Théorie de l'homotopie des algèbres sur un PROP

Sinan Yalin

Université Lille 1

18 octobre 2013

Index

Index

Motivations 1

Idée

Les props sont des objets combinatoires encodant des opérations de la forme $X^{\otimes m} \rightarrow X^{\otimes n}$ dans une catégorie monoïdale symétrique (complexes de chaines, espaces topologiques, etc...).

Motivations 2

But général

Etude homotopique des structures algébriques codées par un PROP.

Ces structures apparaissent notamment en :

- théorie des groupes quantiques
- topologie des cordes
- théories de champ

PROPs

On travaille dans la catégorie $Ch_{\mathbb{K}}$ des complexes de chaines sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition

Un PROP dans $Ch_{\mathbb{K}}$ est une collection de complexes de chaines $P = \{P(m,n)\}$ munie :

- d'actions à droite de Σ_m et à gauche de Σ_n sur chaque $P(m,n)$;
- de produits de composition verticaux
$$\circ_v : P(k,n) \otimes P(m,k) \to P(m,n);$$
- de produits de composition horizontaux
$$\circ_h : P(m_1,n_1) \otimes P(m_2,n_2) \to P(m_1+m_2, n_1+n_2)$$

vérifiant des relations de compatibilité induites par les axiomes des catégories monoidales symétriques.

Algèbres sur un PROP

PROP des endomorphismes

A tout complexe X on peut associer un PROP appelé PROP des endomorphismes de X, noté End_X et défini par $End_X(m,n) = Hom(X^{\otimes m}, X^{\otimes n})$ où $Hom(-,-)$ est le hom interne de $Ch_{\mathbb{K}}$.

Définition

Une algèbre sur un PROP P est un complexe de chaines X muni d'un morphisme de props $P \to End_X$.

Exemples : P=BiAss, BiLie, Frob...

Théorie homotopique des PROPs

Théorème (Fresse)

(1) Pour $car(\mathbb{K}) = 0$, la catégorie des PROPs forme une catégorie de modèles à engendrement cofibrant où les fibrations et équivalences faibles sont définies composante par composante.
(2) Pour $car(\mathbb{K}) > 0$, la catégorie des PROPs à entrées non-vides forme une catégorie de semi-modèles à engendrement cofibrant où les fibrations et équivalences faibles sont définies composante par composante.

Algèbres à homotopie près

Définition

Soit P un PROP. Une P-algèbre à homotopie près est une P_∞-algèbre, où $P_\infty \xrightarrow{\sim} P$ est une résolution cofibrante de P.

Motivation : transfert de structures algébriques le long d'une équivalence faible.

Remarque

La notion d'algèbre à homotopie près dépend a priori du choix d'une résolution de P !

Problème

Il n'existe pas de foncteur algèbre libre sur un PROP quelconque, donc aucun moyen de transférer une structure de catégorie de modèles (dans certains cas il n'y a même pas de coproduit). C'est en particulier le cas pour les PROPs cofibrants.

Questions

(1) Existe-t-il tout de même un moyen d'encoder de l'information de nature homotopique pour les algèbres sur un PROP cofibrant ?
(2) La notion d'algèbre à homotopie près sur un PROP est-elle cohérente ?

Index

Espaces de classification

Définition

Une catégorie relative (M, wM) est la donnée d'une catégorie M et d'une sous-catégorie wM de M telle que $ob(wM) = ob(M)$. Les morphismes de wM sont appelés les équivalences faibles.

Définition

L'espace de classification d'une catégorie relative (M, wM) est le nerf simplicial $\mathcal{N}wM$ de wM.

Motivation

Théorème (Dwyer, Kan)

On a une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{N}wM \sim \coprod_{[X]} \overline{W}LwM(X,X)$$

où $[X]$ parcourt les classes d'équivalence faible des objets de M, $L(-)$ est le foncteur de localisation simpliciale et $\overline{W}(-)$ le complexe classifiant. Lorsque M est une catégorie de modèles, on a aussi une équivalence d'homotopie

$$\overline{W}LwM(X,X) \sim \overline{W}haut(X)$$

où $haut(X)$ est le monoïde simplicial des auto-équivalences faibles d'une résolution fibrante-cofibrante de X.

