OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN

notes informelles sur l'exposé de Jean-Louis Colliot-Thélène
prises par Javier Fresán

Soit X une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$. On voudrait étudier l'ensemble $X(\mathbb{Q})$ des points rationnels de X. Par exemple, répondre aux questions : est-il vide ? Est-il Zariski dense dans X ? Est-il dense dans $X(\mathbb{R})$? (1)

Rappelons que, pour un premier p, le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ pour la norme $|p^n \frac{u}{v}| = p^{-n}$, avec $(u,p) = (v,p) = 1$. Pour k un corps de nombres, on notera Ω_k l'ensemble des places de k et k_v la complétion en v, qui peut être $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Soit X une variété projective et lisse définie sur k. Puisque k se plonge dans k_v pour tout v, on peut voir $X(k)$ à l'intérieur de

$$\prod_{v\in\Omega} X(k_v),$$

que l'on munit de la topologie produit. L'avantage de cet espace est qu'il est facile de décider s'il est non vide. Par exemple, si X est donné par l'équation $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ sur $k = \mathbb{Q}$, on voit aussitôt que X n'admet pas de solution non triviale dans $\mathbb{Q}_3$. Lorsque

$$\overline{X(k)}^{\text{top}} = \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$$

on dit que l'*approximation faible* vaut pour X. Par exemple, l'approximation faible pour $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ suit du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\prod_{v\in S} \mathbb{Q}_v$ pour n'importe quel ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$.

1. Pour les schémas X définis sur $\mathbb{Z}$, on sait démontrer (solution négative au dixième problème de Hilbert) qu'il n'existe pas d'algorithme universel pour déterminer si $X(\mathbb{Z})$, l'ensemble des points entiers, est vide ou non. Par contre, la question reste ouverte pour $X(\mathbb{Q})$. Voir **[Po08]**.

1. Quelques exemples

1.1. Les coniques. — Considérons la conique d'équation

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0$$

dans $\mathbb{P}^2_k$. À chaque $v \in \Omega$ on associe $(a,b)_v \in \mathbb{Z}/2$ défini comme suit :

$$(a,b)_v = 0 \Leftrightarrow X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0 \text{ a une solution dans } k_v$$

Le théorème « local-global » suivant remonte au 18ème siècle (Legendre, Gauß) :

Théorème 1. — *Soit $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ la conique d'équation*

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0,$$

avec $a, b \in \mathbb{Q}$ [2]*. Alors :*

(a) *$X(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ si et seulement si $X(\mathbb{Q}_v) \neq \varnothing$ pour toute place v.*

(b) $\sum_{v\in\Omega}(a,b)_v = 0 \in \mathbb{Z}/2$.

Comme application directe de (b) on trouve :

Corollaire 2. — *Fixons une place v_0. Si $X(\mathbb{Q}_v) \neq \varnothing$ pour tout $v \neq v_0$, alors $X(\mathbb{Q}_{v_0}) \neq \varnothing$, et donc $X(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$.*

En fait, l'énoncé (b) équivaut aux lois de réciprocité quadratique [3]

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

pour p et q des premiers impairs.

Pour les coniques on a également l'approximation faible car, si $X(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$.

1.2. Les quadriques. — Voyons une méthode due à Hasse pour ramener au cas précédent l'étude d'une variété donnée par une équation à 4 variables. Soit X la variété affine

$$ax^2 + by^2 = cz^2 + dt^2 \neq 0.$$

Notons S l'ensemble des mauvaises places. Supposons qu'il existe une solution x_v, y_v, z_v, t_v dans k_v et notons λ_v la valeur commune $ax_v^2 + by_v^2 = cz_v^2 + dt_v^2$. Le passage de 3 à 4 variables est possible grâce au *deus ex machina* :

---

2. Le théorème vaut également pour des coniques définies sur un corps de nombres, grâce au travail de Hilbert (1895).

3. Pour le démontrer il faut savoir que le symbole $(a,b)_v$ est bilinéaire.

***Théorème 3* (Dirichlet pour $k = \mathbb{Q}$).** — [4] *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_0 \in k^\times$ tel que*

(i) $|\lambda_0 - \lambda_v|_v < \varepsilon$ *pour* $v \in S$

(ii) $\lambda_0/\lambda_v > 0$ *si v est une place réelle*

(ii) $(\lambda_0) = \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{q}_j | S} \mathfrak{q}_j{}^{n_j}$ *(il y a un seul premier en dehors de S qui divise λ_0)*

Soit $\varepsilon > 0$ petit et $\lambda_0 \in k^\times$ donné par le théorème de Dirichlet. Les coniques $ax^2 + by^2 = \lambda_0$ et $cz^2 + dt^2 = \lambda_0$ ont un point dans tous les k_v, sauf peut-être pour $v = \mathfrak{p}$. D'après le corollaire 2, $X(\mathbb{Q})$ est non vide.

