G. LUCCHINI – L'obstruction de Brauer–Manin pour les espaces homogènes

Rappels

k corps de nombres

Ω_k places de k

Ω_∞ places réelles

$v \in \Omega_k \quad k_v$

k-variété : k-schéma séparé de type fini lisse et géo. intègre

§1. Principe de Hasse

$X/_k$ vérifie PH si $X(k_\Omega) := \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$.

<u>Ex</u> : • Hasse 1921 $X \subset \mathbb{P}^n_k$ quadrique alors X vérifie PH

• Selmer 54

$X \subset \mathbb{P}^2_k \qquad 3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$

$X(k_v) \neq 0 \ \forall v$ mais $X(k) = \emptyset$.

Manin 70 utiliser $\mathrm{Br}\, X$

$$\operatorname{Br} X = H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}}$$

§2. Obstruction de Brauer-Manin

X/k propre

$$\begin{tikzcd}
X(k) \arrow[r, hook] \arrow[d, "ev_\alpha"] & X(\mathbb{A}_k) = X(k_\Omega) \arrow[d] \arrow[rd, bend left, "BM_\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Br} k \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_k} \operatorname{Br}(k_v) \arrow[r, "\sum \mathrm{inv}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$(\operatorname{Br} \mathcal{O}_v = 0)$

$\alpha(P)$ $\qquad \alpha \in \operatorname{Br} X$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "P"] & X \arrow[d] \\
& k
\end{tikzcd}$$

Definition :

$$X(k_\Omega)^{\operatorname{Br}} = \{ (x_v) \in X(k_\Omega) \mid BM_\alpha(x_v) = 0 \ \forall \alpha \in \operatorname{Br} X \}$$

$$\overline{X(k)} \subset X(k_\Omega)^{\operatorname{Br}} \subset X(k_\Omega)$$

On dit qu'il y a obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse si

$$X(k_v) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X(k_\Omega)^{\operatorname{Br}} = \emptyset$$

Si X n'est pas propre

$$Br_{nr} X := Br\, X^c$$

↳ compactification lisse de X

même définition

$$X(K_\Omega)^{Br_{nr}}$$

Si $B \subset Br_{nr}$

$$X(K_\Omega)^B = \{ (x_v) \in X(K_\Omega) \mid BM_\alpha (x_v) = 0 \ \forall \alpha \in B \}$$

Définition :

$$Br_1 X := \mathrm{Ker}\,(Br\, X \to Br\, \bar{X})$$

$$Br_0 X := \mathrm{Im}\, (Br\, k \to Br\, X)$$

$$Br_{al} X := Br_1 / Br_0$$

$$Br_{nr,al} X := \frac{Br_{nr} \cap Br_1}{Br_0}$$

$\cup$

$$Б(X) = \{ \bar{b} \in Br_{al} X ,\ \bar{b}_v = 0 \ \forall v \in \Omega_k \}$$

Proposition : Si $\alpha \in Б(X)$, alors BM_α est constante.

$(x_v) \in X(k_\Omega)$ $\beta \in Br_1 X$ t.q. $\bar\beta = \alpha$

$\beta_v \in Br_0 X_v$

BM induit un morphisme

$$B(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m_H(X) \in B(X)^* = \mathrm{Hom}(B(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Prop. ① Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $m_H(X) = 0$.

② Si $X \xrightarrow{\pi} Y$ morphisme, si $X(k_\Omega) \neq \emptyset$ (donc $Y(k_\Omega) \neq \emptyset$)

alors

$\pi_* : B(Y) \to B(X)$ induit

$$\pi^* : B(X)^* \to B(Y)^*$$

$$m_H(X) \longmapsto m_H(Y).$$

§3. Espaces homogènes

G groupe algébrique linéaire connexe

$m : G \times G \longrightarrow G$ multiplication

$U = R_u(G)$ radical unipotent

(l'unique sous-groupe distingué unipotent connexe maximal) $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$G^{red} = G/U$ groupe réductif

$G^{ss} = D(G^{red}) := [G^{red}, G^{red}]$ semisimple

(SL_n, PGL_n, ...)

