J.B. BOST. – Algébrisation des fibrés vectoriels formels

SGA 2 1962

Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

1968 North Holland

2005 (Yves Laszlo) SMF

avatars en géo. alg. pure des résultats démontrés auparavant pour $k = \mathbb{C}$

① Théorème de Lefschetz

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ projective lisse dim n

$Y = X \cap \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$ lisse dim $n-1$

Lefschetz 1924

$$H_k(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme si $k < n-1$

surjective si $k = n-1$

Thom-Bott 1959 (Michigan J.)

X proj. lisse sur $\mathbb{C}$ de dim n

Y diviseur ample lisse

donne des inf. plus précises sur les grps d'hom.

Alors : X se déduit de Y "en adjoignant" des cellules de dimension réelle, $\geqslant n$ ← Théorie de Morse

Fulton 1987 PSPM 46

Castelnuovo-Enriques, Ann. ENS 1906 23 339-366

dim $X \geq 3$

Alors : $\Omega^1(X) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(Y)$

fns de 1ère espèce

(M. Noether italien)

$H^1(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(Y; \mathbb{Q})$ (Picard) "analysis situs"

$\dim_{\mathbb{Q}} H^1 = 2 \dim \Omega^1$

Toute variété abélienne est la variété de Picard d'une surface.

Picard : dim $X \geq 2$

$H_1(Y, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$

$\pi_1(Y, *) \twoheadrightarrow \pi_1(X, *)$

① (Picard-Simart 1897 t. I p. 86)

② Castelnuovo-Enriques ; p. 358 "cherchons ... "

② Algébrisation d'objets analytiques

• Puiseux 1850-1

$f \in \mathbb{C}[X,Y]$ $\quad f \notin \mathbb{C}$

Si f irréductible, la courbe plane $C = (f(x,y)=0)$ (éventuellement privé d'une partie finie) est connexe.

connexité Zariski $\Longleftrightarrow$ connexité analytique

• Riemann 1857

tout $\left\{\begin{array}{l} C \text{ surface de Riemann compacte connexe} \\ v : C \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ "revêtement ramifié"} \end{array}\right.$

est algébrique, i.e.

$C \simeq (f(x,y)=0)$

à un nombre fini de points près

$f \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ irréductible

$x = v$

Existence de y $\longleftarrow$ "analyse elliptique"

• Chow 1949

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$

sous-ensemble / ss. espace analytique fermé $\longleftarrow$ analytique

Zar.

$\Longrightarrow$ X sous-ensemble alg / sous-schéma fermé

• Poincaré - Lefschetz, Hodge
dim 2 1941

Kodaira - Spencer
↑ 1953
une des premières
utilisations
des faisceaux

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ variété projective complexe lisse

Tout fibré en droites analytique sur X est algébrique.

Théorème de Lefschetz (1,1) = conjecture de Hodge en codim 1

$\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$

α algébrique $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha = c_1(L)$ L fibré en droites algébriques

$\Longleftrightarrow \exists\, D$ diviseur sur X, $= [D]$.

α analytique $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha = c_1(L)$ L fibré en droites analytique

$\underset{KS}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha_{\mathbb{C}} \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$

$H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O})$
$\alpha \longmapsto 0$

regarder la suite exacte exponentielle

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}^{an} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^{an\,\times} \to 0$$

(partie formelle de l'argument $\Leftarrow$ Serre)

- Serre 1956 GAGA

X variété alg. complexe $\quad (X, \mathcal{O}_X) \quad$ $\mathcal{F}$ alg. cohérent

$\rightsquigarrow$ foncteur d'analytification

X^{an} espace analytique $\quad (X(\mathbb{C})^{an}, \mathcal{O}_X^{an})$

$\mathcal{F}^{an}$ anal. cohérent

<u>Théorème GAGA</u> :

X variété proj. complexe

- Th de $\boxed{\text{comparaison}}$

terminologie de Grothendieck

$$H^i(X;\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

- Théorème d'$\boxed{\text{existence}}$

Tout faisceau analytique cohérent sur X^{an} "est de la forme" $\mathcal{F}^{an}$, avec $\mathcal{F}$ algébrique cohérent sur X.

