FIBRÉ COTANGENT (ORBIFOLDE) ET STRUCTURE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES COMPLEXES. SÉMINAIRE REGA DU 13/01/16

FRÉDÉRIC CAMPANA

Contents

L'exposé ReGA du 13/01/2016 a porté uniquement sur les §.1-6. Les §.7-12 exposent la décomposition d'une X arbitraire en 'orbidoldes' ayant l'un des trois géométries 'indécomposables' ($\kappa^+ = -\infty, \kappa = 0, \kappa = n$) introduite dans [C"].

1. Dimension numérique et classes mobiles

1.1. Dimension 'de Kodaira'. [1]

[1]Introduite en fait par Shafarevich et al., B. Moishezon et S. Iitaka (qui a introduit ce nom)

Beaucoup plus de détails et de nombreux exemples sont dans [U].

On note $\kappa(X,L) := \overline{lim}_{m\to+\infty}\frac{Log(h^0(X,mL)}{Log(m)} \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}$.

Donc:

• $\kappa(X,L) = -\infty$ si et seulement si $h^0(X,mL) = 0, \forall m > 0$. C'est le cas si $L < 0$, ou plus généralement, si $L = \mathcal{O}_X(-D)$ pour un diviseur effectif D. Et aussi lorsque X est une courbe elliptique, si $c_1(L) = 0$ mais si L n'est pas de torsion dans $Pic(X)$.

• $\kappa(X,L) = 0$ si et seulement si $h^0(X,mL) = 1$ pour une infinité de $m > 0$, par exemple si L est de torsion.

• $\kappa(X,L) = n$ si et seulement si $mL = A + E$ pour un $m > 0$, A ample et E effectif.

• $\kappa(X,L) = d \in \{1, ..., n\}$.

Exemple simple: $X = Y \times Z, dim(Z) = d, dim(Y) = (n-d), L = p_Z^*(M), M \in Pic(Z)$, ample, $p_Z : X \to Z$ la projection sur le secon d facteur.

En général, il existe un entier $m > 0$ tel que l'application rationnelle $\Phi_{m.L} : X \dashrightarrow \mathbb{P}((H^0(X, m.L)^*)$ associée au système linéaire est une fibration (à fibres connexes), dont l'image $Z = \Phi_{mL}(X)$ est de dimension d, et telle que si X_z est une fibre générique, alors $\kappa(X_z, L_{|X_z}) = 0$. En particulier, si $d = n$, Φ_{mL} est birationnelle sur son image Z, et indépendante du $m >> 0$ adéquat choisi (à équivalence birationnelle près).

1.2. Dimension de Kodaira du fibré canonique.

Le cas le plus important est $L = K_X$. On définit alors: $\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$.

Si $X = Y \times Z$, on a: $\kappa(Y \times Z) = \kappa(Y) + \kappa(Z)$, avec la convention: $-\infty + d = -\infty$, car: $h^0(X, mK_X) = h^0(Y, mK_Y) \times h^0(Z, mK_Z), \forall m$.

Lorsque $L = K_X$, si $\kappa(X) = d \geq 0$, l'application $J := \Phi_{mK_X} : X \dashrightarrow Z$ ainsi définie est birationnellement bien définie et peut être supposée régulière. Elle a des fibres génériques X_z telles que $\kappa(X_z) = 0$. C'est l'application de 'Moishezon-Iitaka'.

Elle 'décompose' donc dans une certaine mesure la structure de X, d'une part en celle des variétés X_z avec $\kappa = 0$ et d'autre part celle de Z avec $dim(Z) < n$ si $0 \leq d = dim(Z) = \kappa(X) < n$.

• On a donc deux classes de variétés non 'décomposées' par cette fibration: les variétés X avec $\kappa(X) = 0$, et les variétés X_n avec $\kappa(X_n) = n$, dites 'de type général'[2].

Il faut remarquer que Z n'est pas toujours de 'type général' lorsque $0 \leq \kappa(X) < dim(X)$.

• De plus, cette fibration ne donne aucune information sur la structure de X lorsque $\kappa(X) = -\infty$. Conjecturalement, ceci est dû à la présence de 'beaucoup' de courbes rationnelles. Nous en verrons une

[2]Terme adéquat dû à B. Moishezon.

solution 'approchée', et en déduirons une fibration fonctorielle (le 'quotient rationnel r') fournissant une 'réduction de dimension' dans ce cas.

Pour courbes et surfaces, la situation géométrique est (assez) bien comprise. En particulier, $\kappa(X_2) = -\infty$ si et seulement si X est birationnellement un produit $\mathbb{P}^1 \times C$:

1.3. **Courbes et surfaces.**

Notations: $L \in Pic(X)$, $L > 0$ si ample, $L \equiv 0$ si $L.C = 0$ pour toute courbe tracée sur X, $L < 0$ si $-L > 0$.

$q = h^1(X, O_X)$, d_X: pseudométrique de Kobayashi, $\overline{V}^{Zar}$: adhérence de Zariski de V.

$X(k)$: ensemble des points k-rationnels si X définie sur k, corps de nombres. $\overline{X(k)}^{Zar} = X$ signifie que $X(k)$ est Zariski dense pour k choisi assez grand (X est 'potentiellement dense').

$\overline{X(k)}^{Zar} = Fini^*$ (resp. $d_X >^* 0$) signifie que $X(k)$ est fini (resp. que d_X est une métrique) sur le complémentaire d'un fermé de Zariski strict indépendant de k (X est 'Mordellique', suivant le terme de S. Lang).

• **Courbes**

La situation est très simple:

κ	g	X	$\pi_1(X)$	d_X	$\overline{X(k)}$
$-\infty$	$g = 0$	$\mathbb{P}^1$	$\{1\}$	$\equiv 0$	X
0	$g = 1$	$\mathbb{C}/\Lambda$	$\widetilde{Ab}$	$\equiv 0$	X
1	$g \geq 2$	$\mathbb{D}/\Gamma$	Γ	> 0	Fini

• **Surfaces** ($n = 2$)

On est 'ramenés' à des fibrations en courbes rationnelles ou elliptiques, ou à des surfaces nouvelles considérées comme analogues des courbes rationnelles, elliptiques, ou hyperboliques (à condition de les considérer à équivalence birationnelle et revêtements étales près):

κ	q	$X \cong$ bir., étale	$\pi_1(X)$	d_X	$\overline{X(k)}^{Zar}$
$-\infty$	$q \geq 0$	$\mathbb{P}^1 \times C_q$	$\pi_1(C_q)$	d_{C_q}	$\overline{C_q(k)}^{Zar}$
0	0	$K3$	$\{1\}$	$\equiv 0$	X?
0	2	$(\mathbb{C}^2/\Lambda)$	Λ	$\equiv 0$	X
1	≥ 0	Elliptique/B	$\mathbb{Z}^t \times \pi_1(B), t = 0, 1$	d_B	$\overline{B(k)}^{Zar}$?
2	≥ 0	??	??	$>^* 0$?	$Fini^*$?

