Jean-Pierre SERRE. – La cohomologie étale de 1930 à 1974.

1940 Weil CR
46 — Foundations
49 — Fibrés algébriques. Conj.
50 Weil et Cartan, fibrés hol.
51-52 Sém. Cartan oral / $\mathbb{C}$
53 exposé Bourbaki sur Weil 49
54 FAC
56 Grothendieck
57 R-Roch
58 début étale

73 Deligne Weil I

topologie de Zariski / étale

sujet lié aux 2 (sources) : notion de fibré algébrique

Personnages principaux:

Weil
Grothendieck
Deligne (à la fin)

1940 note de Weil aux Comptes Rendus énoncer les résultats principaux de la th. des courbes / $\mathbb{F}_q$

valeurs propres

$\boxed{Tr(\sigma\sigma') > 0}$ inégalité fondamental

tout s'en déduit

Weil n'avait pas de preuve (stratégie)

Fondations : traité de géom. alg. centrée
sur la th. de l'intersection

1948 : courbes alg. / var. abéliennes

difficile : points de division d'une var. abélienne
jacobienne qui n'existe pas

à l'époque : sous-variété de $\mathbb{P}^N$

il pouvait faire des recollements (jamais fait
en géo. alg ⇒ géo. différentielle)

Zariski avait pas : Weil variétés
vile

On peut construire
des trucs qui ne se plongent pas.

1ers exemples dus par Hironaka (plus tard)

(trucs singuliers affreux)

Il y avait : $f : X \to Y$

usage massif des points génériques

pt. générique → D + se prolonge.

49 : Exploiter ces idées pour des fibrés

Fibré : domaine réservé aux topologues

on a le droit d'en faire en géo. alg !

Cours à Chicago sur les fibrés algébriques

cas où la base est une var. projective

(particulier : courbe)

groupes G_m → classes de diviseurs

G_a dim H^1 = genre (courbe)

$G_a \times G_m$ $H^1(X, \mathcal{L}(D))$

ax + b

produit semi-direct

espace vectoriel

Il connaît le th. de dualité sous la forme $\Omega(-D)$

53 1er groupe symplectique non abélien

Exp. Bourbaki ← pas peur de la top. de Zariski

qui très peu d'alg. intelligent ("fermé")

Dire quelque chose sur les recollements :

variété séparé

Weil ne voulait pas cela

$X \longrightarrow X \times X$ la diagonale fermé

variété algébrique = séparée (ça m'a fait grand plaisir)

Fibrés (géométrie analytique complexe)

Weil avait l'idée que cela s'appliquait en géo. analytique. Il a montré ça à Cartan

lettre de Weil à Cartan (avril 1948)

avant que Cartan

ICM 1948

Si on prend

$\mathbb{G}_a = \mathbb{C}$ avec groupe structural

cela permet d'interpréter le problème additif de Cousin

$\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^\times \rightsquigarrow$ prob. mult. de Cousin ouvert sur les variétés de Stein /

domaine d'holomorphie

Il en parle un mois après dans son exposé (un paragraphe)

[Une partie de l'influence de Weil]

Weil | Bull. AMS

dim $= r-1$

$$\sum_{i=0}^{i=r} a_i x_i^n = 0$$

$n \geq 2$

$a_i \in k^\times$

k fini à q éléments

variété projective "à la Fermat"

$$N(q) = \underbrace{(1 + \cdots + q^{r-1})}_{\text{espace proj. correspondant}} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| \leq B \, q^{\frac{r-1}{2}}$$

B : nombre de Betti

on calcule ε comme une somme de B termes

$$|\cdot| = q^{\frac{r-1}{2}}$$

En faisant varier les corps, on tire des cas.

de Hecke (article ultérieur)

$$\mu_n^{r+1} \Big/ \mu_n$$

découpage de la cohomologie par des caractères

associés tous de mult. 0 ou 1

$(\alpha_0, \dots \alpha_r) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\alpha_0 + \dots + \alpha_r = 0$

si $\alpha_i \neq 0$ pour tout $i \Rightarrow$ mult. 1

sinon $\Rightarrow$ mult. 0

valeur B $= \sum \dots$

Weil avait donné à Dolbeault

de calculer cela.

Ce sont des <u>sommes de Jacobi</u>

s'expriment en termes de sommes de Gauss

[Si $(n,p)=1$ faut faire attention

($\Rightarrow$ explique les sommes de Jacobi]

racines de

l'unité pas dans k

conjectures de Weil :

inspirées de la topologie (Weil le dit clairement)

$$N(q) = \sum (-1)^i \, \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q ; H^i)$$

(il ne l'écrit pas)

valeurs propres $q^{i/2}$

formule de Lefschetz

conjecture-t-il existe une topologie ?

Tout se passe comme si ~~il y~~ on avait une cohomologie ?

