Structure galoisienne relative d'anneaux d'entiers et codes cycliques

Soient k un corps de nombres, Γ un groupe fini et $\mathrm{Cl}(O_k[\Gamma])$ le groupe des classes des $O_k[\Gamma]$-modules localement libres. On note $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ le sous-ensemble de $\mathrm{Cl}(O_k[\Gamma])$ formé par les classes d'anneaux d'entiers O_N d'extensions galoisiennes modérées N/k, avec $\mathrm{Gal}(N/k) \cong \Gamma$; $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ est appelé l'ensemble des classes galoisiennes ralisables. Nous déterminons $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$, et montrons que c'est un sous-groupe de $\mathrm{Cl}(O_k[\Gamma])$, au moyen d'une description utilisant un idéal de Stickelberger et des propriétés de certains codes cycliques, lorsque k contient une racine de l'unité d'ordre premier p et $\Gamma = V \rtimes C$, où V est un groupe élémentaire abélien d'ordre p^r et C est un groupe cyclique d'ordre $m > 1$ agissant fidèlement sur V et rendant V un $\mathbb{F}_p[C]$-module irréductible. Ceci généralise et raffine des résultats de Byott, Greither et Sodaïgui [*J. reine angew. Math.* **601** (2006) 1–27] pour $p = 2$, respectivement de Bruche et Sodaïgui [*J. Number Theory* **128** (2008), 954–978] pour $p > 2$, lesquels couvrent seulement le cas $m = p^r - 1$ et déterminent seulement l'image $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{R}(O_k[\Gamma])$ sous l'extension des scalaires de $O_k[\Gamma]$ à un ordre maximal $\mathcal{M} \supset O_k[\Gamma]$ dans $k[\Gamma]$. Le résultat principal ici généralise donc la description de $\mathcal{R}(O_k[A_4])$ pour le groupe alterné A_4 de degré 4 (le cas $p = r = 2$) donnée par Byott et Sodaïgui dans [Compositio Math. **141** (2005), 573–582].