1.3. Le principe de Hasse. —

Définition 1. — *On dit que le principe de Hasse vaut pour une classe de k-variétés si pour toute variété X dans la classe, l'existence d'un point rationnel sur X dans tous les complétés k_v entraîne l'existence d'un point rationnel sur X :*

$$\prod_{v \in \Omega} X(k_v) \neq \varnothing \Rightarrow X(k) \neq \varnothing. \tag{PH}$$

Le principe de Hasse doit son nom à la démonstration de cet énoncé par Hasse pour les quadriques de dimension quelconque.

Soit F un corps (pas forcément un corps de nombres). Un *espace principal homogène* (ou torseur) sous un F-groupe algébrique G est une F-variété non vide X, munie d'une action de G telle que

$$\begin{aligned} G \times X &\xrightarrow{\sim} X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (gx, x) \end{aligned}$$

soit un isomorphisme de variétés.

***Exemple 4* (L'équation norme).** — Soit K/k une extension finie, disons $K = \oplus k e_i$. Considérons l'équation norme

$$c = N_{K/k}(\Xi)$$

où $c \in k^\times$ et $\Xi = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ est un élément de K. La variété ainsi définie est un espace principal homogène sous le groupe formé des éléments de norme 1.

***Théorème 5* (Hasse).** — *Si K/k est une extension cyclique, alors le principe de Hasse vaut pour $c = N_{K/k}(\Xi)$.*

---

4. Pour $k = \mathbb{Q}$, il s'agit essentiellement du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Théorème 6 **(Eichler, Kneser, Harder, Chernousov)**
Soit G/k un groupe algébrique semisimple et simplement connexe. Alors le principe de Hasse vaut pour les torseurs sous G.

On ne sait pas démontrer ce théorème de manière uniforme, c'est-à-dire sans faire appel à la classification des groupes semisimples et simplement connexes.

Partant de ce théorème, on a le résultat suivant, qui généralise le cas des quadriques :

Théorème 7 **(Harder)**. — *Si X/k est une variété projective qui est un espace homogène d'un k-groupe algébrique linéaire connexe, alors le principe de Hasse vaut pour X.*

1.4. Résultats épars. — Soit $X_3 \subset \mathbb{P}^3_k$ une surface cubique lisse [5] dans $\mathbb{P}^3$. Alors $X_3 \times_k \bar{k}$ contient 27 droites. Notons S_n un ensemble de n droites globalement invariantes par l'action de Galois et gauches deux à deux. Alors le principe de Hasse vaut pour les X_3 contenant S_n pour $n = 2, 3$ ou 6.

Soit $X_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$ une intersection complète lisse de deux quadriques (aussi connue comme surface de Del Pezzo de degré 4). Si $X_{2,2} \supset S_2$, alors le principe de Hasse vaut.

Exercise 1. — Démontrer que le principe de Hasse vaut pour $X \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^4$ définie par l'équation

$$\sum_{i=1}^{5} a_i(t) x_i^2 = 0$$

où $a_i(t) \in k[t]$ sont non nuls.

2. ... et des contre-exemples

Le premier contre-exemple au principe de Hasse a été trouvé par Hasse et Witt en 1934. Il s'agit d'une équation norme pour $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ sur $\mathbb{Q}$, qui est une extension de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Faisons une liste d'autre exemples célèbres :

- La courbe de genre un donnée par l'équation $2y^2 = x^4 - 17$ (Reichardt, Lind, 1940) ;
- La courbe de genre un d'équation $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ (Selmer) ;
- La surface cubique lisse $5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0$ (Cassels et Guy, 1966) ;
- La surface fibrée en coniques $y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$ (Iskovskikh, 1970) ;

5. Mordell avait conjecturé que le principe de Hasse vaut pour toutes les surfaces cubiques lisse, mais ceci n'est pas vrai, voir ci-dessous.

