RéGA, 14 novembre 2012

A. BEAUVILLE. – Le problème de Lüroth

1875 J. Lüroth $C \subset \mathbb{C}^2$ $F(x,y)=0$

Math. Annalen 2 p.

$\exists\, t \mapsto (x(t), y(t))$ t.q. $F(x(t), y(t)) = 0$

$\Rightarrow \exists\, u \mapsto (x(u), y(u))$ t.q. génériquement bijective

(point de vue birationnelle) 

géométriquement :

$$\exists \begin{array}{c} \mathbb{P}^1 \\ \vdots \\ \downarrow \\ C \end{array} \Rightarrow \mathbb{P}^1 \overset{\sim}{\dashrightarrow} C$$

algébrique :

si $\mathbb{C} \subset \underset{\underset{K}{\parallel}}{\mathbb{C}(x,y)} \subset \mathbb{C}(t)$, alors $\exists\, K \simeq \mathbb{C}(t)$.

[dém. algébrique assez tortueuse

1857 surfaces de Riemann $\rightsquigarrow$ $\begin{array}{c}\mathbb{P}^1\\ \downarrow \\ C\end{array}$ surface de Riemann compacte sans forme holomorphe]

1890 – 1900

Castelnuovo – Enriques surfaces algébriques

Une des 1ères questions : généraliser Lüroth $\Rightarrow$ 1895

(Th difficile même aujourd'hui)

V unirationnelle si $\exists\, \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$ dominante

(surjective sur un ouvert de Zariski)

rationnelle si $\exists\, \mathbb{P}^n \overset{\sim}{\dashrightarrow} V$

Problème de Lüroth : unir $\overset{?}{\Rightarrow}$ rat

$\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(t_1, \dots t_n)$

corps alg. clos quelconque

<u>Question</u> : $K \simeq \mathbb{C}(x_1, \dots x_p)$?

$\boxed{1912}$ Enriques (2 pages) antérieure

$V_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ unirat. non rat.

int. complète <u>lisse</u> d'une quad et une cubique

ce qu'il démontre

Fano 1908 beaucoup d'idées mais technique insuffisante

problèmes birat. très semblables aux

Roth ~ 1955 1er lecteur de Enr.

"Algebraic threefolds"

Ex indémontable : V telle que $\mathrm{Pic}(V)[2] \neq 0$

fournit un revêtement double $\Rightarrow \pi_1(V) \neq 0$

en général c'est la torsion du $H^2(\ )$

Serre 1959 : unirat $\Rightarrow \pi_1 = 0$

Auteurs	Exemple	Méthode
Clemens-Griffiths	$V_3 \subset \mathbb{P}^4$	$J(V)$ Jacobienne intermédiaire — seul. en dim 3
Manin Iskovskih	$V_4 \subset \mathbb{P}^4$ jamais rat. (un ex. où de Segre c'est unirat)	$\mathrm{Bir}(V)$ c'est fini ← une des idées de Fano
Artin-Mumford	spécifique	diff. de mettre en œuvre. Torsion $H^3(V, \mathbb{Z})$ invariant birationnelle variété pour laquelle n'est pas triviale ⇝ cohomologie non ramifiée

les 3 utilisent Hironaka

Exemple : V K_V^{-1} très ample tel que $\mathrm{Pic}(V) = \mathbb{Z}[K_V]$

"variété de Fano de 1ère espèce" (Roth)

V	unir	rat	méthode
$V_4 \subset \mathbb{P}^4$	certaines (quest. générales ?? pas connu ?)	non	$\mathrm{Bir}(V)$

$V_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$	oui	non géner	$J(V)$, $\mathrm{Bir}(V)$
$V_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$	oui	non	$J(V)$
$V_{10} \subset \mathbb{P}^7$	oui	non géne.	$J(V)$
$V_{12}, V_{16}, V_{18}, V_{22}$	oui	oui	
V_{14}	oui	non	$J(V)$

↳ birat. équivalente à $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ de Clemens-Griffiths

<u>géner</u> : ouvert de Zariski de l'espace de modules qu'on <u>sait pas préciser</u>

<u>Thm</u> V : $\sum x_i = \sum x_i^2 = \sum x_i^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^6$

et unir. non rat.