Prob. il voyait pas comment la définir.

Plus subtile : X proj. lisse /car 0

réductions mod p pour presque tout p.

–20 ans : il dit aussi une cohomologie.

"cohomologie de Weil" ?

une des sources de la coh. étale : il fallait bien [illegible] !

FAC : coh. des faisceaux cohérents (coeffs linéaires)

corps de base alg. clos.

il restait de faire
Grothendieck, analyse fortuielle
avec bcp. de catégories

Riemann-Roch
"l'a rendu célèbre instantanément"

Fibrés algébriques de Weil
loc. triviaux par déf.

Y rétréci
$\downarrow$ fini
X ne rentre pas dans la th. de Weil

Ce qui le gênait :

$G = GL_n$

$H = SO_n$

$$G \xrightarrow{H} G/H$$

c'est un fibré au sens de Weil (loc. trivial) ou non ?

Chevalley, Cartan, Groth. Serre

1 an on ne savait pas

FAUX à partir de $\underline{n \geq 3}$

même sur $\mathbb{C}$

GL_n/O_n formes quadratiques à n variables

SO_n $\underline{\text{déterminant}} = 1$ loc. trivial

pt. générique de G/H peut

se relève en un point du même coup de déf.

$\sum a_{ij} x_i x_j$ $\qquad$ $\det(a_{ij}) = 1$

sym.

$\sum x_i^2$ de façon rationnelle $\qquad$ Ne marche pas !

comparaison

analytique / algébrique

X proj. non singulière

$$\begin{array}{l} P \\ \downarrow \\ X \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{fibré} \\ \text{principal} \end{array}$$

dans la catégorie analytique complexe

Est-ce que ceci provient d'un fibré algébrique ?

Ex : avec SO_3 qui ne se relève pas.
(Serre)

fibrés alg. = top. petite

anal : « ouverts usuels »

pas de choix : en géo. alg. adhérence de Zariski

fibrés loc. isotriviaux

presque la même chose que loc. trivial pour la top.-étale

dans le langage de Grothendieck : <u>top. étale finie</u>

$\mathbb{G}_a$ $\mathbb{G}_m$

$\tilde{H}^1$ cohomologie cohérente

Séminaire Chevalley

la cohomologie étale est née ce jour là :

ça va donner les H^n de Weil

(il le dit à Edinburgh 3 <u>mois après</u>)

Serre était <u>sceptique</u> :

pour une topologie

π_1 obstacle

se débarrasser des ennuis en travaillant sur pro-limites

π_i $i \geq 2$ topologie qui ne s'en occupe pas ?

j'avais tort

58 – Introduction H^0, H^1 OK

59, 60 : rien

aucun type de choses à faire n'a jamais arrêté Grothendieck

61 : Artin demande Groth. autorisation de travailler là dessus

62 M. Artin cours polycopié à Harvard (livre rouge)

gén. sur la top. étale

+ résultats concrets sur les surfaces

63–64 : séminaire SGA 4, 5

/$\mathbb{C}$ pareil que la cohomologie complexe

c'est la méthode de dém. qui est intéressante

livre

conditions assez larges

voisinage de Zariski

fibré successif en courbes affines (on retire des sections)

courbe affine $\pi_i = 0$ $i \geq 2$

connu par le contexte

uniformisée soit par le plan

par dévissage : $\pi_i(\mathcal{U}) = 0 \quad i \geq 2$

voisinage de Zariski

$H^i(\pi_1(\mathcal{U}))$ par cette filtration

$\pi_1(\mathcal{U})$ dévissage en groupes libres de type fini

Coh. discrète de ce groupe comparée à la topologie finie

En général : complètement différent mais ici le même.

Existence de voisinages d'Artin m'a sauvé !

Recours à conjecture de Weil :

fallait démontrer une formule de Lefschetz (fait par Grothendieck) SGA 5 polycopié

version qu'on a eu pendant longtemps

schéma de dém, tous les pas, mais pas les preuves   Illusie : la rédaction avec ne pas avoir pu référer la ~~[illegible]~~ constructivité du degré

Conjecture de Weil :

$$|\cdot| = q^{i/2}$$

méthode inspirant de la th. kählerienne $/\mathbb{C}$

petits calculs sur le livre de Weil

propriétés de positivité : gén. de

$$\sigma(\xi . \xi') > 0 .$$

X projective non-singulière de dimension paire $2n$ $\qquad X^2 \Rightarrow X$

indépendants

cycle dans le carré

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(X, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\text{diviseur très ample}]{\text{cup. par une section hyperplane}} & H^{2n+2}(X, \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \\ C^n(X) & & \end{array}$$

$$C^n(X) \times C^n(X) \to \mathbb{R}$$

$\langle x, y \rangle$ forme d'int.

cycles alg. / numérique

cycles primitifs : dans le noyau

$$(-1)^n \langle x, x \rangle > 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

$$x \in C^n_{prim}$$

produit d'une courbe par elle même donne $\sigma(\xi . \xi') > 0$.