– La surface de Del Pezzo de degré 4 $X_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$ (qui ne contient pas une paire de droites conjuguées) donnée par l'intersection

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = uv \\ x^2 - 5z^2 = (u+v)(u+2v) \end{cases}$$

(Birch et Swinnerton-Dyer, 1974).
– Travaux de Tate, de Nakayama et de Voskresenskiĭ pour les espaces homogènes de tores ;
– Travaux de Cassels et de Tate (« suite exacte duale ») pour les espaces homogènes de variétés abéliennes.

On trouve aussi de nombreux contre-exemples à l'approximation faible.

Derrière tous ces contre-exemples il y a une loi de réciprocité.

3. Le groupe de Brauer

Soit F un corps. Notons $\overline{F}$ une clôture séparable de F et $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Rappelons qu'une algèbre centrale simple est une algèbre A sur F qui devient une algèbre de matrices sur $\overline{F}$, c'est-à-dire telle qu'il existe un isomorphisme (non canonique) $A \otimes_F \overline{F} \cong M_n(\overline{F})$. Les classes d'isomorphismes de ces objets forment un groupe par rapport au produit tensoriel $A \otimes_F B$, l'élément neutre étant la classe des algèbres de matrices sur F. C'est le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$. On montre qu'il est de torsion (cf. Serre, *Corps locaux*).

Exemple 8. — Soient a, b deux éléments de $F^\times$. On note (a, b) l'algèbre de quaternions $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$. Alors $(a, b) \in \mathrm{Br}\, F[2]$.

Théorème 9. — $\mathrm{Br}(F) = H^2(G, \overline{F}^\times)$.

Pour un schéma X, on peut également définir un groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ en remplaçant les algèbres centrales simples par des algèbres d'Azumaya, leurs analogues naturels, de sorte que $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec} F) = \mathrm{Br}(F)$. On a toujours une injection

$$\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow H^2_{\text{et}}(X, \mathbb{G}_m)_{\text{tor}}.$$

Sous des hypothèses très larges (X quasi-projective sur un anneau), Gabber et de Jong ont démontré que c'est un isomorphisme. Lorsque de plus X est régulier, on a $\mathrm{Br}(X) \simeq H^2_{\text{et}}(X, \mathbb{G}_m)$.

Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps F de caractéristique zéro. On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(F(X)) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(F(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où la somme décrit les points de codimension 1 de X et l'application « résidu » ∂_x est donnée par des formules explicites sur les "symboles". Par exemple, lorsque l'on regarde la classe de l'algèbre de quaternions $(a,b) \in \mathrm{Br}(F(X))$,

$$\partial_x((a,b)) = (-1)^{v_x(a)v_x(b)} \left(\overline{\frac{a^{v_x(b)}}{b^{v_x(a)}}}\right) \in F(X)^*/F(X)^{*2}.$$

L'avantage de la définition cohomologique, telle qu'elle est donnée dans les exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer, est qu'elle entraîne aussitôt la fonctorialité de $\mathrm{Br}(X)$. Chaque point rationnel $x : \mathrm{Spec}(F) \to X$ donne lieu à un homomorphisme $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(F)$, d'où

$$\begin{aligned} X(F) \times \mathrm{Br}(X) &\longrightarrow \mathrm{Br}(F) \\ (x, \alpha) &\longmapsto \alpha(x). \end{aligned}$$

Soit k un corps de nombres. Rappelons que $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = 0$ et $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$.

Théorème 10. —

(a) *On a un plongement naturel $i_v : \mathrm{Br}\, k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est un isomorphisme pour toute place finie v.*

(b) *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\, k \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega} \mathrm{Br}\, k_v \xrightarrow{\sum i_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Remarquons que, appliquée à l'élément $(a,b) \in \mathrm{Br}\, k$, la suite exacte redonne la partie (b) du théorème de Legendre et Gauß.

Définition 2. — *Soit X/k une variété projective et lisse. Regardons ses points adéliques $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$. On définit $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ comme le noyau à gauche de l'accouplement*

$$\begin{aligned} X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((P_v), A) &\longmapsto \sum_{v\in\Omega} i_v(A(P_v)), \end{aligned}$$

cette dernière somme étant finie car X est projective.

