Une propriété de détection en K-théorie Réelle

Nicolas Ricka

Université Paris XIII

Angers, 17 octobre 2013

Sommaire

Sommaire

Cohomologie des groupes

Pour un groupe G fixé, certains invariants topologiques de BG ont une interprétation algébrique qui les rendent accessibles.

- $H^*(G; A)$ coïncide avec $H^*(BG; A)$.
- On peut considérer la K-théorie unitaire périodique KU^*, et la K-théorie orthogonale périodique KO^*.

Théorème (Atiyah-Segal, 1969)

$KU^*(BG)$ et $KO^*(BG)$ sont compris explicitement à partir de la théorie des représentations de G.

Résultats

Question naturelle

Quid des versions connexes ko^* et ku^* de KO^* et KU^* ?

En utilisant Atiyah-Segal, on peut déterminer la *ko* et *ku*-cohomologie de certains groupes.

ku^* :

- Ossa 1989 : $ku^*(BG)$, pour $G = (\mathbb{Z}/p)^n$
- Bruner-Greenlees en 2003, Powell en 2011 résultats supplémentaires sur la *ku*-(co)homologie de certains groupes.

ko^* :

- Ossa 1989 : $ko^*(B(\mathbb{Z}/p)^n)$, calcul erroné.
- Cherng-Yih 1995 : corrige le calcul d'Ossa pour $p = 2$ dans sa thèse.
- Bruner-Greenlees 2010 : déterminent $ko^*(BG)$ pour sur une plus grande classe d'exemples.
- Powell 2012 : calcul du foncteur $V \mapsto ko^*(BV)$ pour $V = (\mathbb{Z}/2)^n$.

Outils utilisés pour les deux calculs

- Calcul de $ku^*(BG)$:
  - $H\mathbb{F}_2^*(BG)$ en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1)$-module ($Q_0$, Q_1 : deux premières opérations de Milnor).
- Calcul de ko^* :
  - $H\mathbb{F}_2^*(BG)$ en tant que $\mathcal{A}(1)$-module (où $\mathcal{A}(1) =< Sq^1, Sq^2 >$),
  - le calcul de $ku^*(BG)$,
  - la suite exacte longue de réalification-complexification.

Conclusion

On aimerait un objet qui contienne les deux formes de K-théorie, et qui se calcule de façon similaire à ku^*.

Sommaire

Homotopie $\mathbb{Z}/2$-équivariante

classique	$\mathbb{Z}/2$-équivariant
Top : espaces topologiques	$\mathbb{Z}/2\,Top$: espaces munis d'une involution
S^n, $n \in \mathbb{N}$	?

Il est très naturel de vouloir considérer le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^1$ muni de l'involution induite par la conjugaison complexe. C'est le compactifié en un point de la représentation $\mathbb{C}$.

Homotopie $\mathbb{Z}/2$-équivariante

classique	$\mathbb{Z}/2$-équivariant
Top : espaces topologiques	$\mathbb{Z}/2\,Top$: espaces munis d'une involution
S^n, $n \in \mathbb{N}$	S^U, compactifiée en un point de U, représentation de $\mathbb{Z}/2$
E^* : théorie de cohomologie $\mathbb{Z}$-graduée	$\underline{E}^\star$ théorie de cohomologie $RO(\mathbb{Z}/2)$-graduée, où $RO(\mathbb{Z}/2)$: groupe de Grothendieck des représentations de $\mathbb{Z}/2$
E spectre représentant une théorie de cohomologie	E spectre représentant une théorie de cohomologie $\mathbb{Z}/2$-équivariante

Théorie sous-jacente, théorie des points fixes

On a deux foncteurs $\mathbb{Z}/2\,Top \to Top$:

- foncteur des points fixes, $(-)^{\mathbb{Z}/2}$
- foncteur oubli, $(-)^u$.

Cette construction stabilise : à une théorie de cohomologie $\mathbb{Z}/2$-équivariante $\underline{E}^\star$, on associe naturellement :

- la théorie des points fixes $(E^{\mathbb{Z}/2})^*$
- la théorie sous-jacente $(E^u)^*$.

De plus, pour $X \in Top$,

$$(E^u)^*(X) \leftsquigarrow \underline{E}^\star(X) \rightsquigarrow (E^{\mathbb{Z}/2})^*(X)$$

K-théorie Réelle

Atiyah 1966 : théorie de cohomologie $\mathbb{Z}/2$-équivariante $\underline{K\mathbb{R}^\star}$. Sa version connexe $\underline{k\mathbb{R}^\star}$ est telle que

- la théorie sous-jacente à $\underline{k\mathbb{R}^\star}$ est $(k\mathbb{R}^u)^* = ku^*$,
- la théorie des points fixes associée à $\underline{k\mathbb{R}^\star}$ est $(k\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/2})^* = ko^*$.

De plus, pour $X \in Top$,

$$ku^*(X) \leftsquigarrow \underline{k\mathbb{R}^\star}(X) \rightsquigarrow ko^*(X)$$

Objectif

But

On souhaite comprendre $\underline{k\mathbb{R}^{\star}}(BV)$, où BV désigne l'espace classifiant de V, pour V un 2-groupe abélien élémentaire.