• **Dimensions n supérieures.**

Exemple 1.1. *Soit $H_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse de degré d. Alors $K_X < 0$ (resp. $K_X \cong O_X$, resp. $K_X > 0$) si $d \leq (n+1)$ (resp. $d = (n+2)$, resp. $d \geq (n+3)$) par la formule d'adjonction. En particulier,*

$\kappa(H_d) = -\infty, 0, n$ *dans ces trois cas, respectivement,* $\kappa(\mathbb{P}^n) = -\infty$, *pour* $d = 1$.

Les X 'indécomposables' par J sont donc les $X = X_n$ tels que $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, n\}$.

Cecpendant les exemples de la forme $X = \mathbb{P}^{n-p} \times Y_p$, avec $0 < p < n$ et $\kappa(Y) \geq 0$ ne sont pas 'indécomposables' puisque l'on a: $\kappa(X) = \kappa(\mathbb{P}^{n-p}) + \kappa(Y) = -\infty + \kappa(Y) = -\infty$. On souhaite pouvoir 'identifier' le facteur Y.

Soit $p : X \to Y$ la projection. Puisque $p^*(K_Y) = L$ est un sous-faisceau de rang 1 de Ω^p_X, il est naturel de définir les deux invariants (biméromorphes et étales) suivants:

Définition 1.2. $\kappa^+(X) = max\{\kappa(X, L)\}$, *pour* $L \subset \otimes^m(\Omega^1_X)$, *de rang* 1, *et* $m > 0$ *arbitraire.*

$\kappa_+(X) = max\{\kappa(Y))\}$, *pour toute* $f : X \dashrightarrow Y$ *rationnelle dominante et* $dim(Y) > 0$.

Remarques: 1. $\kappa^+(X) \geq \kappa_+(X) \geq \kappa(X), \forall X$.

2. $\kappa^+(X) = -\infty$ si et seulement si $h^0(X, \otimes^m(\Omega^1_X)) = 0, \forall m > 0$.

3. Nous verrons plus bas que $\kappa^+(X) = -\infty$ si $K_X < 0$, en particulier si $X = H_d, d \leq (n+1)$.

4. La notion RC (pour 'rationnellement connexe'), qui implique et est conjecturalement équivalente à: $\kappa_+ = -\infty$) sera définie plus bas.

On conjecture alors que, qualitativement, les propriétés sont les mêmes lorsque $\kappa_+ = -\infty$ (resp. $\kappa = 0$, resp. $\kappa = n$) que pour les courbes rationnelles (resp. elliptiques, resp. hyperboliques).

κ	$X \cong$ birat.	$\pi_1(X)$	d_X	$\overline{X(k)}$	K_X	$\pi_1(X)$	d_X	$\overline{X(k)}^{Zar}$
$\kappa_+ = -\infty$	RC	$\{1\}$	$\equiv 0?$	X?	< 0	$\{1\}$	$\equiv 0$	$X?$
0	$K_{X'} \equiv 0?$	$\widetilde{Ab}?$	$\equiv 0?$	X?	$\equiv 0$	$\widetilde{Ab}$	$\equiv 0?$	$X?$
1	$K_{X'} > 0$	?	$^* > 0?$	$Fini^*?$	> 0	??	$>^* 0?$	$Fini^*?$

Les classes de variétés avec $\kappa_+ = -\infty, \kappa = 0, \kappa = n$ sont bien sûr très particulières (produits, fibrations). Le problème se pose de savoir si elles permettent de 'reconstruire' toutes les variétés projectives X.

1.4. **Décomposition des variétés projectives.** On peut décomposer[3] canoniquement et fonctoriellement toute variété projective X en ses 'parties' de type $\kappa_+ = -\infty$, $\kappa = 0$ et $\kappa = n$ (ie: type 'général') à l'aide d'une suite de fibrations soit 'quotients rationnels' (définis plus bas), soit 'Moishezon-Iitaka'. Cette décomposition nécessite d'étendre ces considérations aux 'paires orbifoldes' (X, D).

Nous évitons ici, dans un but de simplification, d'introduire cette notion, les invariants géométriques associés, et leurs propriétés (entièrement similaires à celles des X sans 'structure orbifolde').

[3]Conditionnellement en une conjecture de type $C_{n,m}$.

Nous nous contenterons dans la suite de nous concentrer sur les notions d'uniréglage, de connexité rationnelle et de 'quotient rationnel'.

2. Uniréglage

Définition 2.1. *On dit que X_n est* **uniréglée** *s'il existe $f : \mathbb{P}^1 \times Y_{n-1} \dashrightarrow X_n$ rationnelle dominante.*

Remarque 2.2. *Si X est uniréglée, $\kappa(X) = -\infty$. (Vérifier ceci pour $V := \mathbb{P}^1 \times Y_{n-1}$, car $\kappa(V \times W) = \kappa(V) + \kappa(W)$, puis montrer que si $f : V \dashrightarrow X$ est dominante, alors: $\kappa(V) \geq \kappa(X)$).*

La réciproque est une conjecture centrale de la géométrie algébrique (démontrée pour $n \leq 3$).

Conjecture 2.3. *Si $\kappa(X) = -\infty$, alors X est uniréglée.*

On a la solution 'approchée' suivante (en ajoutant un A ample arbiraire à mL).

Théorème 2.4. *On a équivalence entre les propriétés suivantes:*
1. *X est uniréglée.*
2. *$h^0(X, m.K_X + A) = 0$ pour $m > 0$ assez grand.*

Nous allons décrire les deux résultats permettant d'obtenir cet énoncé.