$T = G^{tor} = G^{red}/G^{ss}$ tore (i.e. $\mathbb{G}_m^n$ sur $\bar{k}$)

$\exists\, G^{sc}$ semi simple simplement connexe

$\rho : G^{sc} \twoheadrightarrow G^{ss}$ à noyau fini et central

<u>Déf</u> : X/k k-action (à droite) de G sur X

$$X \times G \xrightarrow{a} X$$

$$\begin{tikzcd} X \times G \times G \arrow[r, "id \times m"] \arrow[d, "a \times id_G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times G \arrow[d, "a"] \\ X \times G \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd}$$

X est un espace homogène sur G si $\exists$ k-action $X \curvearrowleft G$ transitive au niveau des $\bar{k}$-points

$X(\bar{k}) \curvearrowleft G(\bar{k})$ (torseurs)

X est un espace principal homogène

si $\forall \bar{x} \in X(\bar{k})$, $\mathrm{Stab}\, \bar{x} = \{e\}$.

II. PH et BM pour les espaces homogènes

§1. Torseurs

$$H^1(k, G) := \{G\text{-torseurs}\}/_{k\text{-isom}}$$

ensemble pointé

élément distingué $[X]$ $\quad X = G$

$X \circlearrowleft G$ par mult. à droite

Proposition :

$$Z^1(k, G) = \{ \underset{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}{\Gamma_k \overset{\shortparallel}{}} \xrightarrow{a} G(\bar{k}) \text{ continue} \quad a_{\sigma\tau} = a_\sigma \, {}^\sigma a_\tau \}$$

$a \sim b \iff \exists g \in G(\bar{k})$ tq.

$$a_\sigma = g \, b_\sigma \, {}^\sigma g^{-1}$$

$$H^1(k, G) \simeq Z^1(k, G)/_\sim$$

- Si $[X] \in H^1(k, G)$ est triviale, alors

  $X(k) \neq \emptyset \qquad (X = G \quad \{e\} \in G(k))$

- $X(k) \neq \emptyset \qquad x_0 \in X(k)$

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto x_0 g \end{aligned}$$

<u>Rmq</u> : PH pour les G-torseurs $/k$

est équivalent à

$$Ш^1(k, G) := \operatorname{Ker}\Big(H^1(k, G) \to \prod_{\Omega_k} H^1(k_v, G)\Big)$$

est trivial.

$G = U$

<u>Lmq</u> : $H^1(k, U) = 0 \quad \forall k$ parfait

<u>dém</u> : Par dévissage : U se décompose en une suite de $\mathbb{G}_a \qquad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$1 \to \mathbb{G}_a \to U \to U' \to 1$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(k, \mathbb{G}_a)} \to H^1(k, U) \to H^1(k, U')$$

G quelconque (encore)

$X \circlearrowleft G \rightsquigarrow X \circlearrowleft U$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \circlearrowleft & G \arrow[d] \\ X/U & \circlearrowleft & G/U = G^{\text{réd}} \end{tikzcd}$$

Supposons que BM est la seule obstruction pour les $G^{\text{réd}}$-torseurs.

$$\left.\begin{array}{l} X(k_\Omega) \neq \emptyset \\ m_H(X) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X/U\,(k_\Omega) \neq \emptyset \\ m_H(X/U) = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow X/U\,(k) \neq \emptyset$

$x_0 \in X/U\,(k)$

$Y =$ la fibre de x_0 par $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X/U \end{array}$

Y est un U-torseur

$\Rightarrow Y(k) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd} & X & X/U \\ H^1(k,U) \arrow[r] & H^1(k,G) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,G^{\text{réd}}) \arrow[d] \\ & \prod H^1(k_v,G) \arrow[r] & \prod H^1(k_v,G^{\text{réd}}) \end{tikzcd}$$

$G = T$

$\exists\, T$ avec $Ш^1(k, T) \neq 0$

$X \in Ш^1(k, T)$ $\quad X \neq 0$ contre-exemple à PH

BM suffit ?

