Gerard FREIXAS — Quelques éléments de base de la théorie de Hodge p-adique

$X/\mathbb{C}$ variété analytique complexe Kählerienne

(sur T_X h métrique hermitienne, ω forme de Kähler, $d\omega = 0$)

Groupes de cohomologie de X $H(X, \mathbb{C})$

→ cohomologie de Betti $H^\bullet_B(X, \mathbb{C}) = H_B(X, \mathbb{C})^\vee$

→ cohomologie de de Rham analytique

$H^\bullet_{dR}(X, \mathbb{C})$ formes différentielles

Isomorphisme de comparaison :

$$H_B(X, \mathbb{C}) \times H_{dR}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$([\gamma], [\theta]) \longmapsto \int_\gamma \theta$$

Complexe de de Rham holomorphe $(\Omega^\bullet_X, \underset{\partial}{\overset{d}{\shortparallel}})$

$$\mathbb{H}^\bullet(X, \Omega^\bullet_X) \longrightarrow H^\bullet_{dR}(X, \mathbb{C})$$

$$F^p \Omega^\bullet_X = \Omega^{\geq p}_X$$

$$F^p H_{dR}(X/\mathbb{C}) = \mathrm{Im}\left(\mathbb{H}(X, \Omega^{\geq p}_X) \to \mathbb{H}(X, \Omega^\bullet_X)\right)$$

Théorème de décomposition de Hodge :

Il y a un isomorphisme canonique

$$F^i H^\bullet_{dR} / F^{i+1} H^\bullet_{dR} \xrightarrow{\sim} H^{\bullet - i}(X, \Omega^i_X)$$

Isomorphisme canonique :

$$H^n(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

où $H^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X)$.

Preuve : $H^n_{dR} = \operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathcal{H}^n$

$$H^{p,q} = \operatorname{Ker}(\underset{A^{p,q}}{\Delta_{\bar\partial}}) = \mathcal{H}^{p,q}$$

$\boxed{d\omega = 0}$ $\rightsquigarrow$ $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial}$ $\square$

Question : X variété algébrique propre et lisse sur un corps K $(\Omega^\bullet_{X/K}, d)$

$$H^\bullet_{dR}(X/K) = \mathbb{H}^\bullet(X, \Omega^\bullet_{X/K})$$

$$H^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X)$$

Existe-t-il une décomposition de Hodge ?

$H^{\bullet}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$

Existe une comparaison avec $H^{\bullet}_{dR}$?

La question n'a pas de sens !

H_{dR} est un K-espace vectoriel filtré

$H_{ét}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est une $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K))$

Supposons $\mathbb{Q}_\ell \subset K$ extension finie
$\overset{\shortparallel}{\mathbb{Q}_p}$ (K corps local de caractéristique mixte $(0, p)$)

$H_{ét}$ manque de filtration

H_{dR} manque d'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$

on va étendre les scalaires à un anneau de coefficients incorporant toutes ces structures

Anneau de Hodge-Tate et représentations HT

$\mathbb{Q}_p$ = complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique $\boxed{v(p) = 1}$

$\overline{\mathbb{Q}_p}$ = clôture algébrique

la valuation s'étend à $\overline{\mathbb{Q}_p}$

Il n'est pas complet !

(problèmes topologiques)

$\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ complété pour v

<u>Propriétés</u>

- corps valué non-archimédien
- anneau d'entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \{x \in \mathbb{C}_p \mid v(x) \geq 0\}$
- idéal maximal $m = \{x \in \mathbb{C}_p \mid v(x) > 0\}$
- l'action de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ s'étend à

$\mathbb{C}_p$ par continuité

$$Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim_{L/K \text{ finie}} Gal(L/\mathbb{Q}_p)$$

<u>topologie de Krull</u>

action continue sur $\mathbb{C}_p$

"pathologies"

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ <u>n'est pas</u> noethérien

$m^2 = m$

m contient des éléments de valuation aussi

petite qu'on veut ("très proche d'être des unités")

(pareil pour $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p^{cyc}}$)