2.1. **Uniréglage et negativité du fibré canonique.** Supposons X_n uniréglée, et soit donc $f : \mathbb{P}^1 \times Y_{n-1} \dashrightarrow X_n$ rationnelle dominante. Soit $C_y := f(\mathbb{P}^1 \times \{y\})$. La formule d'adjonction montre que: $K_X.C_y < 0$.

Une remarquable réciproque est vraie, 'localement' (au voisinage de la courbe Γ):

Théorème 2.5. *(Mori, 1979; Miyaoka-Mori, 1986). Soit X_n projective lisse connexe, A ample sur X, et $\Gamma \subset X$ une courbe projective irréductible* **(de genre arbitraire)** *telle que $-K_X.C > 0$. Par chaque point de Γ passe une courbe* **rationnelle**[4] *$C \subset X$.*

L'idée[5] de la démonstration est la suivante: La dimension de l'espace des déformations fixant un point $a \in \Gamma$ du morphisme $f : \Gamma \to X$ est minorée par $d := \chi(\Gamma, f^*(TX)) = -K_X.\Gamma + n.(1-g) - n = -K_X.\Gamma - n.g$. Si $d > 0$, on obtient une application rationnelle $F : T \times \Gamma \dashrightarrow X$, où $0 \in T$ est une courbe projective, et $F_t : \{t\} \times \Gamma \to X$ est une déformation de $f = F_0$. De plus, F ne peut être régulière le long de $T \times \{a\}$, sinon $F_t = F_0, \forall t$, car les courbes projectives $F(T \times \{a'\}), a' \neq a$ voisines de a seraient contenues dans un voisinage affine (ou Stein) de a sinon. On doit donc éclater $f(a)$ pour rendre F régulière, et l'image

[4]Telle, de plus, que: $A.C \leq (\frac{2n}{-K_X.\Gamma}).A.\Gamma$.

[5]qui est celle d'une version initiale de S. Mori de 1979.

d'une composante exceptionnelle de cet éclatement fournit une courbe rationnelle C de X passant par $f(a)$.

La difficulté est qu'en général, $d = -K_X.\Gamma - n.g < 0$. Elle est surmontée en réduisant en caractéristique $p > 0$ pour presque tout p, et en composant f avec un morphisme de Frobenius $Fr : \Gamma_p \to \Gamma$ qui **ne change pas le genre** g **de** Γ_p, mais multiplie par p le degré de $f \circ Fr$, et augmente d, qui devient ainsi $d_p := p.(-K_X.\Gamma) - n.g > 0$ si p assez grand.

Ce résultat n'a pas de démonstration connue en caractéristique 0. Voir [D] pour les détails de la preuve.

Puisqu'une famille algébrique couvrante de courbes rationnelles a un degré canonique strictement négatif, on obtient une version 'globale':

Corollaire 2.6. *(Miyaoka-Mori, 1986) X est uniréglée si et seulement si elle est recouverte par une famille algébrique de courbes $\Gamma_s, s \in S$ telles que $K_X.\Gamma_s < 0$.*

2.2. **Classes mobiles et pseudoeffectivité.**

Définition 2.7. *Soit $N_1(X)$ le sous-espace vectoriel réel de $H_2(X, \mathbb{R})$ engendré par les classes de courbes (complexes projectives) irréductibles de X.*

Soit $Mob(X)$ le cône convexe fermé de $N_1(X)$ engendré par les classes $[C_s]$ de familles algébriques $(C_s)_{s\in S}$ X-couvrantes de courbes projectives de X paramétrées par un S projectif et irréductible.

Les éléments de $Mob(X)$ sont appelés les 'classes mobiles' de X.

Définition 2.8. *L est pseudo-effectif si et seulement si $L.\alpha \geq 0, \forall \alpha \in Mob(X)$.*

Remarquons que L est nef si approximable par des $L + \varepsilon A$ amples, et si $L.C \geq 0$ pour toute courbe effective (mais non nécessairement mobile) sur X. La pseudo-effectivité est donc un affaiblissement (considérable) de la 'nefitude', son immense avantage est cependant d'être une notion **birationnelle**.

On peut donc reformuler ainsi le théorème de Miyaoka-Mori:

Corollaire 2.9. *(Miyaoka-Mori, 1986) X est uniréglée si et seulement si K_X n'est pas pseudo-effectif.*

On va maintenant voir que la pseudo-effectivité de L fournit des sections de $mL + A$ pour tout $m > 0$ assez grand.

2.3. **Dimension numérique et pseudoeffectivité.**

Théorème 2.10. *([BDPP 2004])Soit $L, A \in Pic(X) \otimes \mathbb{Q}$, A ample sur X. L est dit 'pseudo-effectif' si $\kappa(X, L + \varepsilon.A) = n$ pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel* [6].

[6] $\kappa(X, L) = \kappa(X, k.L)$ pour tout entier $k > 0$ et donc pour tout $k > 0, k \in \mathbb{Q}$.

Voir [L] pour la preuve.

On a l'amélioration suivante:

Théorème 2.11. *([Nak 2004]) L est pseudo-effectif si et seulement si $\overline{lim}_{m\to+\infty} h^0(X, mL + A) > 0$ pour un/tout fibré en droites ample A.*

$\kappa(X, L) \geq 0 \implies L$ pseudo-effectif. La réciproque est fausse en général (exemples de Nagata et Mumford), mais est conjecturée pour $L = K_X$:

Conjecture 2.12. *Si K_X est pseudo-effectif, $\kappa(X) \geq 0$.*

Cette conjecture 2.12 équivaut donc à la conjecture 2.3, compte-tenu du théorème 2.4.

Nous pouvons réinterpréter le corollaire 2.6 de Miyaoka-Mori comme suit, grâce aux théorèmes 2.10 et 2.11:

Théorème 2.13. *On a équivalence entre les propriétés suivantes:*
1. X est uniréglée.
2. $K_X.\alpha < 0$ pour une classe mobile $\alpha \in Mob(X)$.
3. $h^0(X, m.K_X + A) = 0$ pour $m > 0$ assez grand.

Ce théorème relie ainsi trois propriétés apparemment de natures très différentes: géométrique, numérique (nombre d'intersection), et sections. Nous en donnerons plus bas une version similaire en y remplaçant le fibré canonique par le fibré cotangent.

On peut définir une variante importante de la dimension de Kodaira d'un fibré L, sa **dimension numérique** $\nu(X, L)$ comme suit:

Définition 2.14. $\nu(X, L) := sup\{k \in \mathbb{Z} | \overline{lim}_{m\to+\infty}(\frac{h^0(X,ml+A)}{m^k}) > 0\}$.

