

TRACER DES LIGNES SUR L'EAU

ORIGINE DIALECTIQUE ET RÔLE INFÉRENTIEL
DES POSTULATS D'EUCLIDE

Vincenzo De Risi



SPHERE

Sciences • Philosophie • Histoire

Projet d'une histoire de l'axiomatique

Étudier l'évolution du plus haut idéal du savoir scientifique, depuis la naissance de la méthode axiomatique dans la Grèce antique jusqu'à aujourd'hui.

Les mathématiques comme paradigme, mais extension de la méthode à bien d'autres disciplines au fil des siècles.

L'apparence d'une forte continuité épistémologique résulte d'une forte continuité des pratiques.

Il existe pourtant des différences fondamentales dans la conception des axiomes, et donc de l'idéal scientifique, au cours des siècles.

Naissance de la méthode axiomatique en Grèce.

Platon donne une première description de la déduction à partir d'hypothèses dans la *République*, et il déplore que les mathématiciens de son temps commencent à prendre des hypothèses pour des principes premiers.

Aristote propose dans les *Seconds Analytiques* une théorie de la science fondée sur des axiomes. Il dit explicitement qu'il prend pour modèle les mathématiques de son époque.

Euclide fonde les *Éléments* sur un certain nombre de principes premiers. Les *Éléments* sont un recueil d'essais mathématiques écrits au siècle précédent, probablement semblables à ceux que Platon et Aristote avaient sous les yeux.

Dans la tradition ultérieure, la tradition aristotélicienne et la tradition euclidienne fusionnèrent complètement.

Les *Seconds Analytiques* furent compris comme la théorie de la méthode axiomatique, et les *Éléments* comme son exemple paradigmatique.

Les principes placés au début des *Éléments* d'Euclide sont des définitions, des postulats et des notions communes.

L'importance des définitions et des axiomes communs est théorisée dans les *Analytiques*, qui donnent comme exemple d'axiome commun une notion commune d'Euclide : « Des choses égales retranchées de choses égales donnent des choses égales ».

Cependant, les postulats sont totalement absents chez Aristote.

Notions communes dans les plus anciens manuscrits des *Éléments* (IXe s.)

CN1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

CN2 : Si l'on ajoute des égaux à des égaux, les tous sont égaux.

CN3 : Si l'on retranche des égaux à des égaux, les restes sont égaux.

CN6 : Si l'on ajoute des égaux à des choses inégales, les tous sont inégaux.

CN7 : Si l'on retranche des égaux à des choses inégales, les restes sont inégaux.

CN8 : Les doubles d'une même chose sont égaux.

CN9 : Les moitiés d'une même chose sont égales.

CN4 : Les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles.

CN5 : Le tout est plus grand que la partie.

P6 : Deux droites n'enferment pas d'espace.

Notions communes dans l'édition critique de Ludvig Heiberg (1884)

CN1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

CN2 : Si l'on ajoute des égaux à des égaux, les tous sont égaux.

CN3 : Si l'on retranche des égaux à des égaux, les restes sont égaux.

~~CN6 : Si l'on ajoute des égaux à des choses inégales, les tous sont inégaux.~~

~~CN7 : Si l'on retranche des égaux à des choses inégales, les restes sont inégaux.~~

~~CN8 : Les doubles d'une même chose sont égaux.~~

~~CN9 : Les moitiés d'une même chose sont égales.~~

CN4 : Les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles.

CN5 : Le tout est plus grand que la partie.

~~P6 : Deux droites n'enferment pas d'espace.~~

Les trois premières notions communes sont bien attestées.

Elles sont citées par Euclide lui-même : CN1 dans *Éléments* I, 1, 2 et 13 ; CN2-CN3 dans *Données* 3 et 4.

CN3 est aussi citée par Aristote (quelques décennies avant les *Éléments*), tandis que CN1 est attribuée, par des sources indirectes, à Apollonius et à Carnéade (quelques décennies après les *Éléments*).