<u>Théorème</u> (Tate) $K/\mathbb{Q}_p$ extension finie

$$\mathbb{C}_p^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)} = K$$

La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_K)$ = $\mathbb{C}_p$-espaces vectoriels de dimension finie + action <u>semi-lin.</u>

$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$

$$G_K \times V \to V$$

$$\sigma(\lambda m) = \sigma(\lambda)\sigma(m) \qquad \lambda \in \mathbb{C}_p,\ m \in V$$

on va isoler des représentations avec des propriétés cohomologiques agréables

(plus petite catégorie contenant la cohomologie des variétés)

<u>Caractère cyclotomique</u>

$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ↻ racines p^n-ièmes de l'unité dans $\bar{K}$ $\mu_{p^n}(\bar{K})$

$$\mu_{p^\infty}(\bar{K}) = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mu_{p^n}(\bar{K}) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$$

$(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ $\quad \varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 \neq 1$ $\quad \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ suite de racines primitives de l'unité

$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$

$\sigma(\varepsilon_n) = \varepsilon_n^{\chi(\sigma)}$

$\chi(\sigma) \in \mathbb{Z}_p^\times$

on obtient

$\chi : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$

caractère cyclotomique

$\mu_{p^\infty}(\overline{K}) = \mathbb{Z}_p(1)$ $\mathbb{Z}_p$-module de rang 1

(ε_n) générateur

(non-canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_p$)

$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \circlearrowright \mathbb{Z}_p(1)$ par mult. par χ

Définition

$\mathbb{C}_p(1) := \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$

$\mathbb{C}_p$-espace vectoriel de dimension 1

avec action de Galois $\sigma * \lambda = \chi(\sigma)\,\sigma(\lambda)$

$\mathbb{C}_p(i) := \mathbb{C}_p(1)^{\otimes i}$ $i \in \mathbb{Z}$

$$B_{HT} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(i) \quad \mathbb{C}_p\text{-algèbre graduée}$$

<u>Définition</u> (représentation de Hodge-Tate)

$V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_K)$ est de Hodge-Tate si et seulement si $V \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}_p(i)$, où I est un ensemble d'entiers avec multiplicité.

<u>Théorème</u> (Tate, Sen, Ax) V repr. de HT

$$H^i_{cont}(G_K, V) = 0 \quad \forall i \geq 2$$

$$\dim_K H^0_{cont}(G_K, V) = \dim_K H^1(G_K, V)$$

$=$ multiplicité de $i=0$ dans

$$V \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}_p(i)$$

<u>Exemple</u>: $H^0(G_K, \mathbb{C}_p) = K$

base de $H^1(G_K, \mathbb{C}_p)$

$$G_K \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Z}_p$$

$(\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ $\longleftarrow$ log bien défini ici par Taylor

tué par le log

Explication géométrique de $\mathbb{C}_p(1)$

$K \subset \overline{K}$

$\Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ = module des différentielles relatives

$\Omega_{\overline{K}/K}$:

- module de p-torsion
- p-divisible $p : \Omega_{\overline{K}/K} \twoheadrightarrow \Omega_{\overline{K}/K}$
- action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$

$$\overline{K}(1) = \overline{K} \otimes \mathbb{Z}_p(1) \twoheadrightarrow \Omega_{\overline{K}/K} \to 0$$

$$\frac{a}{p^n} \otimes (\varepsilon_m) \longmapsto a \frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

$a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$

noyau : $\rho^{-1}\mathcal{O}_{\overline{K}}(1)$ $\quad \rho \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$

Théorème (Fontaine)

$$0 \to \rho^{-1}\mathcal{O}_{\overline{K}}(1) \to \overline{K}(1) \to \Omega_{\overline{K}/K} \to 0$$

on applique $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, -)$

$$\Omega_{\overline{K}/K} \longmapsto T_p\,\Omega_{\overline{K}/K} = \varprojlim \ker(p^n : \Omega_{\overline{K}/K} \to \Omega_{\overline{K}/K})$$

on obtient un morphisme canonique :

$$\rho^{-1}\mathcal{O}_{\overline{K}}(1) \leftarrow T_p\,\Omega_{\overline{K}/K}$$