On a les propriétés suivantes:
1. $\nu(X, L) \geq \kappa(X, L)$
2. $\nu(X, L) \geq 0$ si et seulement si L est pseudoeffectif.
3. $\nu(X, L) \in \{-\infty, 0, 1, ..., n = dim(X)\}$.
4. $\nu(X, L) = n \iff \kappa(X, L) = n$.

3. Connexité rationnelle et negativité du fibré cotangent.

On se propose de caractériser géométriquement la propriété $\kappa^+ = -\infty$ et de définir une nouvelle fibration ('le quotient rationnel') qui éliminera la 'partie à $\kappa^+ = -\infty$' de X, qui est l'obstruction à avoir $\kappa \geq 0$.

Définition 3.1. *X est dite 'rationnellement connexe' (RC en abrégé) si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes:*

1. Par tout couple (x, y) de points génériques de X passe une courbe rationnelle irréductible (ou: de manière equivalente: une courbe connexe dont toutes les composantes sont rationnelles)

2. il existe une courbe rationnelle $C \subset X$ telle que $TX_{|C}$ est ample.

L'équivalence (non-triviale) de ces définitions est due à Kollár-Miyaoka-Mori, les preuves sont basées sur la théorie des déformations des courbes rationnelles. Les variétés RC généralisent $\mathbb{P}^1$ en dimensions supérieures.

Exercice: $\kappa^+(X) = -\infty$ si X est RC. La réciproque est conjecturale.

Exemple 3.2. *1. $\mathbb{P}^n$ est rationnellement connexe. Une variété rationnelle ou unirationnelle est rationnellement connexe.*

2. Une surface rationnellement connexe est rationnelle.

3. Une variété de Fano est rationnellement connexe ([C'], [KoMiMo]).

4. Les cubiques et quartiques lisses de $\mathbb{P}^4$ sont donc rationnellement connexes, mais ne sont pas rationnelles ([C-G], [I-M]). Les cubiques sont unirationnelles de degré 2. Certaines des quartiques sont unirationnelles de degré 24. On conjecture que les quartiques 'générales' de $\mathbb{P}^4$ ne sont pas unirationnelles.

5. Les variétés rationnellement connexes sont simplement connexes ([C]).

Théorème 3.3. *([C],[KoMiMo],[GHS]) Il existe une unique fibration $r : X \dashrightarrow R$ telle que:*

1. ses fibres sont rationnellement connexes.

2. Sa base R n'est pas uniréglée.

Cette fibration est presque-holomorphe, et appelée le 'quotient rationnel' de X (dans [C]), et la 'MRC-fibration' (dans [KoMiMo]).

Si X est non-uniréglée, $R = X$. Si X est RC, alors: $R = \{point\}$.

Théorème 3.4. *([GHS]) Soit $f : X \to Z$ une fibration dont la fibre générique et la base Z sont RC. Alors X est RC.*

La fibration r est construite en définissant sur X la relation d'équivalence selon laquelle deux points sont équivalents s'il existe une chaine (connexe) de courbes rationnelles les reliant, puis en démontrant que pour x 'général', sa classe d'équivalence R_z est fibre d'une fibration, et lisse. Toute courbe rationnelle rencontrant R_z est donc contenue dans R_z. On utilise alors [GHS] pour montrer que la base n'est pas uniréglée.

Cette fibration r 'scinde' donc canoniquement et fonctoriellement X en ses deux parties antithétiques: RC (les fibres) et 'non-uniréglée' (la base).

Corollaire 3.5. *On a équivalence entre les propriétés suivantes:*

1. X est RC

2. $h^0(X, \otimes^m \Omega^1_X \otimes A) = 0$ pour $m > 0$ assez grand.

3. $h^0(X, Sym^m(\Omega^p_X) \otimes A) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout $m > m(A)$.

4. K_Z n'est pas pseudoeffectif si $dim(Z) > 0$ et si $f : X \dashrightarrow Z$ est une fibration rationnelle dominante.

Idée de la démonstration: seule l'implication $4 \Longrightarrow 1$ est non-triviale. Si X n'est pas RC, alors (grâce à 3.4) $dim(R) > 0$, et $h^0(R, mK_R + A_R) \neq 0$ pour une infinité de $m > 0$, contredisant 4.

Remarque 3.6. *La conjecture 2.12 implique que condition 3 ci-dessus équivaut à: $h^0(X, Sym^m(\Omega^p_X)) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout $m > 0$.*

Nous avons vu que X est uniréglée si et seulement si $K_X.\alpha < 0$ pour une classe mobile. Nous allons caractériser la connexité rationnelle de façon similaire en remplaçant K_X par Ω^1_X. Quelques préliminaires sur les pentes d'un faisceau relatives à une classe mobile sont nécessaires.

4. Pentes relatives à une classe mobile.

Nous allons voir que les fibrations à fibres uniréglées ou RC sont définies par des feuilletages positifs dans un sens approprié. Cette notion de positivité est une extension directe au cas 'mobile' du cas classique où $\alpha = A^{n-1}$ est une intersection complète de classes amples. Bien que toutes les propriétés classiques soient préservées, cette notion n'est apparue que très récemment ([CPe]).

Définition 4.1. *([CPe]) Soit $\alpha \in Mob(X)$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur X, de rang $r > 0$.*

On pose: $\mu_\alpha(\mathcal{E}) := \frac{\alpha.det(\mathcal{E})}{r}$. C'est la 'pente' de $\mathcal{E}$ relative à α.

$\mathcal{E}$ est dit 'α-semi-stable' si $\mu_\alpha(\mathcal{F}) \leq \mu_\alpha(\mathcal{E})$ pour tout $0 \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

Proposition 4.2. *([CPe])$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et α comme ci-dessus.*

1. $\mathcal{E}$ admet un unique plus grand sous-faisceau $\mathcal{E}^{max}$ de pente maximum: c'est son 'destabilisant maximal'. On note: $\mu_{\alpha,max}(\mathcal{E}) = \mu_\alpha(\mathcal{E}^{max})$.

2. $\mathcal{E}^{max}$ est α-semi-stable.