unique à isom unique près

<u>Remarques</u>

- $X = \mathbb{P}^N$, $\mathcal{F}$ = faisceaux d'idéaux associé à la variété

$\Rightarrow$ Chow

• contient ses projets

$$v : \tilde{X} \to X \quad \text{revêtement fini étale}$$

$$\text{GAGA} \updownarrow (1:1)$$

$$v^{an} : \tilde{X}^{an} \to X^{an}$$

se donner un rev fini étale

faisceau, structure d'algèbre, condition étale (sur le dominant)

$$\updownarrow (1:1)$$

revêtements topologiques finis de X^{an}

X connexe

$$\pi_1^{alg}(X, *) \simeq \pi_1(X^{an}, *)^{\wedge}$$

complété profini

Th. de comparaison "presque triviale"

$$\dots \to \mathcal{O}(-N)^{\oplus A} \to \mathcal{F} \to 0$$

il suffit de le savoir pour $\mathcal{O}(k)$.

Th d'existence : beaucoup plus sérieux !

Principe de la preuve de <u>Kodaira-Spencer</u>

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N \quad \text{projective lisse}$$

L fibré en droites analytique sur X

Y section hyperplane lisse $\quad Y = (s_0 = 0)$

$L_{|Y}$ est algébrique $\quad$ s_0 section de $\mathcal{O}(1)$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{s_0 \cdot} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

$\otimes L$ et des puissances de $\mathcal{O}(1)$

$$0 \to L \otimes \mathcal{O}_X(n-1) \xrightarrow[s_0]{} L \otimes \mathcal{O}_X(n) \to L_{|Y} \otimes \mathcal{O}_Y(n) \to 0$$

"coup magique" $\quad$ on regarde sur deux beaucoup de sections $s \in$ + Chow.

$$0 \to H^0(X, L(n-1)) \to H^0(X, L(n)) \twoheadrightarrow H^0(Y, L(n))$$

$$\hookrightarrow H^1(X, L(n-1)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, L(n)) \to H^1(Y, L(n))$$

$= 0 \qquad$ dim $\gg$ $\qquad$ $n \gg 0$ $\quad 0$ $\quad$ Kodaira "op. ell"

- pour tout M fibré en droites

$\dim H^1(X, M) < +\infty$ $\quad$ ou Cartan/Serre

analytique global

- $H^1(Y, L(n)) = 0 \quad n \gg 0$

$L(n)$ a beaucoup de sections sur Y

(3) SGA 2 $\quad$ jamais vu le sommet

Théorème (Gravert, Grothendieck)

X ($\hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$) proj. lisse de dim d

Y ($= X \cap \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$) diviseur ample

Gr 1 : si $d \geq 2$, alors pour tout fibré vectoriel E sur X

$$\Gamma(X, E) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{germes de sections} \\ \text{analytiques de } E \\ \text{le long de } Y \end{array} \right\}$$

injectivité facile

Gr 2 : si $d \geq 3$, tout germe de fibré vectoriel analytique le long de Y "se prolonge" en un faisceau cohérent sur X.

[nécessairement localement libre sur $X \setminus F$, F fini dans $X \setminus Y$, $F = \emptyset$ si rang $= 1$]

Commentaires

(α) analytique ⇝ formel

$\mathbb{C} \rightsquigarrow k$ ou

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & X \\ & & \downarrow \scriptstyle\text{proj.} \\ & & S \end{array}$$

diviseur de Cartier relatif ample, S noeth.

d dim des fibres ou profondeur ...

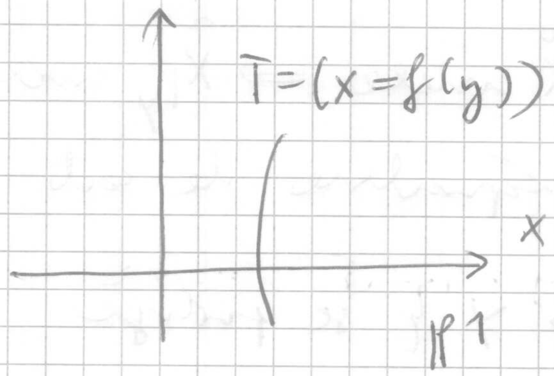
(β) hypothèse sur d

Cor 1 n'est pas vrai en dimension 1

$$* \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$E = \mathcal{O}_X$$

Cor 2 faux pour $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$



$f \in \mathbb{C}\{y\}$

Exo: $\mathcal{O}(T)$ est algébrisable

$\Longleftrightarrow f \in (\mathbb{C}y + \mathbb{C}) \setminus \{0\}$

[alg $\Leftrightarrow \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(T)$]

Cor 1 $\Rightarrow$ Puiseux (même sans hyp. d'irréductibilité)