Notions communes dans l'édition critique de Ludvig Heiberg (1884)

CN1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

CN2 : Si l'on ajoute des égaux à des égaux, les tous sont égaux.

CN3 : Si l'on retranche des égaux à des égaux, les restes sont égaux.

~~CN6 : Si l'on ajoute des égaux à des choses inégales, les tous sont inégaux.~~

~~CN7 : Si l'on retranche des égaux à des choses inégales, les restes sont inégaux.~~

~~CN8 : Les doubles d'une même chose sont égaux.~~

~~CN9 : Les moitiés d'une même chose sont égales.~~

~~CN4 : Les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles.~~

~~CN5 : Le tout est plus grand que la partie.~~

~~P6 : Deux droites n'enferment pas d'espace.~~

CN4-CN5 ne sont mentionnées ni chez Aristote ni dans les autres sources du temps d'Euclide. Apollonius aurait probablement employé CN4 si elle avait déjà existé.

De nombreuses sources des siècles suivants ne citent que les trois premières notions communes :

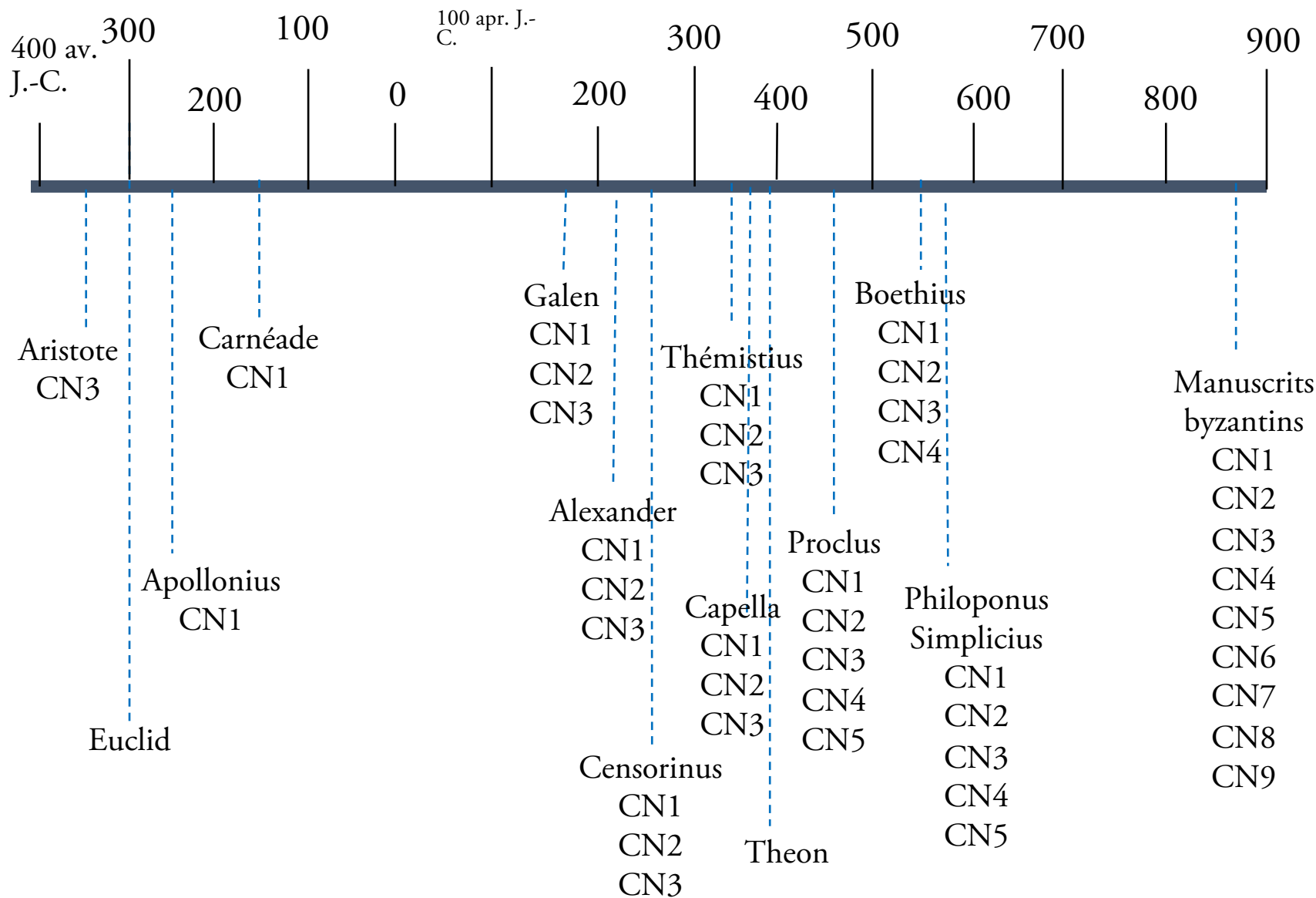
Galien (IIe siècle apr. J.-C.), Alexandre (IIIe siècle), Censorinus (IIIe siècle), Thémistius (IVe siècle), Capella (IVe siècle) ne renvoient qu'à CN1-CN3.