3. $\mathcal{E}$ admet un plus grand quotient $\mathcal{E}_{min}$ de pente minimale, dual de $(\mathcal{E}^*)^{max}$. On note: $\mu_\alpha(\mathcal{E}_{min}) = \mu_{\alpha,min}(\mathcal{E}) = -\mu_{\alpha,max}(\mathcal{E}^*)$.

4. On a encore une suite de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ associée à α.

5. $Hom(X, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \{0\}$ si $\mu_{\alpha,min}(\mathcal{E}) > \mu_{\alpha,max}(\mathcal{F})$.

Un résultat crucial est le suivant:

Théorème 4.3. *([CPe]) Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et α comme ci-dessus.*

1. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont semi-stables, $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})/Torsion$ l'est aussi, avec: $\mu_\alpha((\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})/Torsion) = \mu_\alpha(\mathcal{E}) + \mu_\alpha(\mathcal{F})$.

2. En général: $\mu_{\alpha,min}((\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})/Torsion) = \mu_{\alpha,min}(\mathcal{E}) + \mu_{\alpha,min}(\mathcal{F})$

3. $\mu_{\alpha,min}(\wedge^2(\mathcal{E})/Torsion) = 2.\mu_{\alpha,min}(\mathcal{E})$

4. $\mu_{\alpha,min}(\otimes^m(\mathcal{E})/Torsion) = m.\mu_{\alpha,min}(\mathcal{E})$

Corollaire 4.4. *1. Si $\mathcal{F} \subset TX$ est un sous-faisceau tel que $2.\mu_{\alpha,min}(\mathcal{F}) > \mu_{\alpha,max}(TX/\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage.*

Si $K_X.\alpha < 0$, alors:

2. $\mu_{\alpha,max}(TX) > 0$

3. Si $\mathcal{F} \subset TX$ est un terme de la filtration de Harder-Narasimhan tel que $\mu_\alpha(\mathcal{F}) > 0$, alors: $\mu_{\alpha,min}(\mathcal{F}) > 0 \geq \mu_{\alpha,max}(TX/\mathcal{F})$, et $\mathcal{F}$ est un feuilletage.

L'assertion 2 est claire, et 3 découle immédiatement de 1, qui résulte (argument dû à Miyaoka) de ce que le crochet de Lie induit un morphisme O_X-linéaire: $\Lambda : \wedge^2\mathcal{F} \to TX/\mathcal{F}$. Ce morphisme est nul en vertu de 4.2.(5) et 4.3(3).

5. Feuilletages positifs et courbes rationnelles.

Les résultats qui suivent sont inspirés par celui de Miyaoka ([Mi]), qui a démontré en 1985 que si X n'est pas uniréglée, les quotients de Ω^1_X ont un degré positif ou nul sur les courbes intersections complètes de X. Certaines parties de sa démonstration reposaient sur des méthodes de caractéristique $p > 0$ très différentes de celles utilisées ici.

Soit $\mathcal{F} \subset TX$ un feuilletage. On dit que $\mathcal{F}$ est 'algébrique' si ses feuilles sont des sous-variétés algébriques de X, ou de manière équivalente, s'il existe une fibration rationnelle dominante $f : X \dashrightarrow Z$ telle que $\mathcal{F} = Ker(df : TX \to f^*(TZ))$ sur le complémentaire de $Sing(\mathcal{F})$.

Théorème 5.1. *([CPa]) Soit $\mathcal{F} \subset TX$ un feuilletage tel que $\mu_{\alpha,min}(\mathcal{F}) > 0$. Alors:*
1. $\mathcal{F}$ est algébrique.
2. Ses feuilles ont des adhérences rationnellement connexes.

La démonstration de l'assertion 1 généralise celle du cas particulier où $\alpha = H^{n-1}$ est intersection complète, dû à [Bog-McQ]. L'idée, qui remonte partiellement à C.L. Siegel et R. Harstshorne, est la suivante (des théorèmes d'extension de type Hartog's montrent que l'on peut admettre que $\mathcal{F} \subset TX$ est un sous-fibré): $\mathcal{F}$ définit naturellement une sous-variété analytique ouverte locale U de dimension $n + r$ de $X \times X$ contenant la diagonale D_X, telle que, si $x \in V_x$ est un petit voisinage ouvert de $x \in X$, alors: $U \cap (V_x \times V_x) = \cup_{y \in V_x} \big(\{y\} \times (F_y \cap V_x)\big)$, où F_y est la feuille de $\mathcal{F}$ passant par y. Il s'agit de montrer que U est ouverte dans son adhérence de Zariski, c' est à dire que $dim(V) = n + r$, si $V := \big(\overline{U}^{Zar}\big)$. Il suffit donc de voir que, si $H = A \times A$ est un fibré ample sur $X \times X$, alors $h^0(V, m.H) \leq h^0(U, mH) \leq C.m^{n+r}$, pour une constante $C > 0$, puisque $h^0(V, m.H) \leq h^0(U, mH)$. On utilise pour ceci le fait que le fibré normal à D_X dans U est naturellement isomorphe à $\mathcal{F}$, de sorte que tout élément de $H^0(U, mH)$ admet un développement en série entière le long des fibres de la première projection $p : U \to X$ de U sur X, dont le k-ième coefficient est une section de $Sym^k(\mathcal{F}^*) \otimes mA$. Or $\mu_{\alpha,max}(Sym^k(\mathcal{F}^*) \otimes mA) = -k.\mu_{\alpha,min}(\mathcal{F}) + m.\alpha.A < 0$ si $k > B.m$, avec $B := \frac{\alpha.A}{\mu_{\alpha,min}(\mathcal{F})}$.

Il en résulte que les sections de H sur U s'expriment comme des 'polynômes' de degré au plus $B.m$ le long des fibres de p, et donc que:

$$h^0(U, mH) \leq \sum_{k=0}^{k=[B.m]} h^0(X, Sym^k(\mathcal{F}^*) \otimes m.A)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{k=[B.m]} h^0(\mathbb{P}(Sym^k(\mathcal{F})), O(k) \otimes m.\pi^*(A)) \leq C.m^{(n+r-1)+1},$$

comme annoncé, $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X$ étant la projection. Ceci établit l'algébricité de $\mathcal{F}$. On a donc une fibration (que nous pouvons supposer holomorphe avec Z lisse) $f : X \to Z$ telle que $\mathcal{F} = Ker(df)$.