Algèbres sur un PROP cofibrant

Soit P_∞ un PROP cofibrant.

- On note $Ch_{\mathbb{K}}^{P_\infty}$ la catégorie des P_∞-algèbres différentielles graduées.
- On définit la catégorie $wCh_{\mathbb{K}}^{P_\infty}$ comme la sous-catégorie de $Ch_{\mathbb{K}}^{P_\infty}$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont des quasi-isomorphismes au niveau des complexes de chaines.
- On considère l'espace de classification correspondant $\mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{P_\infty}$, qui encode de l'information de nature homotopique associée aux quasi-isomorphimes.

Problème

L'espace $\mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{P_\infty}$ dépend a priori du choix de P_∞ !

Cas opéradique

- Un morphisme d'opérades $\varphi : P \to Q$ induit une adjonction

$$\varphi_! : Ch_{\mathbb{K}}^{Q} \rightleftarrows Ch_{\mathbb{K}}^{P} : \varphi^*.$$

- Lorsque $\varphi : P \xrightarrow{\sim} Q$ est une équivalence faible d'opérades cofibrantes, l'adjonction $(\varphi_!, \varphi^*)$ forme une équivalence de Quillen.
- Toute équivalence de Quillen entre deux catégories de modèles induit une équivalence faible des espaces de classification correspondants (Dwyer, Kan).
- On a donc une équivalence faible d'ensembles simpliciaux $\mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{P} \sim \mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{Q}$.

Invariance homotopique

Théorème 1 (Y.)

Soit $\varphi : P \xrightarrow{\sim} Q$ une équivalence faible de PROPs cofibrants. Le morphisme φ induit un foncteur $\varphi^* : wCh_{\mathbb{K}}^{Q} \to wCh_{\mathbb{K}}^{P}$. Ce foncteur induit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux $\mathcal{N}\varphi^* : \mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}wCh_{\mathbb{K}}^{P}$.

Théorème 2 (Y.)

Soit P un PROP cofibrant. Il existe un objet en chemins fonctoriel dans la catégorie des P-algèbres.

Idée de preuve 1

- Soit X un complexe de chaines. On considère un bon objet en chemins dans $Ch_{\mathbb{K}}$. Cet objet s'insère dans un diagramme commutatif

$$\mathcal{Y}(X) : \begin{tikzcd} & & X . \\ X \arrow[r, "\sim", "s"'] \arrow[urr, bend left, "="] \arrow[drr, bend right, "="'] & Z(X) \arrow[ur, "\sim", "d_0"'] \arrow[dr, "d_1", "\sim"'] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

- PROP d'endomorphismes d'un diagramme : à tout diagramme $\{X_i\}_{i\in I}$ de complexes de chaines on peut associer un PROP $End_{\{X_i\}_{i\in I}}$ tel que les morphismes de PROPs $P \to End_{\{X_i\}_{i\in I}}$ définissent des structures de P-algèbres sur les X_i et de morphismes de P-algèbres sur les flèches.

Idée de preuve 2

- On a une fibration acyclique

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & End_{\mathcal{Y}(X)} \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ P \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & End_{X=X=X} \end{tikzcd},$$

  d'où l'existence d'un relèvement $P \to End_{\mathcal{Y}(X)}$.
- Problème : cette action de P n'est pas fonctorielle ! On introduit donc la notion de PROP d'endomorphismes P-modifiés via lesquels on factorise les actions de P pour obtenir la fonctorialité.
- On utilise le foncteur objet en chemins du théorème 2 pour prouver le théorème 1.

Conclusion

Conclusion

L'espace de classification est un invariant homotopique bien défini des algèbres à homotopie près.