- éq. explicite
- beaucoup plus simple
- donne qqchose sur les sous groupes finis du Cremona à 3 variables

C courbe de genre g

$$H^1(C,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(C,\mathbb{C}) = \overset{\text{forme hol.}}{H^{1,0}} \oplus \overset{\text{forme antihol.}}{H^{0,1}} \simeq \mathbb{C}^g$$

$H^1(C,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$, $\quad H^{1,0} \simeq \mathbb{C}^g$ conjugués

l'image de $H^1(C,\mathbb{Z})$ est un réseau dans $H^{0,1}$

donc $JC = H^{0,1}/H^1(C,\mathbb{Z}) \quad (= V/\Gamma)$

$E : H^1(C,\mathbb{Z}) \times H^1(C,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ cup produit

alternée unimodulaire

$E_{\mathbb{R}}$: forme alternée sur $H^{0,1}$

$E_{\mathbb{R}}(ix, y) = E_{\mathbb{R}}(x, y)$

$E_{\mathbb{R}}(x, ix) > 0$ si $x \neq 0$

$$H^2(JC,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Alt}^2(\Gamma,\mathbb{Z})$$

$JC = V/\Gamma$, $\quad [E] \in H^{1,1}(V/\Gamma)$

donc classe de Chern d'un fibré sur JC

d'après Lefschetz. $\quad [E] = c_1(L)$

$L \in \mathrm{Pic}(JC)$ <u>ample</u>

défini à transl. près

Kodaira

unimodulaire $\xRightarrow{\text{Riemann-Roch}}$ $h^0(L) = 1$

diviseur Θ, bien défini à trans. près

$$H^3(V, \mathbb{Z}) \subset H^3(V, \mathbb{C}) = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3}$$

il peut y avoir torsion

$\mathbb{P}^n \dashrightarrow V$ $\Longrightarrow$ $H^{3,0} = H^{0,3} = 0$.

défini en codim 1, donc pullback d'une forme hol $\Rightarrow$ forme hol.

$$J(V) = H^{1,2} / H^3(V, \mathbb{Z})$$ muni d'un diviseur Θ

jacobienne intermédiaire

une polarisation principale

critère de Clemens-Griffiths

dim 3, lisse proj.

si V est rat., $J(V) \simeq JC_1 \times \dots \times JC_p$.

Idée de la preuve

Supposons $\mathbb{P}^3 \overset{\sim}{\dashrightarrow} V$.

$$\begin{tikzcd} & P = \text{éclatement des points ou courbes lisses} \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\sim"] & V \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} J(B_p(V)) = J(V) \\ J(B_C(V)) = J(V) \times J(C) \end{cases}$$

donc : $J(P) = JC_1 \times \dots \times JC_p$

$$H^3(P, \mathbb{Z}) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} H^3(V, \mathbb{Z})$$

$$f_* f^* = Id_{H^3(V,\mathbb{Z})}$$

donc $H^3(V, \mathbb{Z})$ est un facteur direct de $H^3(P, \mathbb{Z})$.

s'étend aux structures de Hodge

$\Longrightarrow$ $J(V)$ est un facteur direct de $J(P)$

c-à-d : $J(P) \simeq J(V) \times A$ comme VAPP.

$JC_1 \times \dots \times JC_p \simeq J(V) \times A$ décomposition unique !

l'autre ex :

Th. d'Eichler : formes quadratiques sur $\mathbb{Z}$

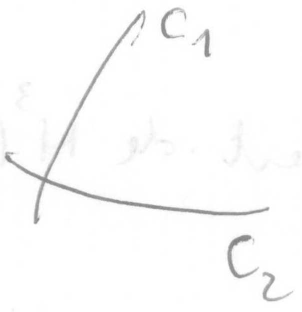
$$(A, \Theta_A) \times (B, \Theta_B) = (A \times B, \Theta_A \times B + \Theta_B \times A)$$

Si les diviseurs sont irréductibles, ils déterminent complètement le produit.

Depuis <u>Riemann</u> : le diviseur Θ d'une jacobienne est irréductible (dempt. générique)

$$\Rightarrow J(V) = JC_{i_1} \times \dots \times JC_{i_q} \qquad \square$$

<u>Subtlety</u> : quand est-ce qu'une var. ab. est une jacobienne ?



courant nouveau

Avoir en tête le cas d'une seule jacobienne.

<u>unirationnel</u> (d'après Enriques)
il y a beaucoup de courbes elliptiques (coupées par des plans)

<u>Dém du théorème</u>

$$V : \sum X_i = \sum X_i^2 = \sum X_i^3 = 0 \text{ dans } \mathbb{P}^6$$

n'est pas rationnelle.

action de S_7 sur $\boxed{J(V)}$

construction complet.-conjugé

5

<u>lemme</u> : pas de sous-variétés abéliennes de $J(V)$ où S_7 agit trivialement

$$T_0 J(V) = H^{1,2} = H^2(V, \Omega^1_V)$$

$\dim J(V) = 20$

↑ la repr. de S_7 = somme de 2 repr. irréductibles de dim 6 et 14.

