u>déf</u> : le miroir de W est $W^\vee$ donné par $M^t$.

<u>Ex</u> : $X_1^{12} + X_2^{12} + X_3^6 + X_4^6 + X_5^2 \hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,2,2,6)$

$W_1^\vee = W_1$ la matrice d'exposants est diagonale $\begin{pmatrix} 12 & & & & \\ & 12 & & & \\ & & 6 & & \\ & & & 6 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$

$$W_2 = X_1^{11} X_2 + X_2^{10} X_3 + X_3^5 X_4 + X_4^3 X_5 + X_5^2$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,2,2,6)$

$$W_2^\vee = y_1^{11} + y_1 y_2^{10} + y_2 y_3^5 + y_3 y_4^3 + y_4 y_5^2$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,2,3,4)$

les miroirs peuvent
être dans des espaces différents

<u>Prop:</u> $X_W$ est lisse CY $\Leftrightarrow$ $X_{W^\vee}$ est lisse CY

<u>déf:</u> $SL(W)$

$$\shortparallel$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_N \end{pmatrix} \middle| \det = 1,\ W(a_1^{w_1} x_1, \dots, a_N^{w_N} x_N) = W(x_1, \dots x_N) \right\}$$

<u>déf:</u> le miroir de $X_W$
est le champ $[X_{W^\vee} / SL(W^\vee)]$

<u>Thm:</u> Pour tout $X_W$, lisse, CY, vérifiant la condition $(*)$

$$h^{p,q}(X_W) = h^{N-2-p,q}([X_{W^\vee}/SL(W^\vee)])$$

$H(X_W) = H_A \qquad H(X_W^\vee) = H_B$

$$W_2 = X_1^{11} X_2 + X_2^{10} X_3 + X_3^{5} X_4 + X_4^{3} X_5 + X_5^{2}$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,2,2,6)$

$$W_2^{\vee} = y_1^{11} + y_1 y_2^{10} + y_2 y_3^{5} + y_3 y_4^{3} + y_4 y_5^{2}$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(1,1,2,3,4)$

les miroirs peuvent
être dans des espaces différents

__Prop:__ $X_W$ est lisse CY $\Leftrightarrow$ $X_{W^\vee}$ est lisse CY

__déf:__ $SL(W)$

$$SL(W) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_N \end{pmatrix} \;\middle|\; \det = 1,\ W(a_1^{w_1} x_1, \dots, a_N^{w_N} x_N) = W(x_1, \dots x_N) \right\}$$

__déf:__ le miroir de $X_W$
est le champ $[X_{W^\vee} / SL(W^\vee)]$

__Thm:__ Pour tout $X_W$, lisse, CY, vérifiant la condition (*)

$$h^{p,q}(X_W) = h^{N-2-p,q}\left([X_{W^\vee}/SL(W^\vee)]\right)$$

$H(X_W) = H_A \qquad H(X_{W}^{\vee}) = H_B$

$(H_{A'}, \nabla_{A'})$ $(H_A, \nabla_A)$ Gromov-Witten $(H_B, \nabla_B)$

$(C, \mathcal{L})$ $\downarrow$ $(C, \varphi : C \to X_W)$ $\downarrow$

$\infty$ $\quad 0 \quad \mathbb{C}^\times$ $\qquad\qquad 0 \quad \mathbb{C}^\times$

$\mathbb{P}(1, d)$

$$H_B(W_\lambda^\vee) = H\left(X_{W_\lambda^\vee} / SL(W_\lambda^\vee)\right)$$

$$W_\lambda^\vee = W^\vee(x_1, \dots x_N) + \frac{1}{\lambda} x_1 \dots x_N$$

$\deg = \sum w_j$

## Équation de Picard-Fuchs

EDP d'ordre 1 $\Leftrightarrow$ ODE d'ordre $n$

$$\left[\prod_{j=1}^{N} \prod_{i=0}^{w_j - 1} (w_j D_r - c) - r \prod_{i=1}^{d} (d D_r + c)\right] I = 0$$

où $r \in \mathbb{C}^*$, $D_r = r \dfrac{\partial}{\partial r}$.

Thm : $\exists$ $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$, $r \longmapsto t(r)$ tel que $(H_A, \nabla_A) \sim (H_B, \nabla_B)$.

(sous la condition $w_j \mid d$ $\forall j$ $\Leftrightarrow$ l'espace grossier sous-jacent est Gorenstein)

on pose $u^d = \dfrac{1}{r}$

changement de carte de $\mathbb{P}(1, d)$