Index

Espaces de modules de structures algébriques

Définition

Soient P un PROP et X un complexe de chaines. L'espace de modules des structures de P-algèbre sur X est l'ensemble simplicial défini par

$$P\{X\} = Map_{PROP}(P, End_X) = Mor_{PROP}(P, End_X^{\Delta^\bullet})$$

où $End_X^{\Delta^\bullet}$ est une résolution simpliciale de End_X.

Propriétés

(1) Si P est cofibrant alors $P\{X\}$ est un complexe de Kan et

$$\pi_0 P\{X\} = [P, End_X]_{Ho(PROP)}$$

est l'ensemble des classes d'homotopie des P-structures sur X.
(2) Une équivalence faible de PROPs cofibrants $P \xrightarrow{\sim} Q$ induit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux $Q\{X\} \xrightarrow{\sim} P\{X\}$.

Les espaces de modules comme fibres homotopiques

Les espaces de modules approximent l'espace de classification de la manière suivante :

Théorème (Y.)

Soient P un PROP cofibrant et X un complexe de chaines. Alors le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} P\{X\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N}(w(Ch_{\mathbb{K}})^P) \arrow[d, "\mathcal{N}U"] \\ \{X\} \arrow[r] & \mathcal{N}(wCh_{\mathbb{K}}) \end{tikzcd}$$

est un pullback homotopique d'ensembles simpliciaux, où $U : Ch_{\mathbb{K}}^P \to Ch_{\mathbb{K}}$ est le foncteur oubli.

Automorphismes homotopiques

Corollaire

Ce théorème implique une décomposition de l'espace de modules

$$P\{X\} \sim \coprod_{[X]} \overline{W}Lw(Ch_{\mathbb{K}})^{P})(X,X)$$

où $[X]$ parcourt les classes d'équivalences faibles de P-algèbres ayant X pour complexe sous-jacent.

Cela signifie que :

- L'espace de modules encode des informations sur les automorphismes homotopiques de toute P-algèbre de complexe X.
- Les espaces d'automorphismes homotopiques de P-algèbres $Lw(Ch_{\mathbb{K}})^{P})(X,X)$ sont des ensembles.

Index

Théorie de l'homotopie

Idée : à toute catégorie relative (C, wC) on peut associer une théorie d'homotopie que la catégorie homotopique $C[wC^{-1}]$ ne reflète qu'en partie. Pour cela on utilise la localisation simpliciale de Dwyer-Kan, qui associe à (C, wC) une catégorie simpliciale $L(C, wC)$.

Proposition (Dwyer,Kan)

- On a une équivalence de catégories $\pi_0 L(C, wC) \cong C[wC^{-1}]$.
- Les espaces de morphismes enrichis $L(C, wC)(X, Y)$ sont des complexes de Kan.

Invariance de la localisation simpliciale

Théorème (Y.)

Une équivalence faible de PROPs cofibrants $P \xrightarrow{\sim} Q$ induit un zigzag d'équivalences de Dwyer-Kan entre les localisations simpliciales

$$L(Ch_{\mathbb{K}}^{Q}, wCh_{\mathbb{K}}^{Q}) \cong L(Ch_{\mathbb{K}}^{P}, wCh_{\mathbb{K}}^{P}).$$

Corollaire

On a une équivalence de catégories homotopiques

$$Ch_{\mathbb{K}}^{Q}[(wCh_{\mathbb{K}}^{Q})^{-1}] \cong Ch_{\mathbb{K}}^{P}[(wCh_{\mathbb{K}}^{P})^{-1}].$$

Conclusion

- La théorie de l'homotopie des algèbres à homotopie près ne dépend pas du choix d'une résolution du PROP sous-jacent. La notion d'algèbre à homotopie près est donc cohérente dans un cadre très général.
- Ce résultat donne un sens aux problèmes de réalisation homotopique dans ce contexte.
- On peut l'étendre aux diagrammes d'algèbres (plus généralement aux algèbres sur les PROPs dits colorés).

Merci de votre attention.