Lorenzo FANTINI – Espaces de Berkovich, valuations et singularités

§1. Introduction

§2. Espaces de Berkovich

§3. Exemples : $\mathbb{A}^{n,\,\mathrm{an}}_k$

§4. Lien avec la géométrie linéaire

§5. Cas de la valeur absolue triviale

k corps non archimédien, complet

i.e. $|\cdot| : k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ pour tout $x, y \in k$

$-\log|\cdot| : k^\times \to \mathbb{R}$ valuation (de rang 1) sur k

$k^\circ = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$ anneau local

d'idéal maximal $k^{\circ\circ} = \{x \in k \mid |x| < 1\}$

et corps résiduel $\tilde{k}$

Exemples

- $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$, $\tilde{k}((t))$
- corps k avec la valeur absolue triviale

Problème : k est totalement discontinu

[k = (boule unité fermée) $\cup$ (son complémentaire)] définition naïve de fonction analytique <u>ne</u> se globalise pas

<u>Tate</u> (60s) : espaces rigides

E courbe elliptique $/_{\mathbb{Q}_p}$ à mauvaise réduction

$E(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / q^{\mathbb{Z}}$ (un isomorphisme de groupes) provenant d'un isomorphisme d'espaces analytiques

$q \in \mathbb{Q}_p^\times$, $|q| < 1$

idée : utiliser des topologies de Grothendieck

<u>Raynaud</u> : modèles à coefficients dans k°

$\rightsquigarrow$ réduction mod $k^{\circ\circ}$

$\rightsquigarrow$ schéma sur $\tilde{k}$

1. <u>Espaces de Berkovich</u>

fin 80's

<u>Rappel</u> : $X = \operatorname{Spec} A \;/_k$

$$\operatorname{Spec} A \xleftrightarrow{\sim} \{A \to L \quad k/L \text{ fini}\}/_\sim$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto (A \to k(\mathfrak{p}))$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & L_1 \arrow[r] & L' \\ & L_3 \arrow[u] \arrow[d] & \\ & L_2 & \end{tikzcd}$$

$r_1, \dots r_n > 0$ réels

$$T_{n,r} = K\{r_1^{-1} X_1, \dots r_n^{-1} X_n\}$$
$$= \{\sum a_J X^J \mid \lim_{|J| \to \infty} |a_J| r^J = 0\}$$

séries convergentes sur le polydisque de polyrayon $(r_1, \dots r_n)$.

algèbre de Banach avec la norme

$$\|\sum a_J X^J\| := \max_J \{|a_J| r^J\}$$

$T_{n,r} \twoheadrightarrow A$ <u>algèbre affinoïde</u>

L/K extension complète de K

$A \xrightarrow[\text{continue}]{} L \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{\geq 0}$ semi norme multiplicative et bornée sur A

$|x(f)| \leq \|f\|_A$

Réciproquement :

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{x} \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \downarrow \\ A/\mathrm{Ker}\, x \longrightarrow \widehat{A/\mathrm{Ker}\, x} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{semi-normes mult.} \\ \text{et bornées sur } A\end{array}\right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{A \to L \mid L/K \text{ complète}\}/\sim$$

<u>Définition</u>: si A algèbre affinoïde, l'espace

affinoïde de $\mathcal{A}$ est

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\text{semi-normes mult. bornés sur } \mathcal{A}\}$$

+ topologie induite par $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$

$$x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{H}(x) = \widehat{\mathcal{A}/_{\operatorname{Ker} x}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{x} & \mathcal{H}(x) & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ f & \longmapsto & & & |f(x)| \end{array}$$

<u>Propriété</u> : • $\mathcal{M}(A) \to \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ continue
$$x \longmapsto \operatorname{Ker} x$$

• Si $\mathcal{A} \neq 0$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

• $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ compact et localement connexe par arcs

<u>Exemple</u> : $\mathcal{M}(T_{n,r}) = E(0, r)$

globaliser : compliqué !

§ <u>Exemples</u>

<u>Définition</u>. On note

$$\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}} = \{x : k[X_1, \ldots X_n] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{semi norme multiplicative qui étend la valeur absolue de } k\}$$

+ topologie induite par $\mathbb{R}^{k[\underline{X}]}$

<u>Remarque</u> : $\mathbb{A}^{n,an}_k = \bigcup E(0,r)$

réunion croissante

<u>Définition</u>. $U \subset \mathbb{A}^{n,an}_k$ ouvert

Une fonction analytique est une application

$$f : U \longrightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{H}(x)$$

telle que

- $f(x) \in \mathcal{H}(x)$
- localement, f s'écrit comme une limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles

<u>Remarque</u> : $\mathbb{A}^{n,an}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^n$

et on retrouve les fonctions holomorphes

$$\begin{aligned} k^n &\hookrightarrow \mathbb{A}^{n,an}_k \qquad\qquad \mathcal{H}(x) = k \\ x &\longmapsto (f \mapsto |f(x)|) \end{aligned}$$

<u>On a</u> : $\mathbb{A}^{n,an}_k \simeq \mathbb{A}^{n,an}_{\widehat{k^{alg}}} / \mathrm{Gal}(\widehat{k^{alg}}/k)$

donc on peut supposer k algébriquement clos

- droite affine analytique sur k (alg. clos)

