Topologie Algébrique et Applications– Colloque annuel du GdR 2875

17-20 octobre 2017, IMJ-PRG, Bâtiment Sophie Germain, Amphi Turing

Programme Scientifique

La journée du 17 octobre est consacrée à la préparation du mini-cours de

Natalia Castellana–*Hopf spaces and loop spaces with finiteness conditions*

Résumé :

Part I : We will introduce the concept of H-space (or Hopf space), together with its basic properties concerning homotopy theory. Classical examples from topological groups, Lie groups and loop spaces led to the notion of finte loop spaces. Rector initiated the study of the homotopy theory of loop spaces by developing the homotopy theoy of its classifying spaces. When those spaces are localized/completed at a prime p, the corresponding theory and its techniques was introduced by Dwyer and Wilkerson leading to the theory of p-compact groups. We will see how close those spaces are to connected Lie groups by proving classical theorems in a homotopy theoretic setting.

Part II : We will go one step further in relaxing the finiteness conditions on loop spaces and we will show how thay can be described by using techniques from homotopical idempotent functors developed by Bousfield and Dror-Farjoun combined with the Krull filtration of the category of unstable modules over the Steenrod algebra. This structure result allows to generalize classical statements known for finite H-spaces, like Hubbuck's torus theorem. This lecture is mainly based on joint work with J.A. Crespo and J. Scherer.

Part III : It is natural to consider even more relaxed finiteness conditions on the cohomology. Many infinite loop spaces do not satisfy the conditions required in the previous lecture. In this last lecture I will describe some possible ways of going further in this program to understand H-spaces filtered by finiteness conditions.

Mardi 17 octobre

11h30– **Jacques Darné**–*Propriétés homotopiques des groupes de Lie*

Les groupes de Lie sont des variétés différentielles qui possèdent une structure de groupe lisse. Ils possèdent de nombreuses propriétés homotopiques remarquables. Dans ce survol, nous allons rappeler quelques-unes d'entre elles :
- le calcul de leurs nombres de Lefschetz et de leurs caractéristiques d'Euler ;
- l'existence de tores maximaux ;
- les propriétés du groupe de Weyl associé à un groupe de Lie ;
- le calcul de la cohomologie de l'espace classifiant d'un groupe de Lie.

14h15– **Arthur Soulié**–*Opérades et espaces de lacets*

Les H-espaces sont des versions homotopiques des groupes topologiques. L'existence d'une structure de H-espace sur un espace topologique induit certaines contraintes sur le type d'homotopie de cet espace : par exemple son homologie (sur un corps) doit être une algèbre de Hopf.

Il est en fait possible de "délacer" un H-espace : sous certaines conditions, un H-espace X est faiblement équivalent à un espace de lacets $\Omega(Y)$. L'opérade de Stasheff permet de décrire explicitement un espace, la "construction bar" BX de X, qui généralise la notion d'espace classifiant et est telle que X est faiblement équivalent à $\Omega(BX)$.

15h30– **Jean-Michel Fischer**–*Localisation, p-complétion et carrés arithmétiques*

Fixons un corps F égal à F_p (avec p premier) ou $\mathbb{Q}$. Au lieu d'étudier tout le type d'homotopie des espaces topologiques, il est possible d'étudier leur type d'homotopie en se restreignant au corps F. On obtient ainsi une catégorie homotopique des espaces topologiques à "F-équivalences près", qui est une "localisation" de la catégorie homotopique habituelle des espaces.

Certains espaces, les espaces "p-complets" (ou "rationnels" si $F = \mathbb{Q}$), ont un type d'homotopie qui ne dépend que de leur type d'homotopie sur F. Tous les espaces topologiques sont équivalents à un espace p-complet (resp. rationnel) via une procédure appelée "complétion", et le calcul du type d'homotopie d'un espace à F-équivalences près se réduit au calcul du type d'homotopie de sa complétion. Enfin, étant donné un espace X, si l'on connait tous ses p-complétés ainsi que sa rationalisation, il est possible de récupérer le type d'homotopie de X via une procédure qui passe par les carrés arithmétiques.

16h50– **Sylvain Douteau**–*Modules instables sur l'algèbre de Steenrod*

L'existence d'un élément d'invariant de Hopf un dans le groupe d'homotopie $\pi_{2n-1}(S^n)$ est équivalent à l'existence d'une structure de H-espace sur la sphère S^n. En 1960. J.-F. adams a montré que les seuls cas possibles étaient $n = 0, 1, 3, 7$. La solution proposée par Adams utilise des propriétés fines des opérations de Steenrod.

Dans cet exposé, après avoir introduit l'algèbre de Steenrod on montrera comment l'utilisation des relations d'Adem permet de réduire le problème au cas $n = 2^r - 1$.