Esquissons la démonstration du fait que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont d'adhérence RC: sinon, on a une factorisation ('quotient rationnel relatif') $f = g \circ h$, avec $h : X \to Y, g : Y \to Z$ telle que: les fibres de h sont RC, tandis que celles Y_z de g ont K_{Y_z} pseudoeffectif. On a, de plus: $dim(Y) > dim(Z)$. Soit $\mathcal{G} := Ker(dg) \subset TY$. On a donc une différentielle génériquement surjective: $dh : \mathcal{F} \to h^*(\mathcal{G})$. Donc $\mu_\alpha(h^*(\mathcal{G})) \geq \mu_{\alpha,min}(\mathcal{F}) > 0$. Mais ceci contredit le théorème suivant de positivité des canoniques relatifs, car $0 > -\mu_\alpha(\mathcal{G}) = \alpha.(K_{Y/Z} - D(g))$, où $D(g)$ est un diviseur discriminant[7] de g:

Théorème 5.2. *Si $g : Y \to Z$ est une fibration, et si K_{Y_z} est pseudoeffectif, alors $K_{X/Y} - D(g)$ est pseudoeffectif.*

Voir [Cla] pour une autre exposition de [CPa].

On en déduit des critères d'uniréglage et de connexité rationnelle:

Corollaire 5.3. *1. X est uniréglée si et seulement s'il existe $\alpha \in Mob(X)$ telle que: $\mu_{\alpha,max}(TX) > 0$*

2. X est rationnellement connexe si et seulement s'il existe $\alpha \in Mob(X)$ telle que: $\mu_{\alpha,min}(TX) > 0$

Esquissons la démonstration de la seconde assertion: si $\mu_{\alpha,min}(TX) > 0$, on prend $\mathcal{F} = TX$ et X est donc RC. En sens inverse, si X est RC, il existe une courbe rationnelle $[C]$ sur X telle que $TX_{|C}$ est ample. La classe $\alpha : [C]$ est donc telle que $\mu_{\alpha,min}(TX) > 0$ (Exercice).

Corollaire 5.4. *Si $K_X < 0$, alors: $H^0(X, \otimes^m(\Omega^1_X) \otimes A) = 0$, pour tout $m > 0$ assez grand.*

Ce dernier 'corollaire' nécessite en fait la version 'orbifolde' de 5.1 et du corollaire 6.5 ci-dessous. On obtient ainsi une démonstration en caractéristique zéro sans utiliser les courbes rationnelles de X.

[7] Que nous ne définirons pas ici.

6. Stabilité birationnelle du fibré cotangent

Lorsque K_X est pseudoeffectif, le théorème 5.1 implique la 'stabilité birationnelle' du fibré cotangent.

Corollaire 6.1. *([CPa]) Si K_X est pseudoeffectif, alors $\mu_{\alpha,min}(Q) \geq 0$ pour tout $m > 0$ et tout quotient Q de $\otimes^m(\Omega^1_X)$.*

En effet, si on a un quotient Q et une classe $\alpha \in Mov(X)$ tels que $\mu_\alpha(Q) < 0$, on obtient $\mathcal{F} = Q^* \subset TX)$ tel que $\mu_\alpha(\mathcal{F}) > 0$. Donc $\mu_{\alpha,max}(TX) > 0$, et on conclut à une contradiction, soit par le corollaire 5.3, soit par le théorème 5.2 si on veut rester en caractéristique zéro (en remarquant que si K_X est pseudoeffectif, K_{X_z} aussi).

Corollaire 6.2. *Si K_X est pseudoeffectif, pour tout $m > 0$ et tout sous-fibré en droites $L \subset \otimes^m(\Omega^1_X)$ on a: $\nu(X, L) \leq \nu(X, K_X)$. La dimension numérique (avec quelques propriétés) est définie en 2.14.*

En effet: si $Q := (\otimes^m(\Omega^1_X))/L$, $det(Q)$ est pseudoeffectif, donc $N.K_X = L + det(Q)$, où $det(\otimes^m(\Omega^1_X)) = N.K_X$, pour un entier $N(m, n) > 0$. Ceci implique (Exercice) que $\nu(X, N.K_X) = \nu(X, K_X) \geq \nu(X, L)$.

Remarque 6.3. *Lorsque K_X n'est pas pseudoeffectif, la conclusion précédente est en défaut pour $X = \mathbb{P}^1 \times Y$, si K_Y, et donc $L = (pr_Y)^*(K_Y)$ est pseudoeffectif, puisqu'alors:*

$$\nu(X, L) \geq 0 > \nu(X, K_X) = -\infty$$

.

Ce contre-exemple ne s'applique pas lorsque $\nu(X, L) = n$. On peut en effet omettre l'hypothèse 'K_X pseudoeffectif' dans cet (unique) cas:

Corollaire 6.4. *Si $\otimes^m(\Omega^1_{X_n})$ contient un sous-faisceau L de rang 1 tel que $\kappa(X, L) = n$, alors[8]: $\kappa(X) = n$.*

Corollaire 6.5. *Si $K_X \equiv 0$ et si $\otimes^m(\Omega^1_X)$ contient un sous-faisceau L de rang 1, alors son dual L^* est pseudoeffectif.*

L'évaluation en x; $ev_x : H^0(X, \otimes^m(\Omega^1_X)) \to \otimes^m(\Omega^1_{X,x})$ est donc injective, pour tout $x \in X$ et tout $m \geq 0$.

Soit $Q := det(\otimes^m(\Omega^1_X))/L$, alors $det(Q) = N.K_X - L \equiv -L = L^*$ est donc pseudoeffectif. Si une section s de $\otimes^m(\Omega^1_X)$ est non nulle, elle engendre un sous-faiceau $\mathcal{L}$ de rang 1 dont le determinant a un dual pseudoeffectif, donc $\mathcal{L}$ est trivial.

Remarque 6.6. *Le corollaire 6.5 est une version algébrique du parallélisme des tenseurs holomorphes covariants sur une variété Kählérienne compacte munie d'une métrique de Kähler Ricci-plate. L'existence d'une telle métrique sur une variété Kählérienne avec $c_1(X) = 0$ est un résultat célèbre de S.T. Yau.*

[8] Pour obtenir ce cas général, il faut une version 'orbifolde' de 5.1.