Sommaire

Une approche du cas non-équivariant

Les tours de Postnikov fournissent :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "v"'] & \vdots \\
ku^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\mathbb{Z}^*(X) \arrow[u, dashed] \arrow[ul, dashed] \\
ku^{*-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\mathbb{Z}^{*-2}(X) \arrow[u, dashed, "Q_1"'] \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"'] \\
ku^{*-4}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\mathbb{Z}^{*-4}(X) \arrow[u, dashed, "Q_1"'] \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"'] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
KU^*(X) &
\end{tikzcd}$$

Les flèches en pointillés désignent un morphisme de degré $+1$, et Q_1 est la seconde opération de Milnor.

Tour similaire pour KO^*.

Le cas général d'une tour $k_\bullet^*$

Considérons de façon générale une tour de foncteurs à valeurs dans une catégorie d'objets gradués dans une catégorie abélienne.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \\
k_n^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "e_n^*"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\triangle"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n^*(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed] \\
k_{n-1}^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "e_{n-1}^*"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\triangle"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1}^*(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed] \\
k_{n-2}^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "e_{n-2}^*"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\triangle"] & C_{n-2}^*(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
K^*(X).
\end{tikzcd}
$$

Détection

Définition

- On définit $tors_n(X) = Ker(k_n^*(X) \to K^*(X))$.
- Pour $h \geq 1$, la tour $(k_\bullet^*)$ vérifie la propriété de h-détection pour X si $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$tors_n(X) = ker(e_n^* e_{n-1}^* \dots e_{n-h+1}^*)$$

Exemple

En particulier, la tour $(k_\bullet^*)$ vérifie la propriété de 1-détection pour X si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $k_n^*(X) \to K^*(X) \oplus C_n^*(X)$ est injectif.

La 1-détection est le point clé du calcul classique

Théorème (Bruner-Greenlees)

Le morphisme $ku^*(BV) \to KU^*(BV) \oplus H\mathbb{Z}^*(BV)$ *est injectif, autrement dit la tour de Postnikov ré-indexée de* KU *vérifie la propriété de* 1-*détection pour les espaces* BV.

Théorème (Powell)

La tour de Postnikov ré-indexée de KO *vérifie la propriété de* 1-*détection pour les espaces* BV.

Ces deux résultats sont les points clés d'un calcul complet de $ku^*(BV)$ et $ko^*(BV)$.

Sommaire

On considère une tour associée à $\underline{k\mathbb{R}}^\star$. On l'appelle **la tour des tranches de $\underline{K\mathbb{R}}^\star$**.

- $H\underline{\mathbb{Z}}^\star$ est une théorie de cohomologie ordinaire $\mathbb{Z}/2$-équivariant
- $\mathbb{Q}_1$ est la seconde opération de Milnor $\mathbb{Z}/2$-équivariante, de degré $1 + \mathbb{C}$.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "v_1"'] & \vdots \\
\underline{k\mathbb{R}}^\star \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\underline{\mathbb{Z}}^\star \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\underline{\mathbb{Z}}^{\star-\mathbb{C}} \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-2\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[ur, phantom, "\triangle"] & H\underline{\mathbb{Z}}^{\star-2\mathbb{C}} \arrow[ul, dashed] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
\underline{K\mathbb{R}}^\star &
\end{tikzcd}
$$

Tour sous-jacente

$$
\left(
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "v_1"'] & \vdots \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] & \underline{H\mathbb{Z}}^{\star}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-\mathbb{C}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] & \underline{H\mathbb{Z}}^{\star-\mathbb{C}}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright", shift left=3] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-2\mathbb{C}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] & \underline{H\mathbb{Z}}^{\star-2\mathbb{C}}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright", shift left=3] \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
\underline{K\mathbb{R}}^{\star}(X) &
\end{tikzcd}
\right)^{u}
=
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "v_1"'] & \vdots \\
ku^{*}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & H\mathbb{Z}^{*}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[u, dashed] \\
ku^{*-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & H\mathbb{Z}^{*-2}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright", shift left=3] \arrow[u, dashed, "Q_1"'] \\
ku^{*-4}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & H\mathbb{Z}^{*-4}(X) \arrow[ul, dashed] \arrow[ul, phantom, "\triangle"', shift right=3] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright", shift left=3] \arrow[u, dashed, "Q_1"'] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
KU^{*}(X) &
\end{tikzcd}
$$

Tour des points fixes

$$
\left(
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, phantom, "\triangle", near start] & \vdots \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, phantom, "\triangle", near start] & H\underline{\mathbb{Z}}^{\star}(X) \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \arrow[ul, dashed] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-\mathbb{C}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", near end] \arrow[dr, phantom, "\triangle", near start] & H\underline{\mathbb{Z}}^{\star-\mathbb{C}}(X) \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \arrow[ul, dashed] \\
\underline{k\mathbb{R}}^{\star-2\mathbb{C}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", near end] & H\underline{\mathbb{Z}}^{\star-2\mathbb{C}}(X) \arrow[u, dashed, "\mathbb{Q}_1"'] \arrow[ul, dashed] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[u, dashed] \\
\underline{K\mathbb{R}}^{\star}(X) &
\end{tikzcd}
\right)^{\mathbb{Z}/2}
\neq
$$

Tour de Postnikov, ou ré-indexation de la tour de Postnikov de KO^*.