Mercredi 18 octobre

9h00– **Yonatan Harpaz** –*Cohomology of higher categories*

In classical algebraic topology one often studies maps from a space X to a space Y by considering the Postnikov tower of Y and building maps from X to Y by lifting them successively along the tower. This approach can be streamlined into an efficient obstruction theory and an associated Bousfield-Kan spectral sequence starting from the cohomology of X with (local) coefficients in the homotopy groups of Y, and abutting to the homotopy groups of the space of maps from X to Y. In this talk we will describe a natural analogue of this useful theory when spaces are replaced with (∞, n)-categories. The relevant form of cohomology then turns out to be a suitable version of Quillen cohomology. When $n = 1$ we will explain how to describe this cohomology in terms of the twisted arrow category construction, while for $n = 2$ we find that it depends on a new notion which we call the twisted 2-cell category. If time permits we will demonstrate how to use this Quillen obstruction theory to show that adjunctions in $(\infty, 2)$-categories are determined by low dimensional data. This is joint work with Joost Nuiten and Matan Prasma.

10h00– **Bruno Stonek**–*Topological Hochschild homology of KU*

We give different descriptions of the topological Hochschild homology (THH) of the complex topological K-theory ring spectrum KU as a commutative KU-algebra. We also describe the iterated THH of KU.

11h20– **Marco Robalo**–*Brane actions for ∞-operads and applications.*
In this talk I will explain the idea of brane actions introduced by Toen and how they can be applied to infinity operads and to the particular case of the moduli space of curves.

14h00– **Cours de Natâlia Castellana**

15h25– **Julien Ducoulombier**–*Swiss-Cheese operad and applications to spaces of long embeddings*
During this talk, I would like to give an overview of the (relative) delooping theorems as well as applications to spaces of long embeddings. In particular, we show that the space of long embeddings and the space of (k)-immersions from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}^m$ are weakly equivalent to an explicit d-iterated loop space and an explicit d-iterated relative loop space, respectively. Both of them can be expressed in term of derived mapping spaces of coloured operads. Such a pair is a typical example of Swiss-Cheese algebra.

16h45– **Daniela Egas Santander**–*Derived A-infinity algebras and their homotopies*
The notion of a derived A-infinity algebra, introduced by Sagave, is a generalization of the classical A-infinity algebra, relevant to the case where one works over a commutative ring rather than a field. Special cases of such algebras are A-infinity algebras and twisted complexes (also known as multicomplexes).

We initiate a study of the homotopy theory of these algebras, by introducing a hierarchy of notions of homotopy between their morphisms. In this talk I will define these objects and describe two different interpretations of them as A-infinity algebras in twisted complexes and as A-infinity algebras in split filtered cochain complexes. We use this reinterpretation to show that this hierarchy of homotopies is an extension of the special case of twisted complexes.

This is joint work with Joana Cirici, Muriel Livernet and Sarah Whitehouse.

Jeudi 19 octobre

9h00– **Victorya Ozornova**–*Splitting of* $\mathrm{TMF}_0(7)$
In a joint ongoing project with Lennart Meier, we exhibit a splitting of $TMF_0(7)$ into shifted copies of TMF and $TMF_1(2)$ at the prime 3. This splitting is promoting a splitting of corresponding vector bundles on the moduli stack of elliptic curves. In this talk, I will give an overview over these notions and then discuss the known splitting results.

10h00– **Arthur Soulié**–*Long-Moody constructions and generalizations.*
In 1994, Long and Moody gave a construction on representations of braid groups which associates a representation of B_n with a representation of B_{n+1}. This construction complexifies in a sense the initial representation : for instance, starting from a dimension one representation, one obtains the unreduced Burau representation. In this talk, I will present this construction and its generalizations from a functorial point of view. I will explain that each construction of Long and Moody defines an endofunctor, called a Long-Moody functor, on a suitable category of functors. I will give generalizations of this construction to other families of groups such as automorphism groups of free groups, mapping class groups of orientable and non-orientable surfaces or mapping class groups of 3-manifolds. After defining notions of polynomial functors in this context, I will prove that the Long-Moody functors increase by one the degree of polynomiality. Thus, the Long-Moody constructions will provide new examples of twisted coefficients corresponding to the framework developed by Randal-Williams and Wahl in 2015 to prove homological stability with certain twisted coefficients for different families of groups, in particular the aforementioned ones.

11h20– **Jacques Darné**–*Autour du problème d'Andreadakis*

Soit F_n le groupe libre sur n générateurs. On considère le groupe IA_n des automorphismes de F_n agissant trivialement sur son abélianisé. La structure de ce groupe est mal connue. Par exemple, si on lui connait depuis longtemps un ensemble fini de générateurs explicites, on ne sait pas s'il est de présentation finie pour $n \geq 4$. Pour étudier sa structure, on peut définir deux filtrations ayant des propriétés similaires, l'une étant donnée par la structure interne du groupe, l'autre à partir de son action sur le groupe libre. Dans les années 1970, Andreadakis conjectura qu'elles coincidaient. Néanmoins, de récents calculs ont infirmé cette conjecture. Dans cet exposé, on présentera quelques progr'es récents autour d'une version stable de la conjecture.