- $k \hookrightarrow \mathbb{A}^{1,an}_k$ $\qquad \mathcal{H}(x) = k$

- $a \in k$, $r \geq 0$

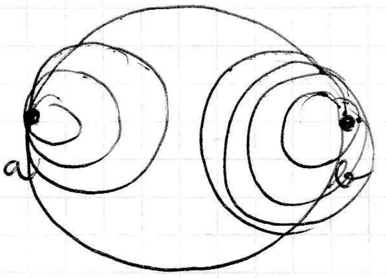
$$\eta_{a,r} : k[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f = \sum a_i (X-a)^i \mapsto \max |a_i| r$$

$$\eta_{a,r} = \eta_{b,s} \iff E(a,r) = E(b,s)$$

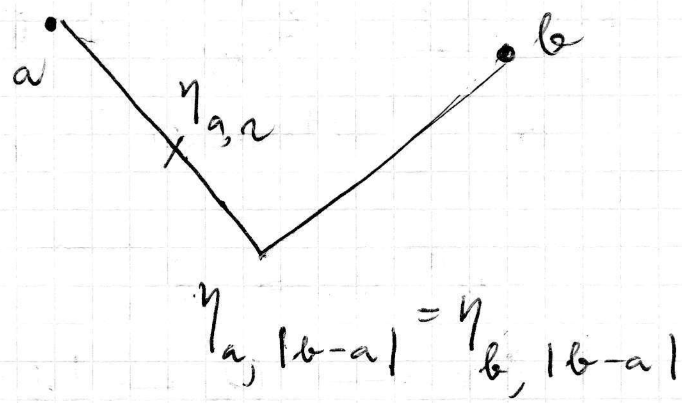
donc un point de ce type pour chaque boule fermée dans k

$\boxed{k}$



$\mathbb{A}^{1,an}_k$

un chemin entre a et b !



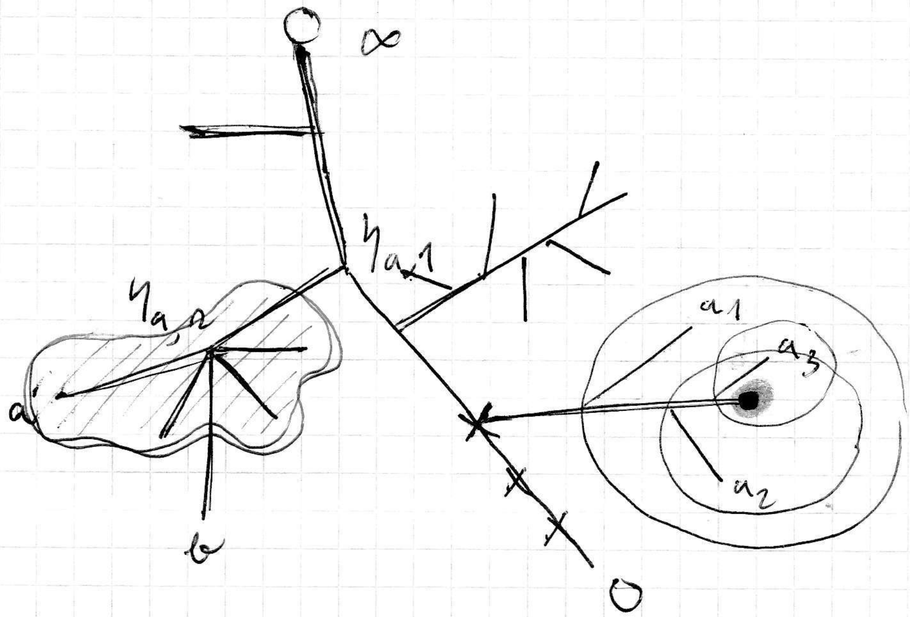
2 types de points

$r \in |k^\times| \Rightarrow |\mathcal{H}(\eta_{a,r})^\times| = |k^\times|$

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \tilde{k}(t)$$

$r \notin |k^\times| \Rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)} = \tilde{k}$

$|\mathcal{H}(x)^\times|$ engendré par r et $|k^\times|$



si $\{E(a_i, r_i)\}_{\mathbb{N}}$ famille décroissante de boules telle que $\bigcap E(a_i, r_i) = \emptyset$, alors $\inf\{\eta_{a_i, r_i}\}$