Dans ces dernières sections, on va très brièvement décrire la décomposition des X_n projectives en 'spéciales vs type général' grâce au 'coeur' c, puis la décomposition du 'coeur' en $c = (J \circ r)^n$ (conditionnelle en $C^{orb}_{n,m}$), J (resp. r) étant des versions 'orbifoldes' de la fibration de Moishezon-Iitaka (resp. du 'quotient rationnel'). Voir [C"] pour plus de détails.

7. Faisceaux de Bogomolov

Théorème 7.1. *([Bog]) Soit $\mathcal{L} \subset \Omega^p_X$ un sous-faisceau de rang* 1 *saturé. Alors:*

1. $\kappa(X, \mathcal{L}) \leq p$.

2. Si on a égalité, il existe une fibration $f : X \to Y_p$ telle que $\mathcal{L} = f^*(K_Y)$ au point générique de X.

On dit que $\mathcal{L}$ est un 'faisceau de Bogomolov'.

Exemple 7.2. *Soit $f : X \dashrightarrow Y_p$ une fibration rationnelle dominante avec $\kappa(Y) = dim(Y) = p > 0$. Alors $f^*(K_Y) \subset \Omega^p_X$ est un faisceau de Bogomolov (même sans le saturer). Cependant:*

Remarque 7.3. *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau de Bogomolov, $f^*(K_Y) \subsetneq \mathcal{L}$, et $\kappa(Y) < p$, en général. La différence provient de la 'base orbifolde'.*

Exemple 7.4. *Soit $X_0 = C \times E$, où C est une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$, d'involution hyperelliptique $h : C \to C$, avec $\pi : C \to C/ < h > \cong \mathbb{P}^1$, et E est une courbe elliptique munie d'une translation τ d'ordre* 2. *On fait opérer l'involution diagonale sans point fixe $h \times \tau : X_0 \to X_0$ sur X_0, et on désigne par X le quotient (étale) $p : X_0 \to X := X_0/ < h \times \tau >$. Alors la fibration $J : X \to C/ < h >$ est une fibration de base $\mathbb{P}^1$ de fibres lisses isomorphes à E, avec $2(g+2)$ fibres doubles isomorphes à $E/ < \tau >$. Bien que la base de J soit $C < h > \cong \mathbb{P}^1$, il est facile de voir que $(J^*(K_{C/<h>}))^{sat} \subset \Omega^1_X$ est un faisceau de Bogomolov (car celui de $J_0 : X_0 \to C$ l'est, et que p est étale).*

8. Base orbifolde d'une fibration

Soit $f_0 : X \dashrightarrow Y_0$ une fibration rationnelle dominante, et $\mathcal{L} \subset \Omega^p_X$ le saturé de $f_0^*(K_{Y_0})$, $p := dim(Y_0)$. On remplace f_0 par un modèle birationnel 'net' $f : X \to Y$ par éclatements de X_0, Y_0 et après 'applatissement' de f_0.

Soit alors $E \subset Y$ un diviseur irréductible, et $f^*(E) := \sum_k t_k.F_k + R$, où les F_k sont les composantes irréductibles de $f^{-1}(E)$ telles que $f(F_k) = E$, R est f-exceptionnel, et les $t_k \geq 1$ sont des entiers.

On note: $m_f(E) := inf_k\{t_k\}$: c'est un entier positif, égal à 1 sauf pour un nombre fini de E. C'est la 'multiplicité non-classique' de la fibre générique de f au-dessus de E.

On note $c_f(E) := (1 - \frac{1}{m_f(E)})$.

Définition 8.1. *La base orbifolde de f est le couple (Y, D_f), avec: $D_f := \sum_{E \subset Y} c_f(E).E$. Son fibré canonique est: $K_Y + D_f$.*

Exercice: Déterminer la base orbifolde de J dans l'exemple 7.4.

Remarque 8.2. *Si X est munie d'un diviseur orbifolde $D = \sum_{F \subset X}(1-\frac{1}{m_D(F)}).F$, on définit la 'base orbifolde $(Y, D_{f,D})$ de $f : (X, D) \to Y$ par: $D_{f,D} := \sum_{E \subset Y}(1 - \frac{1}{m_{f,D}(E)}).E$, où: $m_{f,D}(E) := inf_k\{t_k.m_D(F_k)\}$*

Théorème 8.3. *Dans la situation précédente, on a, si $\mathcal{L}$ est le saturé de $f^*(K_Y)$ dans $\Omega^p_X, p := dim(Y)$:*
$\kappa(X, \mathcal{L}) = \kappa(Y, K_Y + D_f)$

8.1. **Conjecture $C^{orb}_{n,m}$.**

Conjecture 8.4. *($C^{orb}_{n,m}$) $f : (X, D) \to Z$ 'nette'. Alors:*
$\kappa(X, D) \geq \kappa(X_z, D_z) + \kappa(Z, D_Z)$ si $D_Z := D_{f,D}$.

Lorsque $D = 0$, c'est la conjecture $C_{n,m}$ d'Iitaka.

Théorème 8.5. *Dans la situation précédente, si $\kappa(Z, D_Z) = p := dim(Z)$, on a: $\kappa(X, D) = \kappa(X_z, D_z) + \kappa(Z, D_Z) = \kappa(X_z, D_z) + p$*

Ce théorème est une généralisation orbifolde directe de celui de E. Viehweg, dans lequel $D = D_Z = 0$. L'extension orbifolde étend considérablement le champ d'applicabilité.

Corollaire 8.6. *Si $\kappa(X, D) = 0$, alors: pour toute $f : (X, D) \to Z$, rationnelle dominante, on a: $\kappa(Z, D_Z) < p$, si $p > 0$. Autrement dit: il n'y a pas de faisceau de Bogomolov sur X, et elle est 'spéciale' au sens qui suit.*

9. Variétés spéciales

Définition 9.1. *X_n est 'spéciale' si elle n'a aucun faisceau de Bogomolov pour $p > 0$.*

Corollaire 9.2. *X_n est 'spéciale' si aucune fibration $f : X \dashrightarrow Y$ n'est telle que $\kappa(Y, K_Y + D_f) = p$, pour tout $p > 0$. En particulier, X ne 'fibre' jamais sur une variété Y_p de type général si $p > 0$. En particulier, une variété de type général n'est pas spéciale.*

Les X_n spéciales sont 'antithétiques des variétés de type général, et généralisent les courbes rationnelles et elliptiques.