<u>Étape 1</u> : $J(V) \neq J(C)$

$A_7 \subset \mathrm{Aut}(JV)$

si $JV = JC \Rightarrow A_7 \subset \mathrm{Aut}(JC)$
soit triviale soit injective

<u>Torelli</u> :

$$\mathrm{Aut}(JC) = \begin{cases} \mathrm{Aut}(C) \times \mathbb{Z}/2 & \text{si } C \text{ pas hyper.} \\ \mathrm{Aut}(C) & \text{si } C \text{ hyp.} \end{cases}$$

$$\# \mathrm{Aut}(C) \leq 84(g-1)$$
$$= 84 \times 19 < 1680$$

$$\# A_7 = 2520$$

Étape 2 :

$$JV \neq JC_1 \times \dots \times JC_p$$

Si $=$, A_7 opère en permutant les facteurs

$$JV = \underbrace{J_1 \times \dots \times J_p}_{A_7} \times \underbrace{J_{p+1} \times \dots \times J_q}_{A_7} \times \dots$$

A_7 opère sur $[1, p]$, $[p+1, q]$, ...

au plus 20 facteurs.

Résultat : si A_7 opère transitivement sur E, avec $\# E < 20$, alors $\# E = 1, 7, 15$

Aut du plan proj. de Fano sur $\mathbb{F}_2$

1 n'est pas possible

$p \dim + q \dim = 20$

n'a pas de sol.

Rem : marche aussi pour $\sum x_i^2 = \sum x_i^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^5$

$\to$ groupe S_6

cubique de Klein

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}/5} X_i^2 X_{i+1} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{P}^4$$

groupe d'automorphismes $\underbrace{PSL_2(\mathbb{F}_{11})}$

suff. grand pour faire le même argument

- dim 3 OK
- comportement en famille ?

aucun exemple où la rat. change

$\boxed{\text{dim} \geq 4}$ $J(V)$ n'est pas défini

Bir(V) renferait mais on n'a pas d'ex.

ex. en toute dimension un peu artificielles

de Fano : oui pour $V_n \subset \mathbb{P}^n$

$V_3 \subset \mathbb{P}^5$

Conjecture de Kuznetsov :

$J(V) \rightsquigarrow D(V)_{prim}$

cat. dérivée des faisceaux coh. sur V

V rat $\Leftrightarrow D(V)_{prim} \cong D(K3)$

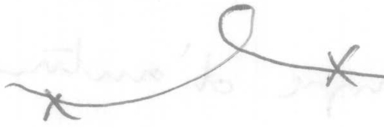
cette cubique est très liée à des surfaces K3 preprint de R. Thomas & ...

caractérisent les cubiques pour lesquels ceci se produit $\Rightarrow$ déformable à la conj ?

complètement ouvert !

rationnel $\Rightarrow$ unirationnel $\overset{?}{\Leftarrow}$ $\Rightarrow$ rat. connexe

~~exprimé~~



p q

$\forall p, q$ on peut les joindre par des courbes rationnelles

Motivation originale :

$G_n = Bir(\mathbb{P}^n)$ groupe de Cremona

$G_1 = PGL(2) \hookleftarrow A_5$

$\boxed{G_2}$

sous-groupes finis (Dolgachev, Iskovskikh) $\mathbb{P}^2$, rev. double

simples : A_6 (1) $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ (2)

fois que ceci apparaît

G_3

$\uparrow$

Prokhorov A_7, $PSp(4, \mathbb{F}_3)$ (2) $SL(2, \mathbb{F}_8)$ (1)

groupe de Weyl de E_6 mod 60

Cor A_7 a un seul plongement dans G_3 à conj. près.

Cor 2 $S_7 \not\subset Cr_3$

Peut-on le déduire du Cor 1?

Tout ce que Prokhorov dit pour un groupe simple est vrai aussi pour S_7.

G groupe fini

$Cr\,\dim(G) = \min\{n \mid G \subset Cr_n\}$

lié à sa dimension essentielle ?

$Cr\,\dim S_4 = 1$

$S_5 = 2$ surface de del Pezzo de deg 5

$\sum X_i = \sum X_i^2 = 0$ dans $\mathbb{P}^5$

$S_6 = 3$

$\Longleftarrow$ en toute dim.

$Cr\,\dim S_n \leq n-3$