Le début du point de vue moderne est cette remarque due à Manin :

***Théorème 11* (Manin, 1970).** — *On a*

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k).$$

Démonstration. — Soit $A \in \mathrm{Br}(X)$. Le résultat découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & X(k) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{ev}_A"] & X(\mathbb{A}_k) \arrow[d, "\mathrm{ev}_A"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(k) \arrow[r] & \bigoplus \mathrm{Br}(k_v) \arrow[r, "\sum i_v"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

Un argument topologique permet ensuite de montrer que $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ est fermé dans $X(\mathbb{A}_k)$, d'où $\overline{X(k)}^{\mathrm{top}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

Fait 1. — *Les contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible mentionnés ci-dessus s'expliquent tous par cette obstruction.*

Exemple 12. — Soit $C/\mathbb{Q}$ la courbe d'équation $2y^2 = x^4 - 17$. Notons $\mathcal{U} \subset C$ la partie où $y \neq 0$ et k le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$. On considère l'algèbre de quaternions $A = (y, 17)$ sur $\mathbb{Q}(C)$. On dispose alors du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{U}(\mathbb{Q}_p) \arrow[d, "\varphi_p"] & \\ \mathbb{Q}^*/Nk^* \arrow[r] & \bigoplus_p \mathbb{Q}_p^\times/Nk_p^\times \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \\ \mathrm{Br}\,\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\bigcap" rotate] & \bigoplus \mathrm{Br}\,\mathbb{Q}_p \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\bigcap"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "\bigcap"] \end{tikzcd}$$

où la flèche φ_p est donnée par évaluation en y. On démontre que, pour $p \neq 17$, $\varphi_p(\mathcal{U}(\mathbb{Q}_p)) = 1$ mais que $\varphi_{17}(\mathcal{U}(\mathbb{Q}_{17}))$ ne contient pas 1.

Bien que tous les contre-exemples donnés s'expliquent par l'obstruction de Brauer-Manin, il est parfois difficile d'expliciter les éléments du groupe de Brauer qui sont responsables. Il y a un algorithme pour décider si une surface cubique diagonale $X/\mathbb{Q}$ satisfait $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, mais il n'est pas simple.

Ceci amène aux questions suivantes :

1. A-t-on $\overline{X(k)}^{\mathrm{top}} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$?

   La réponse est en général négative, comme le montrent les contre-exemples de Skorogoratov [**Sk99**] et Poonen [**Po10**].

2. Comment calculer $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$? Sous-question : comment calculer $\mathrm{Br}\,X$?

3. Y a-t-il des classes de variétés pour lesquelles $\overline{X(k)}^{\mathrm{top}} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$?

Proposition 13. —

(a) *Soit X une courbe projective et lisse de genre au moins un, définie sur un corps de nombres k. Alors* $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ *est infini.*

(b) *Soit X/k une variété telle que $X \times_k \bar{k}$ soit birationnelle à $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ (ou plus généralement, telle que $X \times_k \bar{k}$ soit rationnellement connexe). Alors le groupe* $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ *est fini*[(6)].

On peut se poser la question suivante

Question 1. — *Si X/k est une variété géométriquement rationnellement connexe, a-t-on $\overline{X(k)}^{\text{top}} = X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$?*

En dimension 2, c'est l'objet d'une conjecture faite dans les années 1970 :

***Conjecture 14* (Colliot-Thélène et Sansuc).** — *Soit X une surface définie sur un corps de nombres k telle que $X \times_k \bar{k}$ soit birationnelle à $\mathbb{P}^2_{\bar{k}}$. Alors*

$$\overline{X(k)}^{\text{top}} = X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}.$$

Les surfaces géométriquement rationnelles se divisent en deux grandes classes k-birationnelles : les surfaces de Del Pezzo et les surfaces fibrées en coniques

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t) X_i^2 = 0.$$

Question 2. — *(Skorobogatov) Est-il vrai que, pour une courbe de genre quelconque, $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \varnothing$ implique $X(k) \neq \varnothing$?*

Question 3. — *Est-il vrai que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \varnothing$ implique $X(k) \neq \varnothing$ si X est surface K3*[(7)] *?*

On a déjà mentionné que $\operatorname{Br}(X)/\operatorname{Br}(k)$ est infini pour une courbe de genre $g \geq 1$. Dans le cas d'une surface K3, Skorobogatov et Zarhin **[SZ08]** ont montré que ce quotient est fini.