$\otimes\, \mathbb{Q}_p$

$$\begin{array}{ccc} V_p\,\Omega_{\overline{K}/K} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}_p(1) \text{ canonique} \\ \| & & \uparrow \\ T_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & & \end{array}$$

aboutissement d'un accouplement de périodes

Exemple : variétés abéliennes

$\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ schéma abélien

de fibre générique A

$$P : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \mathcal{A}[p^n] \quad \text{point de } p^n\text{-torsion}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}[p^n] \\ \downarrow f \\ \mathcal{A} \end{array}$$

$$P^*\,\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$$

Accouplement :

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}[p^n](\mathcal{O}_{\overline{K}}) \times H^0(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \Omega_{\overline{K}/K}[p^n] \\ \quad \| \\ A[p^n](\overline{K}) \end{array}$$

$$H^0(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A[p^n](\bar{K}), \Omega_{\bar{K}/K}[p^n])$$

$\rightsquigarrow$ passage à lim + $\otimes\, \mathbb{C}_p$

$$H^0(A, \Omega^1_{A/K}) \otimes \mathbb{C}_p \to \mathrm{Hom}(T_p A, \mathbb{C}_p(1))$$

compatible à l'action de Galois

<u>Théorème</u> (Fontaine)

la flèche est injective

$$\mathrm{Hom}(T_p A, \mathbb{C}_p(1)) = (T_p A)^\vee \otimes \mathbb{C}_p(1)$$
$$= (V_p A)^\vee \otimes \mathbb{C}_p(1)$$
$$= H^1_{ét}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p(1)$$

En appliquant le théorème à $\mathcal{A}^\vee$

$+ \quad H^0(A^\vee, \Omega_{A^\vee/K}) \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathcal{O}_A)^\vee$

$$V_p A^\vee \times V_p A \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)$$
couplage parfait

on obtient : $H^1_{ét}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow H^1(A, \mathcal{O}_A) \otimes \mathbb{C}_p$

Tout dans une suite (compatible avec Gal)

$$0 \to \underbrace{H^0(\Omega^1) \otimes \mathbb{C}_p(-1)}_{\dim\, =\, \dim A} \to \overbrace{H^1_{ét} \otimes \mathbb{C}_p}^{2 \dim A} \to \overbrace{H^1(\mathcal{O}_A) \otimes \mathbb{C}_p}^{\dim A} \to 0$$

0

Théorème (Tate, Sen, Ax)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}}(\mathbb{C}_p(-1)^a, \mathbb{C}_p^b) = 0$$

Suite exacte canoniquement scindé

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}}(\mathbb{C}_p(-1)^a, \mathbb{C}_p^b) = 0$$

I simplifie canonique

$$H^1_{ét} \otimes \mathbb{C}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\Omega^1) \otimes \mathbb{C}_p(-1)$$
$$\oplus\, H^1(\mathcal{O}_A) \otimes \mathbb{C}_p$$

dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p} G_K$.

En particulier : $H^1_{ét} \otimes \mathbb{C}_p$ est de Hodge-Tate

Théorème (Faltings)

$X/_K$ propre et lisse

$$H^n_{ét}(X, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p \xrightarrow[\text{can}]{\sim} \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega^q) \otimes \mathbb{C}_p(-q)$$

version B_{HT}

symplicité : $H^{\cdot}_{ét} \otimes B_{HT} \xrightarrow{\sim} H^{\cdot}_{Hdg} \otimes B_{HT}$

où $H^{n}_{Hdg} = \bigoplus\limits_{p+q=n} H^{q}(\Omega^{p})$

<u>Théorème</u> (Faltings)

$$H^{\cdot}_{ét} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \xrightarrow{\sim} H_{dR}(X/K) \otimes_K B_{dR}$$

B_{dR} muni d'une filtration $gr_{Fil} B_{dR} = B_{HT}$

<u>Références</u>

- Ast. 295 Fontaine
- Bourbaki Illusie 1989–90 exp. 276