<u>Thm</u> (Voskresenskii, 70)
oui

<u>démo</u> :

Poitou-Tate $\Rightarrow$ $Ш^1(k, T) \cong Ш^2(k, \hat{T})^*$

caractères

Hochschild - Serre
$\rightsquigarrow$ suite spectrale

$$H^p(\Gamma_k, H^q(\overline{T}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(T, \mathbb{G}_m)$$

$$\overline{T} \simeq \mathbb{G}_m^n \Rightarrow H^1(\overline{T}, \mathbb{G}_m) = 0$$

$$\rightsquigarrow H^2(k, k[T]^*) \xrightarrow{\vee} Br_1 T$$

$$\nearrow \qquad\qquad \nearrow$$

$$H^2(k, k^*) \qquad\qquad Br\, k$$

$$\rightsquigarrow \; H^2(k, \bar{k}[T]^*/\bar{k}^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_{al}\, T$$

$$\begin{array}{lcl} Ш^1(k,T) & \simeq & Ш^2(k,\hat{T})^* \\ [X] & \simeq & Б(T)^* \\ & \simeq & Б(X)^* \\ & & \pm m_H(X) \end{array}$$

$G = G^{ss}$

D_4, E_6, E_7 $\quad A_n$ (≥ 1) $\quad B_n$ (≥ 2) $\quad C_n$ (≥ 3) $\quad D_n$ (≥ 5) $\quad F_4 \quad G_2$

Théorème (Harder 65, Kneser 65, E_8 Chernousov 89)

Supposons $G = G^{sc}$ alors :

a) $\forall v$ non-archimédien : $H^1(k_v, G) = 0$

b) $H^1(k,G) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_\infty} H^1(k_v, G)$

est bijective.

Si $G \neq G^{sc}$, on peut avoir $Ш^1(k,G) \neq 0$.

$X \circlearrowleft G^{ss} \twoheadleftarrow G^{sc}$

X torseur sur G^{ss}

$$\Updownarrow$$

X esp. homogène sur G^{sc}

à stabilisateur abélien fini

G connexe $\quad X$ espace homogène, $\bar{x} \in X(\bar{k})$

$\bar{H} = \mathrm{Stab}\ \bar{x} \quad \bar{k}$ groupe

$H^1(k, G, \bar{H}) = \{$esp. hom. sur G avec un point à stab. $H\} / k\text{-isom}$

Relation : $\quad H^1(k, G) \xrightarrow{r} H^1(k, G, \bar{H})$

$r(P, X) \iff \exists F : P \to X$ k-morphisme d'espaces homogènes

$$p \mapsto x$$
$$p \cdot g \mapsto x \cdot g$$

<u>Remarque</u> : $X(k) \neq \emptyset \implies x_0 \in X(k)$

$\exists F : \underset{\overset{\parallel}{G}}{P} \to X \ , \quad g \mapsto x_0 g$

<u>Définition</u> : Γ groupe profini, H groupe

- Un Γ-lien sur H est un morphisme

$$\kappa : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Out}\, H = \mathrm{Aut}\, H / \mathrm{Int}\, H$$

- $H^2(\Gamma, H, \kappa) :=$

$\{$ ext $1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$ induisant $\kappa \}$

$X \in H^1(k, G, \overline{H})$, $\bar{x} \in X(\bar{k})$

$\Longrightarrow$ Springer 66

- k lien $\kappa_{X,\bar{x}}$ sur $\overline{H}$
- $\eta(X) \in H^2(k, \overline{H}, \kappa_{X,\bar{x}})$

<u>Prop</u> : $\exists\, P \in H^1(k, G)$ tq.

