Qizheng YIN. - Cycles algébriques sur les variétés abéliennes et les jacobiennes

X variété projective lisse $/_k$

$Z^i(X) = \mathbb{Z}\{$ sous-var. fermées intègres $\}$ de X de codim i

$CH^i(X) = Z^i(X)/_{\sim rat} \Rightarrow (CH^*(X), \cdot)$ structure d'anneau

Pour la suite :

$CH \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} =: CH$

Autres équivalences : $CH/_{\sim alg}$, $CH/_{\sim hom}$, $CH/_{\sim num}$

$$\begin{tikzcd} CH(X) \arrow[r, bend left, "\text{Hodge}"] & H(X) \arrow[l, bend left, "\text{Bloch-Beilinson}"] \end{tikzcd}$$

A variété abélienne, principalement polarisée

$A \times A \xrightarrow{m} A$ $\qquad (\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^t)$

$A \xrightarrow{[n]} A$ $\qquad \dim A = g$

$H^i(A) = \Lambda^i H^1(A)$

$(CH(A), \cdot, *)$ $\quad * \quad \alpha * \beta = m_*(pr_1^*(\alpha) \cdot pr_2^*(\beta))$

2 structures d'anneau $\qquad pr_i : A \times A \to A$

$\cdot, *$ ne commutent pas

① Décomposition de Beauville

$$CH^i(A) = \bigoplus_{j=i-g}^{i} CH^i_{[j]}(A)$$

où $CH^i_{[j]}(A) = \{ \alpha \in CH^i(A) \mid [n]^* \alpha = n^{2i-j} \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z} \}$

$\Uparrow$

② Transformée de Fourier $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} : CH^i_{[j]}(A) \xrightarrow{\sim} CH^{g-i+j}_{[j]}(A)$$

$$\alpha \longmapsto pr_{2,*}(pr_1^*(\alpha) \cdot ch(\mathcal{P}))$$

Poincaré sur $A \times A$

$\mathcal{F}(\alpha * \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \cdot \mathcal{F}(\beta)$

$\mathcal{F}(\alpha \cdot \beta) = (-1)^g \mathcal{F}(\alpha) * \mathcal{F}(\beta)$

$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (-1)^g [-1]^*$

$\Uparrow$

③ Décomposition de Lefschetz

L, Λ $\in sl_2$ $\qquad L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

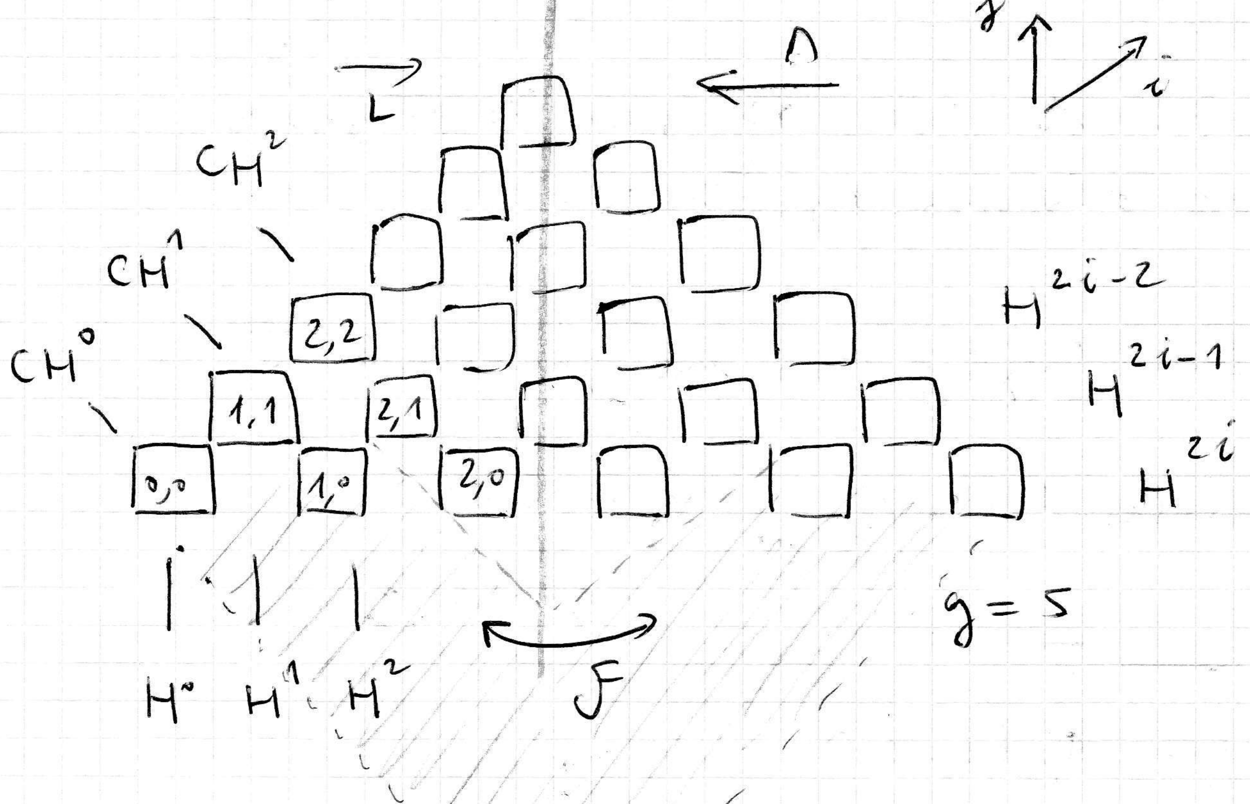
diviseur

θ symétrique $\qquad * \dfrac{\theta^{g-1}}{(g-1)!} \qquad \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$[-1]^* \theta = \theta$

$$\mathcal{F} = [-1]^g \exp(L)\exp(-\Lambda)\exp(L)$$

$$(-1)^g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2$$



Bloch–Beilinson :