Cas de surfaces

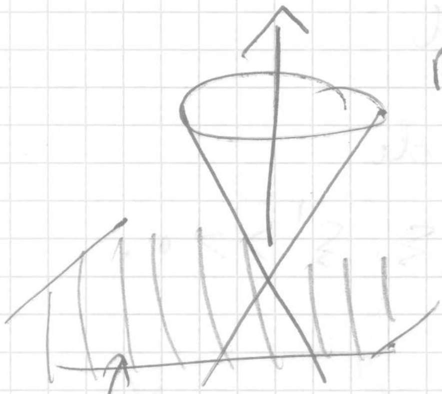
$C(X) \otimes \mathbb{R} \qquad \langle x, y \rangle$

Théorème (Hodge)

signature $-1, -1, \ldots -1, \boxed{+1}$

section hyperplane

positif



cône des classes de diviseurs

négatif

la voie que Grothendieck avait choisie

formulée sous le nom de

$\boxed{\text{Conjectures Standard}}$ (toujours ouverte)

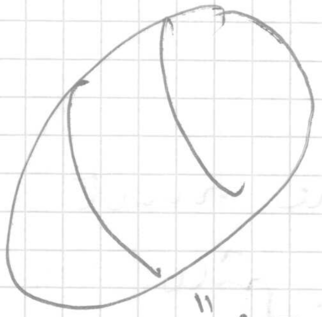
On ne sait pas, on ~~sait~~ pas
conjectures.

(plutôt tendance à conj. qu'elle est fausse).

Deligne 1973 Weil II à peu près 10 après

Très utile pour les gens
qui font la th. analytique
des nombres

passe à côté du propre

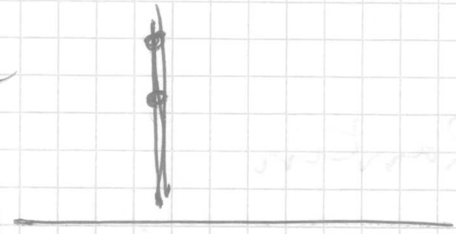


fonction zêta usuelle

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \qquad |1|=1$$

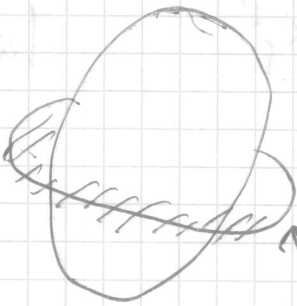
"couper une variété en tranches"

(pour une fonction L une vie de l'entier)



ne multe p^s Spec $\mathbb{Z}$

X tranche



défectueuse seulement de 1 au plus $1/n$ pour tout n.

pour les points de X défectueuse de n

$\Longrightarrow$ droit défectueuse

situation analytique :

$$\prod \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^{-s}}\right) = z(s)$$

fonction analytique $Re(s) > 1$ $\qquad \underline{\alpha_\rho \geq 0}$

pôle en $s = 1$

$\Rightarrow \quad |\alpha_\rho| \leq \rho \quad$ sinon le terme aurait déjà un pôle plus loin

Rankin

th. des fns modulaires

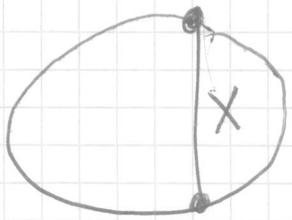
produit eulerien dont ils auraient les pôles $\quad \alpha_\rho^2 \quad |\alpha_\rho^2| \leq \rho^{1}$

$|\alpha_\rho| \leq \rho^{1/2}$

éq. fonctionnelle

on peut améliorer un peu plus

Langlands remarque : "si on avait pour les ~~fonctions~~ puissances symétriques (...) on gagnerait par cette astuce"



H^1 à support propre

H^1_c injectif

droite

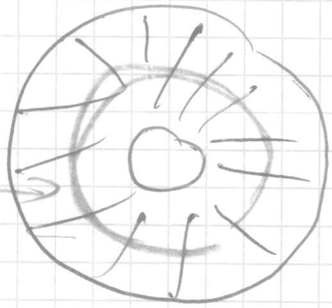
H^2_c dénominateur

H^2_c on le contrôle par dualité de Poincaré

$H^0(- -)$

on s'arrange pour que H^2_c soit de dimension 1

groupe de monodromie
agit



on ne revient pas
à la même
solution

équation différentielle
linéaire

monodromie = revenir à
la même solution

Weil I monodromie ouvert dans Sp
symplectique.

ce n'est pas nécessaire

marche dès que la rep. est absolument
irréductible

contrôle les pôles
de la fonction L $\longrightarrow$ $\boxed{\text{on applique les résultats}}$

Weil II.