$$\alpha(P, X) \Longleftrightarrow \eta(X) \in N^2 \subset H^2$$

$N^2 = \{$ ext. scindées $\}$

<u>$G = U$</u>

<u>Théorème</u> (Borovoi 76)

k corps de nombres ou corps local. Alors :

$\forall X \in H^1(k, U, \bar{H})$ on a

$$\eta(X) \in N^2(k, \bar{H}, K_{X,x})$$

$$\begin{array}{ccccc} H^1(k, \mathcal{U}) & \longrightarrow & H^1(k, \mathcal{U}, H) & \longrightarrow & H^2 \\ P & \longmapsto & X & \longmapsto & \eta(X) \end{array}$$

$\underline{G = T}$

X esp. homogène sur T, $\bar{x} \in X(\bar{k})$

$\rightsquigarrow \bar{H}$ abélien

$\rightsquigarrow \bar{H} = H \times_k \bar{k}$

$\uparrow$ k-groupe

$X \supseteq T/H$

est un T/H-torseur

$\parallel$ tore

$\underline{G = G^{sc}}$

Supposons $\bar{H}$ connexe

$\underline{\text{Théorème}}$ (Borovoi 93) $G = G^{sc}$, $Ш^2(k, H^{tor}) = 0$

et $X(k_v) \neq \emptyset$. Alors $X(k) \neq \emptyset$.

$X \in H^1(k, G, \bar{H}) \qquad \bar{x} \in X(\bar{k})$

$$\bar{H} \twoheadrightarrow \bar{H}^{tor} = H^{tor} \times_k \bar{k}$$

$$\bar{H} \supset \bar{H}^{\circ} \supset \bar{H}^{ssu} \supset R_u(\bar{H})$$

$$\underbrace{\bar{H} \supset \bar{H}^{\circ}}_{\bar{H}\ \text{fini}} \qquad \underbrace{\bar{H}^{\circ} \supset \bar{H}^{ssu}}_{\bar{H}^{tor}} \qquad \underbrace{\bar{H}^{ssu} \supset R_u(\bar{H})}_{\bar{H}^{ss}}$$

$$Ш^2(k, H^{tor}) \overset{?}{\longleftrightarrow} Б(X)$$

$$H^p(\Gamma_k, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}_1 X \to H^1(k, \underset{\widehat{H}^{tor}}{\mathrm{Pic}\,\bar{X}}) \to H^3(\bar{X}, \mathbb{G}_m)$$

$$\mathrm{Br}_{al} X \xrightarrow{\sim} H^1(k, \widehat{H}^{tor})$$

$$Б(X) \qquad Ш^1(k, \widehat{H}^{tor}) \qquad Ш^2(k, H^{tor})^*$$

<u>Théorème</u> (Borovoi 96)

k corps de nombres, G groupe alg. lin. conn-

$X \in H^1(k, G, \bar{H})$

$\bar{H}$ connexe ou (abélien et $G^{ss} = G^{sc}$)

Alors BM suffit.

- Réduction à G^{red}
- (I) $G^{ss} = G^{sc}$ et $H^{mult} = 0$ (Borovoi 93)
- (II) $G^{ss} = G^{sc}$ et $H^{mult} \hookrightarrow \bar{T} = G^{tor}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \circlearrowleft & G \arrow[d] \\ X/G^{ss} & \circlearrowleft & T \end{tikzcd}$$

(III) $G^{ss} = G^{sc}$

$\bar{H} \hookrightarrow \overline{G \times Z}$ Z tore quasi-trivial

$\bar{Y} = \overline{G \times T}/\bar{H} \twoheadrightarrow \bar{X}$

dominante

$Y \circlearrowleft G \times T$

(IV) G quelconque, H connexe

lemme : $G = G^{red}$

$\exists\ 1 \to Z \to G' \to G \to 1$

Z tors, $G'^{ss} = G'^{sc}$

$X \geq G \twoheadleftarrow G'$