Stoll, Bruin et Flynn ont fait des expériences numériques pour voir si la réponse à la question 2 est positive pour les courbes de genre 2 données sur $\mathbb{Q}$ par

$$y^2 = a_o x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad -3 \leq a_i \leq 3.$$

6. Même lorsque le groupe est fini, disons $\mathbb{Z}/3$, il n'est pas évident de décider si l'ensemble $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ est vide (ceci revient à trivialiser un 3-cocycle)

7. Par exemple, une surface donnée par une équation $\sum_{i=0}^{3} a_i X_i^4 = 0$, avec $a_i \in \mathbb{Q}^\times$

Ils utilisent la « crible de Mordell-Weil », une méthode qui part d'un plongement de X dans sa jacobienne J et qui consiste à regarder des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \longrightarrow & J(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\mathbb{F}_v) & \longrightarrow & J(\mathbb{F}_v) \end{array}$$

pour v variant parmi les places de $\mathbb{Q}$, et aussi les diagrammes analogues en utilisant les réductions modulo les puissances d'un idéal premier. Sous l'hypothèse de finitude du groupe de Tate-Shafarevich, le crible de Mordell-Weil est essentiellement équivalent à l'obstruction de Brauer-Manin. Stoll, Bruin et Flynn démontrent un résulat qui, modulo quelques autres conjectures, implique que, si la courbe X n'a pas de points rationnels alors $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$.

Voici un résultat général inconditionnel.

Théorème 15. — **[CTSaSD]** *Soit $P \in k[t]$ un polynôme de degré 4. Soit X la surface de Châtelet $y^2 - az^2 = P(x)$. Alors $\overline{X(k)}^{\mathrm{top}} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. Si P est irréductible, alors $\overline{X(k)}^{\mathrm{top}} = X(\mathbb{A}_k)$, c'est-à-dire que dans ce cas le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.*

La preuve utilise la méthode des fibrations et la méthode de la descente ; expliquons très brièvement de quoi il s'agit.

3.1. La méthode des fibrations. — Soit $X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration. On voudrait démontrer des propriétés pour X tout entier à partir de la connaissance de ces propriétés pour les fibres X_m, où $m \in \mathbb{P}^1(k)$. Par exemple, supposons le principe de Hasse pour les fibres et $\prod X(k_v) \neq \varnothing$: peut-on conclure qu'il existe $m \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $X(\mathbb{A}_k) \neq \varnothing$?

Exemple 16. — Quand toutes les fibres sont géométriquement intègres, on arrive à faire marcher la machine (**[Harari]**), mais sur l'exemple

$$y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2),$$

fibration en coniques (via $(x, y, z) \mapsto x$) avec des fibres réductibles en $\pm\sqrt{2}$ et $\pm\sqrt{3}$ on voit qu'il y a de sérieuses difficultés.

Voyons un exemple où cela marche (voir **[CTSaSD]**) :

Exemple 17. — Soit $X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques contenant deux droites gauches globalement rationnelles. Elles engendrent H_0, une copie de $\mathbb{P}^3_k \subset \mathbb{P}^5_k$. En prenant des sections par les $\mathbb{P}^4_k$ contenant H_0, on obtient une fibration $X' \to \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$ contenant deux droites gauches conjuguées.

3.2. La méthode de la descente. — Soit X une k-surface projective et lisse possédant un ouvert affine U d'équation $y^2 - az^2 = P(x)Q(x) \neq 0$. Pour tout $c \in k^\times$, soit U_c la variété définie par

$$\begin{cases} u_1^2 - av_1^2 = c.P(x) \neq 0 \\ u_2^2 - av_2^2 = c^{-1}.Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

La projection $p_c : U_c \to U$ fait de U_c un torseur sur U sous le k-tore des éléments de norme 1 dans K. Ce torseur s'étend en un torseur $Y_c \to X$. On a

$$X(k) = \bigcup_{c \in k^\times/\mathrm{N}k^\times} p_c(Y_c(k)).$$

Un cas particulier simple de la méthode de la descente (Colliot-Thélène et Sansuc) est l'énoncé suivant

Théorème 18 (**[CTCS]**). — *Si $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$, alors il existe $c \in k^\times$ avec $Y_c(\mathbb{A}_k) \neq \varnothing$.*

On renvoie à **[CTSa87]** et au livre **[Sk]** pour le développement général de cette théorie, et en particulier la notion de torseur universel.