X connexe $\Longrightarrow$ Y connexe

Théorème: X connexe, $* \in Y$

(1) $d \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} Y \text{ connexe} \\ \pi_1^{alg}(Y, *) \twoheadrightarrow \pi_1^{alg}(X, *) \end{cases}$

(2) $d \geq 3 \Rightarrow$ c'est un iso

<u>Rappel</u> : $Y \hookrightarrow X$ connexe

$\pi_1^{alg}(Y, *) \to \pi_1^{alg}(X, *)$ (1) surjective
(2) isomorphisme

reflète les propriétés du foncteur

$$r : \tilde{X} \to X \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{X}_{|Y} \xrightarrow{r_{|r^{-1}(Y)}} Y$$
fini étale

$\tilde{X}_{|Y} = r^{-1}(Y)$

(1) $\tilde{X}$ connexe $\Rightarrow \tilde{X}_{|Y}$ connexe

(2) équivalence de cat.

tout $\{\tilde{Y} \to Y\}$ se prolonge
fini étale en $\tilde{X} \to X$
f.é.

r fini
$r^{-1}(Y)$ ample

<u>Gr 1</u> : c'est connexe

Pour (2) interprétation avec complété profini : d'abord petit <u>voisinage</u>,
ensuite <u>Gr 2</u> + th. de finitude.

<u>Version formelle</u>

X noeth. $Y \hookrightarrow X$ sous-schéma fermé

$\mathcal{J}_Y$ faisceau d'idéaux

⑥

$$Y_0 = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n$$

épaississements successifs $\quad Y_n \quad \mathcal{J}_Y^{n+1}$

$$\hat{X}_Y \text{ "} = \varinjlim Y_n \text{"}$$

espace annelé : $\quad |\hat{X}_Y| = |Y|$

faisceau d'anneaux $\quad \mathcal{U} \hookrightarrow Y$

$$\mathcal{O}_{\hat{X}_Y}(\mathcal{U}) = \varprojlim \mathcal{O}_{Y_n}(\mathcal{U})$$

Ex : $Y = \{*\}$ fermé, $\quad \hat{\mathcal{O}}_{X,*}$

faisceau cohérent sur $\hat{X}_Y$ $\qquad$ morphismes, $\oplus$, $\otimes$, Hom...

$$\Updownarrow$$

systèmes $(\mathcal{E}_n)$ $\quad \mathcal{E}_n$ faisceau cohérent sur Y_n

$$\mathcal{E}_{n+1}|_{Y_n} \simeq \mathcal{E}_n$$

$$\Gamma(\hat{X}_Y, \hat{\xi}) = \varprojlim \Gamma(Y_n, \xi_n)$$

localement libre $\Leftrightarrow$ chaque ξ_n localement libre

E cohérent sur X

$\rightsquigarrow E|_{\hat{X}_Y} = (E_{Y_n})$ + morphismes de transitions évidents faisceaux cohérents algébrisables sur $\widehat{X}_Y$

Théorème : X schéma proj. lisse sur un corps k, de dimension pure d

Y diviseur effectif ample sur X

6.1 : si $d \geq 2$, pour tout fibré vectoriel E sur X

$$\Gamma(X, E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widehat{X}_Y, E_{|\widehat{X}_Y})$$
$$\| $$
$$\varprojlim \Gamma(Y_n, E_{|Y_n})$$

6.2 : si $d \geq 3$, tout fibré vectoriel ξ sur $\widehat{X}_Y$ est algébrisable.

$$\underbrace{Y \hookrightarrow \widehat{X}_Y \hookrightarrow X}_{6.1\ +\ 6.2}$$

Démonstrations (supposant X, Y normaux)

6.1 : $0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathcal{J}_Y^n}}{\mathcal{O}_X(-nY)} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{nY} \to 0$ "$nY = Y_{n-1}$"

$$0 \to \Gamma(X, E(-nY)) \xrightarrow{\text{tant}^{\text{le}}=0} \Gamma(X, E) \to \Gamma(Y_{n-1}, E_{n-1})$$

$$\hookrightarrow H^1\underbrace{(X, E(-nY))}_{\substack{\| \\ 0}} \quad d \geq 2$$

amplitude Y

$$\underset{\text{Serre}}{\simeq} H^{d-1}(X, \check{E} \otimes \omega_X(nY))^{\vee}$$

si X est lisse

Fnugs - Zariski : mais pour X normale

Exposé de Zariski au Bull AMS

6.2.2 :

lemme de finitude

$\forall\ \xi = (E_n)$ fibré vectoriel sur $\hat{X}_Y$,

$$H^1(\hat{X}_Y, \xi) := \varprojlim H^1(Y_n, \xi_n)$$

condition de Mittag-Leffler — système essentiellement constant

est de dimension finie. En fait le système projectif $H^1(Y_n, \xi_n)$ est essentiellement constant.