Exemple 9.3. *1. X_1 est spéciale ssi rationnelle ou elliptique.*
2. Si $f : X \dashrightarrow Y$ est dominante et si X est spéciale, Y aussi.
3. Si X est RC, elle est spéciale.
4. Si $\kappa(X) = 0$, X est spéciale.
5. Pour tous $n, k \in \{-\infty, 0, 1, ..., (n-1)\}$ il existe des X_n spéciales avec $\kappa(X_n) = k$.

6. X_2 est spéciale ssi $\kappa(X) < 2$ et $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien. Si $n \geq 3$, il n'y a aucune telle caractérisation simple.

7. Si $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow X_n$ est une application méromorphe (transcendante) non-dégénérée, alors X est spéciale ('Kobayashi-Ochiai orbifolde').

8. Si $X' \to X$ est étale finie et si X est spéciale, alors X' aussi (preuve étonnament difficile).

Conjecture 9.4. *1. X spéciale ssi $d_X \equiv 0$.*

2. Si X définie sur un corps de nombres, alors X 'potentiellement dense' ssi X spéciale.

3. Si X spéciale, alors $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien.

4. Etre spéciale est stable par déformation et spécialisation.

10. Le 'coeur'

Théorème 10.1. *Il existe une unique fibration $c : X \to C(X) := C$ telle que:*

1. Ses fibres 'générales' sont spéciales.

2. Sa base orbifolde (C, D_c) est de type général.

La fibration c est presque-holomorphe. C'est le 'coeur' (de X).

Cette fibration 'scinde' donc X en ses deux parties antithétiques (spéciale: les fibres, et de type général: la base orbifolde). Elle permet, en combinant des variantes 'orbifoldes' des conjectures de S.Lang en arithmétique et hyperbolicité, et les conjectures 9.4 de décrire conjecturalement la pseudométrique de Kobayashi et la distributions des points rationnels pour toute X.

11. La décomposition $c = (J \circ r)^n$ du 'coeur'

Soit (X, D) une paire orbifolde lisse, et $K_X + D$ son fibré canonique. Si $f : (X, D) \to Z$ est une fibration On définit sa base orbifolde $(Z, D_{f,D})$ comme dans la remarque 8.2.

• Si $\kappa(X, K_X + D) \geq 0$, la fibration de Moishezon-Iitaka est définie comme lorsque $D = 0$. Elle fournit une fibration surjective $J : (X, D) \to Z$ avec $dim(Z) = \kappa(X, K_X + D)$ et $\kappa(X_z, K_{X_z} + D_{|X_z}) = 0$ pour sa fibre orbifolde générique.

• L'extension aux orbifoldes (X, D) du quotient rationnel est moins immédiate.

Définition 11.1. *$\kappa_+(X, D) = -\infty$ si $\kappa(Z, D_Z) = -\infty$ pour la base orbifolde de toute fibration rationnelle dominante $f : (X, D) \dashrightarrow Z$, avec $dim(Z) > 0$.*

Proposition 11.2. *On admet $C^{orb}_{n,m}$. Il existe alors pour toute (X, D) lisse une unique fibration $r : (X, D) \to R$, appelée son 'quotient rationnel', telle que:*

1. Ses fibres orbifoldes générales (X_r, D_r) ont $\kappa_+ = -\infty$.

2. Sa base orbifolde (R, D_R) *a:* $\kappa(R, D_R) \geq 0$.

On a aussi:

Théorème 11.3. *On admet* $C^{orb}_{n,m}$ *(pour définir r). Pour toute* (X, D)*:*

1. la composée $(J \circ r)$ *est bien définie, si* $r : (X, D) \to (R, D_R)$ *est le 'quotient rationnel', tandis que* $J : (R, D_R) \to Z = Z(R, D_R)$ *est la fibration de Moishezon-Iitaka.*

2. Pour tout $k \geq 0$*, la k-ième itérée* $(J \circ r)^k : (X, D) \to (X, D)_k$ *de* $(J \circ r)$ *est bien définie.*

3. Les fibres orbifoldes de $(J \circ r)^k$ *sont spéciales pour tout* $k \geq 0$.

4. Ou bien: $dim(X, D)_k > dim(X, D)_{k+1}$*, ou bien:* $(X, D)_k = (X, D)_{k+p}, \forall p > 0$.

5. Dans ce dernier cas, $k \leq n$*, et* $c = (J \circ r)^k$.

6. On a donc toujours: $c = (J \circ r)^n$.

Corollaire 11.4. *X est spéciale ssi elle est tour de fibrations orbifoldes à fibres ayant soit* $\kappa_+ = -\infty$*, soit* $\kappa = 0$.

Remarque 11.5. *Ceci permet de 'reduire' les conjectures 9.4 au cas des orbifoldes avec soit* $\kappa_+ = -\infty$*, soit* $\kappa = 0$.

12. Bibliographie

On pourra se reporter à [U], [D] et [L] pour plus de détails sur les notions de base utilisées ici.

[Bog-MQ]Bogomolov-Mac-Quillan. Preprint IHES 2001.
[BDPP] Boucksom-Demailly-Păun-Peternell.JAG 22(2013)
[C']Campana. Ann.Sc.ENS 25 (1992).
[C]Campana. J.Diff.Geom. (33) 1991.
[C"]Campana. Journal de l'institut mathématique de Jussieu. 2011.
[CPe]Campana-Peternell. Bull. SMF (131).2011.
[CPa]Campana-Păun.arXiv 1508.02456.
[Cla] Claudon. Séminaire Bourbaki. Novembre 2015.
[C-G]Clemens-Griffiths.
[D] O. Debarre. Higher Dimensional Algebraic Geometry. Universitext. Springer (2001).
[GHS]Graber-Harris-Starr.JAMS 16 (2003)
[I-M] Iskovskih-Manin.
[KoMiMo]Kollár-Miyaoka-Mori. JAG 1 (1992).
[L] R. Lazarsfeld. Erg. der Math. 48. Springer (2004).
[Mi] Miyaoka. Proc. Symp. Pure Math. 46 (1987).
[MM]Miyaoka-Mori. Ann. Math. 124 (1986)
[Mo]S. Mori. Ann. Math. 110 (1979)
[Nak]Nakayama. Zariski Decomposition and Abundance.Mathematical Society of Japan Memoirs 14 (2004)
[SB] Shepherd-Barron. Astérisque 211,§.9.
[U]K.Ueno.LNM 439.