Résultat principal

Théorème (R.)

La tour des tranches de $\underline{K\mathbb{R}}^\star$ *vérifie la propriété de 2-détection pour les espaces* BV*, pour tout 2-groupe abélien élémentaire* V*.*

Résultat principal

Théorème (R.)

La tour des tranches de $\underline{K\mathbb{R}}^\star$ vérifie la propriété de 2-détection pour les espaces BV, pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.

On en déduit le calcul de $\underline{k\mathbb{R}}^\star(BV)$, et les résultats énoncés précédemment :

Corollaire (Bruner-Greenlees)

La tour de Postnikov ré-indexée de KU vérifie la propriété de 1-détection pour les espaces BV.

Corollaire (Powell)

La tour de Postnikov ré-indexée de KO vérifie la propriété de 1-détection pour les espaces BV.

Sommaire

Théorie de Borel

- Soit $E\mathbb{Z}/2$ l'espace universel pour le groupe $\mathbb{Z}/2$.
- L'application $E\mathbb{Z}/2 \to *$ induit une transformation naturelle entre foncteurs exacts $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge (-) \to id$.
- Pour un $\mathbb{Z}/2$-spectre E, $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge E$ capture essentiellement l'information du spectre non-équivariant sous-jacent à E.

Définition

On appelle spectre de Borel associée à E le $\mathbb{Z}/2$-spectre $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge E$.

Étape 1 : une tour de suites cofibres

On considère la tour de suites cofibres :

$$
\begin{tikzcd}
E\mathbb{Z}/2_+ \wedge k\mathbb{R} \arrow[d] & k\mathbb{R} \arrow[d] & \tilde{E}(k\mathbb{R}) \arrow[d, "f"'] \\
\Sigma^{-\mathbb{C}} E\mathbb{Z}/2_+ \wedge k\mathbb{R} \arrow[d] & \Sigma^{-\mathbb{C}} k\mathbb{R} \arrow[d] & \Sigma^{-\mathbb{C}} \tilde{E}(k\mathbb{R}) \arrow[d, "\Sigma^{-\mathbb{C}} f"'] \\
\Sigma^{-2\mathbb{C}} E\mathbb{Z}/2_+ \wedge k\mathbb{R} \arrow[d] \arrow[r] & \Sigma^{-2\mathbb{C}} k\mathbb{R} \arrow[d] \arrow[r] & \Sigma^{-2\mathbb{C}} \tilde{E}(k\mathbb{R}) \arrow[d, "\Sigma^{-2\mathbb{C}} f"'] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
E\mathbb{Z}/2_+ \wedge K\mathbb{R} & K\mathbb{R} & \tilde{E}(K\mathbb{R})
\end{tikzcd}
$$

Étape 2 : Se ramener à $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge k\mathbb{R}$

Proposition

La tour des tranches de $\underline{K\mathbb{R}}^\star$ vérifie la propriété de 2-détection pour les espaces BV si la tour de spectres de Borel associée vérifie la propriété de 1-détection.

Idées de démonstration

On montre que $f = 0$. Moralement, **c'est à cause de la relation** $\eta^3 = 0$ *dans ko^*, où $\eta \in ko^{-1}$. On conclut par une chasse au diagramme.* □

Étape 3 : l'obstruction à la 1-détection

Proposition

La tour de théories de Borel associée à la tour des tranches de $K\mathbb{R}$ vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau.

Idées de démonstration

- *Les cofibres de la tour de Borel sont $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{Z}}$. On a un relèvement de la seconde opération de Milnor $\mathbb{Z}/2$-équivariante $\mathbb{Q}_1$ à ce $\mathbb{Z}/2$-spectre, qui induit un morphisme* $\mathbb{Q}_1 : (E\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{Z}})^\star(BV) \to (E\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{Z}})^{\star+1+\mathbb{C}}(BV)$
- *On considère $\mathbb{H}^\star(V) := \frac{Ker(\mathbb{Q}_1)}{Im(\mathbb{Q}_1)}$.*
- *L'obstruction à la proposition est un certain morphisme $t : \mathbb{H}^\star(V) \to \mathbb{H}^{\star+1+2\mathbb{C}}(V)$.*
- *On s'est donc ramenés à montrer que $t = 0$.*

Idées de démonstration

La difficulté est donc maintenant de calculer $\mathbb{H}^\star(V)$, ensuite, $t = 0$ pour des raisons de degré. Le calcul fait intervenir

- *de l'algèbre homologique relative (par rapport au couple $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{Q}_0), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1))$,*
- *de l'homotopie stable sur la sous-algèbre $\mathcal{A}(1)$ de $\mathcal{A}$.*
- *des relations profondes entre l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$-équivariante et son analogue non-équivariante.*

$\square$