14h00– **Cours de Natàlia Castellana**

15h25– **Andrea Gagna**–*Les n-catégories strictes comme modèles des types d'homotopie*

La catégorie n-$\mathcal{C}at$ des petites n-catégories strictes est munie d'une structure très riche. On pense aux petites n-catégories strictes comme à des formes, des espaces. En utilisant le nerf de Street, on obtient une réalisation géometrique des n-catégories. En particulier, on a une notion induite d'équivalence faible entre n-catégories : un n-foncteur entre celles-ci est une équivalence faible si son nerf est une équivalence faible simpliciale. À l'aide des complexes dirigés augmentés introduits par Steiner, on verra que le nerf de Street induit une équivalence entre les catégories homotopiques des n-catégories et des ensembles simpliciaux. Ainsi les petites n-catégories strictes sont bien un modèle des types d'homotopie.

16h45– **Clément Dupont**–*Les espaces de module de Brown et l'opérade de gravité*

Dans cet exposé, nous introduirons les espaces de modules de Brown, des espaces de modules de courbes en genre zéro qui jouent un rôle dans l'étude géométrique des nombres multizéta et d'autres périodes. Nous expliquerons la preuve de deux résultats essentiellement équivalents. D'une part, la pureté de la structure de Hodge sur la cohomologie de ces espaces. D'autre part, la liberté de l'opérade non symétrique sous-jacente à l'opérade de gravité, introduite par Getzler. Ceci est un travail en commun avec Bruno Vallette.

Vendredi 20 octobre

9h00– **Baptiste Chantraine**–*Catégories associées à une sous-variété legendrienne*

Nous décrirons deux familles de catégories associées à une sous-variété legendrienne. La première (dg) est construite en étudiant les faisceaux à support singulier sur la sous-variété en question. La seconde (A_∞) est construite à partir des représentations de l'algèbre différentielle de Chekanov-Eliashberg de celle-ci. Nous ferons des calculs explicites sur les n ?uds toriques $(2, n)$ qui nous pousserons à conjecturer que ces deux familles sont quasi-équivalentes. Ces calculs forment un travail en cours en collaboration avec L. Ng et S. Sivek. En introduction, nous rappellerons les aspects de base de la théorie des nœuds legendriens.

10h00– **Daniel Robert-Nicoud**–*Représentation de l'infini-groupoï ide de déformation*

On construit une algèbre de Lie cosimpliciale qui représente (à homotopie près) le foncteur qui envoie une algèbre de Lie sur son infini-groupoide de déformation associé, un complexe de Kan qui code l'espace des éléments de Maurer-Cartan de l'algèbre de Lie. On montre que cet objet a des bonnes propriétés. Les instruments utilisés sont certains nouveaux résultats opéradiques et un peu de théorie de l'homotopie simpliciale.

11h20– **Cours de Natàlia Castellana**

14h00– **Rémi Molinier**–*Cohomology with twisted coefficients of the classifying space of a fusion system and stable elements*

There is a strong relationship between a finite group G and its classifying space BG. In particular, the Martino-Priddy conjecture, proved by Oliver, shows that the homotopy type of the p-completion of BG is completely determined by the p-local structure of G. The p-local structure of a finite group is, roughly speaking, how G acts on its p-subgroups by conjugation and is encoded by a finite category called the fusion system of G. We can define more generally the notion of a fusion system $\mathcal{F}$ over a p-group S which behaves as the p-local structure of a group, with S as Sylow p-subgroup, but may not come from an actual group. Broto, Levi and Oliver constructed a classifying space $B\mathcal{F}$ of a fusion system $\mathcal{F}$ and it has the same homotopy properties as p-completed classifying spaces of finite groups. We will discuss the cohomology with twisted coefficient of $B\mathcal{F}$ and we will compare it with some "$\mathcal{F}$-stable" elements in the cohomology of S.

16h45– **Simona Paoli**–*n-Fold models of the building blocks of spaces*

A classical way to study topological spaces is by breaking them into smaller components, the n-types, via the so called Postnikov decomposition. It is desirable in view of applications to find models of such a Postnikov decomposition built out of purely algebraic and categorical tools. These are called algebraic-categorical models of n-types. In joint work with Blanc we built a functor which associates to a space an algebraic structure called a weakly globular n-fold groupoid, which has desirable properties in view of applications. We showed that this induces a functor from the homotopy category of n-types to a suitable localization of weakly globular n-fold groupoids, and this functor is essentially surjective on objects. I will explain how to enlarge the category of weakly globular n-fold groupoids so that this functor becomes an equivalence of categories. The resulting algebraic model of n-types is called groupoidal weakly globular n-fold categories. I will briefly explain how this appears as the homotopy hypothesis of a new model of weak n-categories. Part of this talk is based on joint work with David Blanc.