Ex : $\mathbb{C}_p$

k maximalement complet si : L/k tel que $|L^\times| = |k^\times|$ et $\tilde{L} = \tilde{k}$ entraîne $L = K$

$$\mathbb{C}((t^{\mathbb{R}})) = \{\sum_{i \in \mathbb{R}} a_i t^i \mid \text{supp bien ordonné}\}$$

algébriquement clos, maximalement complet $/ \mathbb{C}((t))$

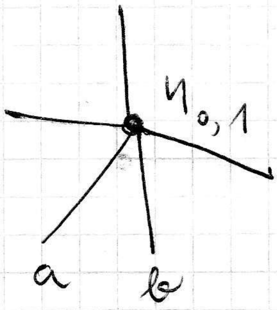
$$v(\sum a_i t^i) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$$

ou sur les séries de Puiseux

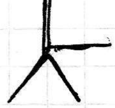
$$a_n = t + t^{1+\frac{1}{2}} + t^{2+\frac{1}{3}} + t^{n+\frac{1}{n+1}}$$

cas $|k^\times| = 1$

$\mathbb{A}^{1,an}_k$



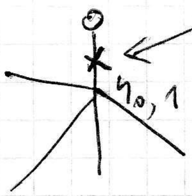
$\mathbb{A}^{2,an}_k$ fibre au-dessus de x : $\mathbb{A}^{1,an}_{\mathcal{H}(x)}$



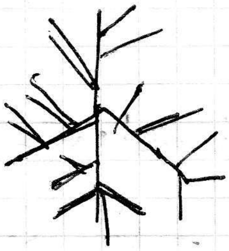
$$\begin{array}{c} \mathbb{A}^{2,an}_k \\ x_1 \downarrow \\ \mathbb{A}^{1,an}_k \end{array}$$

si x rationnel

si x n'est pas rat.



$\mathcal{H}(x) \simeq k((t))$



$\mathbb{A}^{1,an}_{k((t))}$

D'autres espaces analytiques

① $\mathcal{U} \subset \mathbb{A}^{n,an}_k$ $\mathcal{O}_\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_k}|_\mathcal{U}$

② $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\mathcal{U}$ faisceau d'idéaux cohérent $(\mathrm{supp}\, \mathcal{O}_\mathcal{U}/\mathcal{J},\ \mathcal{O}_\mathcal{U}/\mathcal{J})$

③ espaces annelés localement de la forme ②

<u>Exemple</u>

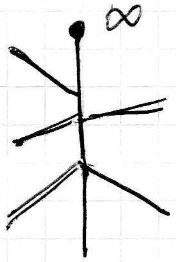
$X/_k$ var. algébrique $\rightsquigarrow X^{an}$

séparé	Hausdorff
X propre	X^{an} compact
connexe	connexe par arcs

localement : si $X = \operatorname{Spec} A$, alors

$$X^{an} = \{ \text{semi-normes mult. sur } A \text{ étendant } |\cdot|_k \}$$

$\mathbb{P}^{1,an}_k$



$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}(A), \mathcal{M}(B)) \simeq \operatorname{Hom}(B, A)$$

$\exists$ liens avec la géométrie linéaire / combinatoire

<u>Théorème</u> (Berkovich)

1) tout espace analytique lisse sur k est localement contractile

2) Si X espace analytique à réduction "raisonnable", alors X a l'homotopie d'un polyèdre.

$$\mathrm{Spf}\left(\frac{k^\circ\{X_0, \dots X_n\}}{(X_0 \dots X_m - a)}\right) \qquad a \in k^\circ,\ a \neq 0$$

Hrushovski–Loeser : 2) est vrai pour X^{an} si

X quasi-projective

<u>Exemple</u> : E courbe elliptique $/_k$ $\quad (|k^\times| \neq 1)$

si E a bonne réduction, E^{an} contractile

si mauvaise, $E^{an} \underset{hom}{\sim} \bigcirc$

<u>Valuation triviale</u>

<u>valuations</u> $\quad X/_k$ propre

$$ZR_{X/_k} = \varprojlim_{\pi : X' \to X \text{ propre birationnel}} X'$$

espace de Zariski-Riemann

en bijection avec l'espace

$$\mathrm{Val}_X = \{ v : k(X) \to G \text{ valuation} \}$$

Si X une courbe : $\quad ZR_{X/_k} = X^{norm}$

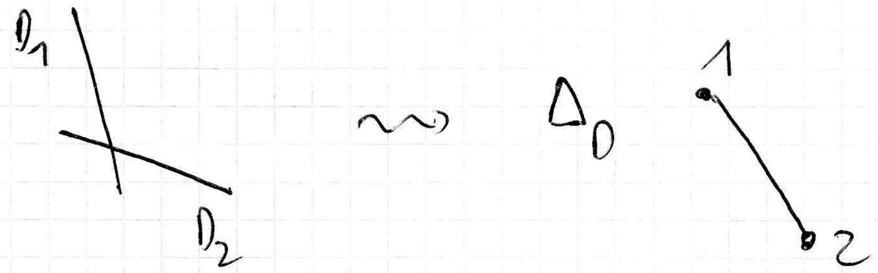
si $\dim X \geq 2$, $ZR_{X/K}$ n'est pas algébrique

Théorème (Stepanov, Thuillier)

Soit k un corps parfait, $X/_k$ variété,

$\pi : X' \to X$ résolution de singularité de X

i.e. $X' \setminus D \xrightarrow{\sim} X \setminus X_{sing}$, D diviseur à croisements normaux simples, $|\Delta_D|$



Alors : le type d'homotopie de $|\Delta_D|$ ne dépend pas de π.

idée : $|\Delta_D| \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow X^{an}$

$X' \setminus D \hookrightarrow X'$
plongement toroïdal