$CH^i_{[j]}(A)$

$\circlearrowleft$

$[n]^* = n^{2i-j}$

$CH^i(A)$ contrôlé par

$H^{2i}(A),\ H^{2i-1}(A), \ldots H^i(A)$

classe de cycle

Abel-Jacobi

$H^i(A)$

$\circlearrowleft$

$[n]^* = n^i$

<u>Conjecture</u> (Beauville)

(i) $CH^i_{[j]}(A) = 0$ pour tout $j < 0$ (OK pour $k = \overline{\mathbb{F}_q}$)

(ii) $\alpha \in CH^i_{[0]}(A)$ $\underset{\text{(hom)}}{\alpha \sim 0} \Rightarrow \alpha = 0.$

(iii) $\alpha \in CH^i_{[1]}(A)$ $\quad \underset{\text{abel-Jacobi}}{\alpha \sim 0} \Rightarrow \alpha = 0$.

connu seulement pour CH^0 et CH^1

Moonen : (ii) et (iii) ok pour les polynômes de diviseurs symétriques.

cycles tautologiques sur une jacobienne J

C courbe lisse $/_k$, $x_0 \in C(k)$
genre g

$$i : C \hookrightarrow J$$
$$x \longmapsto \mathcal{O}_C(x - x_0)$$

$$[C] := [i(C)] \in CH^{g-1}(J)$$

Théorème (Riemann)

$$\frac{[C]^{*(g-1)}}{(g-1)!} = \text{translaté de } \Theta$$

Beauville : Travailler dans $CH(J)/_{\sim alg}$.

déf. Anneau tautologique : la plus petite sous-alg. de $CH(J)/_{\sim alg}$ contenant $[C]$

stable sous ①, ②, ③, $\cdot$, $*$ $\rightsquigarrow$ $T(J)$

<u>Thm</u> (Beauville)

$$T(J) = \mathbb{Q}\langle \{ [C]_{[j]} \} \rangle \longleftarrow \text{générateurs}$$

Problème : l'action de sl_2 ($\Rightarrow$ celle de $\mathcal{F}$)

$\rightsquigarrow$ relations

<u>Application</u> : conj. de Voevodsky (pour $CH_1(A)$)

"Tout cycle numériquement trivial est smash-nilpotent"

↑ résultat récent de Sebastian

c-à-d : $\exists N$ tel que $\underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{N} = 0 \in CH(X^N)$

$\alpha \in CH(X)$

$\Uparrow$

Bloch-Beilinson

<u>cas connus</u> : $\alpha \sim_{alg} 0$ (Voevodsky, Voisin)

$\alpha \in CH$(motif impair) Kimura-Kahn-Sebastian

$\Rightarrow [C]_{(1)}$ ok

<u>Étape 1</u> : relations tautologiques

$$[C]_{[j+1]} = d\left([C]_{[1]} * [C]_{[j]} \right) \cdot \theta \quad \text{avec } d \neq 0$$

⇒ $[C]_{[j]}$ ok $\forall j \geq 1$ ⇒ ok pour tautologiques

<u>Remarque</u> :

Tout $\alpha \in CH_1(A)$ est "tautologique"

$\alpha = \sum n_i \alpha_i \qquad \alpha_i = [C_i]$ avec $C_i \subset A$

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}_i \arrow[r] \arrow[dr] & A \\ & \tilde{J}_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\alpha \sim_{num} 0$ ⇒ ignorer la composante à l'étage 0

⇒ α smash-nilpotent

<u>Version relative</u>

① ② ③

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{J} \arrow[dl, "\pi"] \\ S \arrow[u, bend left, "x_0"] & \end{tikzcd}$$

Anneau tautologique : contenant $[\mathcal{C}]$ et stable sous ①, ②, ③

<u>Résultats</u> : → générateurs

→ l'action de sl_2

⑦

Anneau tautologique de $\mathcal{M}_g$

$\mathcal{M}_g$ ← espace de modules

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \\ p \downarrow \\ S \end{array}$$

$K = c_1(\Omega_{C/S}) \in CH^1(\mathcal{C})$

$\kappa_i = p_*(K^{i+1}) \in CH^i(S)$

Si $S = \mathcal{M}_g$, $\quad R(S) = \mathbb{Q}\langle \{\kappa_i\} \rangle$

Conjecture (Faber)

(i) $R(\mathcal{M}_g) \sim$ la cohomologie d'une var. proj. lisse de dim $g-2$

$R^i \leftrightarrow H^{2i}$ $\quad$ c-à-d : $R^i(\mathcal{M}_g) = 0 \ \forall i > g-2$ ✓

$R^{g-2}(\mathcal{M}_g) = \mathbb{Q}$ ✓

dualité de Poincaré : $R^i \times R^{g-2-i} \longrightarrow R^{g-2}$ non dég.

(ii) ens. minimal de générateurs ✓

(iii) nombres d'intersection ✓

OP ok pour $g \leq 23$

pour $g = 24$, une relation manquée $\in R^{12}(\mathcal{M}_g)$

Théorème : $R(\mathcal{M}_g) \subset T(\mathcal{J})$

mais relation marquée non trouvée