<u>démo</u> :

$$0 \to N^{\vee\otimes n} \to \mathcal{O}_{Y_n} \to \mathcal{O}_{Y_{n-1}} \to 0$$

sur $Y_0 = Y$

$N = \mathcal{O}(Y)_{|Y}$ fibré normal

$$0 \to E_0 \otimes N^{\vee\otimes n} \to E_n \to E_{n-1} \to 0$$

suite exacte longue

$$H^1(Y, E_0 \otimes N^{\vee\otimes n}) \to H^1(Y_n, E_n)$$

$= 0$

$$\hookrightarrow H^1(Y_{n-1}, E_{n-1}) \qquad n \gg 0$$

Enriques-Zariski

$\square$

finitude + raisonnement de Kodaira-Serre

$\Rightarrow$ <u>lemme</u> : si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel

$d \geq 3$

sur $\hat{X}_Y$, alors pour $N \gg 0$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(NY)$

est engendré par ses sections globales.

<u>Fin de la preuve</u> : $\mathcal{E}$ $N \gg 0$ $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$

$s_\alpha \in \Gamma(\hat{X}_Y, \mathcal{E}(NY))$

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}_Y}^{\oplus A} \xrightarrow[s_\bullet = (s_\alpha)]{} \mathcal{E}(NY) \longrightarrow 0$$

$\uparrow$

fibré vectoriel

sur $\hat{X}_Y$

$M \gg 0$

$$t_\beta \in \Gamma(\hat{X}_Y, \mathcal{F}(MY))$$

$$\mathcal{O}_{\hat{X}_Y}^{\oplus B} \xrightarrow{t_\bullet = (t_\beta)} \mathcal{F}(MY) \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{O}_{\hat{X}_Y}^{\oplus B}(-(N+1)Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}_Y}^{\oplus A}(-NY) \xrightarrow{s} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

$$\Phi = M_{BA}(\Gamma(\hat{X}_Y, \mathcal{O}_{\hat{X}_Y}(MY)))$$

$$E = \operatorname{coker} \Phi$$

Picard – Severi "régularité de l'adjoint"

= annulation de Kodaira sur les surfaces

<u>Thm</u> : M surface proj. lisse $/_k$

corps de caractéristique 0

L ample sur M

$$\Rightarrow H^1(M, L^\vee) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow H^1(M, L \otimes \omega_M) = 0 \right)$$

Une construction de fibrés en droites formelles non alg. en caractéristique 0.

M variété lisse sur k, car k = 0

E fibré vectoriel

$\alpha \in H^1(M, E^\vee)$

$$X = \mathbb{V}_M(E^\vee) = \operatorname{Spec}_M\left(\bigoplus S^k E^\vee\right)$$

$$\overset{\uparrow}{Y = M} \qquad Y_n = \operatorname{Spec} \bigoplus_{0 \le k \le n} S^k E^\vee$$

$$\widehat{\operatorname{Exp}}\, \alpha \in H^1(\hat{X}_Y, \mathcal{O}^*_{\hat{X}_Y})$$

En fait : $\alpha = [(\alpha_{ij})]$, $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \check{E})$

$$(\ )_n = \sum_{0 \le k \le n} \frac{\alpha_{ij}^k}{k!} \longleftarrow \text{car } 0$$

<u>Lemme</u> : $\widehat{\operatorname{Exp}}$ est algébrisable

$$\Longrightarrow \widehat{\operatorname{Exp}\,\alpha} \simeq \mathcal{O}_{\hat{X}_Y} \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

restriction de $\widehat{\operatorname{Exp}}_\alpha$ à $Y_1 \Rightarrow$ détermine α de manière unique

Si $0 \neq \alpha \in H^1(M, L^\vee)$

$E = L$

Si L est ample, $Y = M \hookrightarrow \mathbb{V}_M(L^\vee)^+ = X$

ample lisse

espace total d'un fibré ample (Grauert)

projective normale

antiample : contracter dans un point la section 0

Gr 2 : tout fibré formel le long de Y est algébrisable

donc il ne peut pas y avoir de α dans α.