Cette technique a été utilisé récemment par Browning, Matthiesen et Skorobogatov **[BMS]** pour démontrer que, si la surface X est donnée par l'équation

$$y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{N} (x - e_i)$$

où les e_i sont des nombres rationnels, alors $X(\mathbb{Q})$ est Zariski dense dans X et

$$\overline{X(\mathbb{Q})}^{\mathrm{top}} = X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})^{\mathrm{Br}}.$$

La preuve s'appuie sur des travaux précédents de Matthiesen et sur des résultats en théorie analytique des nombres de Green, Tao et Ziegler **[GT]** sur les équations $x_i^2 - ay_i^2 = \ell_i(u,v) \neq 0$, où les ℓ_i sont des formes linéaires en deux variables. C'est une très grande avance, mais il y a des limitations : le résultat est seulement valable sur $\mathbb{Q}$ et pour des polynômes ayant des racines dans le corps de base. En particulier, ceci ne couvre pas le cas des polynômes irréductibles, pour lequel on s'attend à que le principe de Hasse vaille.

Expliquons pour terminer pourquoi on s'attend à ce résultat.

Une conjecture (BKS = Bouniakowsky, Dickson, Schinzel) connue en théorie analytique des nombres postule que si l'on considère une famille finie de polynômes irréductibles $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $i \in I$, premiers entre eux, à coefficients dominants positifs et tels que de plus la famille d'entiers $a_m = \prod_{i \in I} P_i(m)$ pour m variant dans $\mathbb{Z}$ n'a pas de diviseurs commun non trivial, alors il existe une infinité d'entiers n tels que chacun des $P_i(n)$ soit un nombre premier. Cette conjecture n'est connue que pour I réduit à un élement et un polynôme linéaire $at + b$: c'est le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans une progression arithmétique. Déjà le cas des nombres premiers jumeaux (deux polynômes, t et $t + 2$) n'est pas connu.

C'est une observation datant de 1979 ([**CTSa82**]) que si cette conjecture vaut, alors sur le corps des rationnels, tout système d'équations

$$y_i^2 - a_i z_i^2 = P_i(x) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

avec les $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ et les $P_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ des polynômes irréductibles satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible. Comme remarqué en 1992 par J.-P. Serre, cet énoncé vaut sur tout corps de nombres.

Faute de pouvoir établir l'existence de points rationnels, on se contente parfois d'établir l'existence d'un zéro-cycle de degré 1, c'est-à-dire d'établir que le pgcd des degrés des extensions finies K/k sur lesquelles une k-variété X acquiert un K-point est égali à 1.

Pour ce faire, on utilise une méthode initiée par P. Salberger (1988), qui consiste en fait à utiliser un substitut à la conjecture BKS. Le cas le plus simple à expliquer est celui des nombres premiers jumeaux. On peut très facilement montrer : pour tout entier $N \geq 2$ on peut trouver une extension $k/\mathbb{Q}$ de degré N et un élément α entier dans K tel que α et $\alpha + 2$ soient premiers, à des facteurs au-dessus de 2 près. On trouvera plus de détails sur cet exemple à la fin de [**CTTrichy**]. On utilise alors un argument comme l'argument de [**CTSa82**] sur des extensions finies de k de degrés premiers entre eux.

Bbibliographie

[BMS] T. Browning, L. Matthiesen, A. N. Skorobogatov, *Rational points of pencils of conics with many degenerate fibers*, arXiv, 2012.

[CTFermat] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique des variétés rationnelles*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (6) **I** (1992) 295-336.

[CTTrichy] J.-L. Colliot-Thélène, *The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties*, in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, K. Murty and M. Waldschmidt ed, Contemp. Math. vol. **210**, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 1998), pp. 19–39.

[CTSa82] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arithmetica **XLI** (1982) 33-53.

[CTSa87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987) 375-492.

[CTCS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. für die reine und ang. Math. (Crelle) **320** (1980) 150-191.

[CTSaSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, I, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **373** (1987) 37-107 ; II, ibid. **374** (1987) 72-168.

[GT] B. Green, T. Tao, *Linear equations in primes*, Annals of Math. **171** (2010), 1753-1850.

[Harari] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994) 221–260.

[Po08] B. Poonen, *Undecidability in number theory*, Notices AMS vol. **55** (2008), 3, 344-350.

[Po10] B. Poonen, *Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers*, Ann. of Math. **171** (2010), 3, 2157-2169.

[Sk99] A. N. Skorobogatov, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), 2, 399-424.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[SZ08] A. N. Skorobogatov, Yu. G. Zarhin, *A finiteness theorem for the Brauer group of abelian varieties and K3 surfaces*, J. Algebraic Geometry **17** (2008), 3, 481-502.