CN4 et CN5 sont plutôt citées par des commentateurs plus tardifs, comme Philopon, Simplicius et Boèce (Ve–VIe siècle).

Proclus (Ve siècle) connaît CN4 et CN5, mais dit que Héron (Ier siècle) ne reconnaissait que trois notions communes.

Simplicius dit que les manuscrits anciens ne contiennent que les trois premières notions communes.

Une édition importante des *Éléments* par Théon d'Alexandrie au IVe siècle. Une ligne de partage entre deux traditions.



Les trois premières notions communes sont très probablement authentiques :

CN1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

CN2 : Si l'on ajoute des égaux à des égaux, les tous sont égaux.

CN3 : Si l'on retranche des égaux à des égaux, les restes sont égaux.

Les deux autres notions communes ont probablement été interpolées par Théon d'Alexandrie au IV^e siècle :

CN4 : Les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles.

CN5 : Le tout est plus grand que la partie.

Les postulats des Éléments d'Euclide :

Qu'il soit postulé :

- 1) qu'on puisse mener une ligne droite de n'importe quel point à n'importe quel autre point
- 2) qu'une droite puisse être prolongée continûment en ligne droite
- 3) qu'on puisse décrire un cercle avec n'importe quel centre et n'importe quel rayon
- 4) que tous les angles droits soient égaux entre eux
- 5) que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent de ce côté-là, où sont les angles inférieurs à deux droits
- 6) que deux droites n'enferment pas d'espace

Les postulats des Éléments d'Euclide :

Qu'il soit postulé :

- 1) qu'on puisse mener une ligne droite de n'importe quel point à n'importe quel autre point
- 2) qu'une droite puisse être prolongée continûment en ligne droite
- 3) qu'on puisse décrire un cercle avec n'importe quel centre et n'importe quel rayon
- 4) que tous les angles droits soient égaux entre eux
- 5) que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent de ce côté-là, où sont les angles inférieurs à deux droits
- 6) ~~que deux droites n'enferment pas d'espace~~

Les postulats des Éléments d'Euclide :

Qu'il soit postulé :

- 1) qu'on puisse mener une ligne droite de n'importe quel point à n'importe quel autre point
- 2) qu'une droite puisse être prolongée continûment en ligne droite
- 3) qu'on puisse décrire un cercle avec n'importe quel centre et n'importe quel rayon
- ~~4) que tous les angles droits soient égaux entre eux~~
- 5) que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent de ce côté-là, où sont les angles inférieurs à deux droits
- ~~6) que deux droites n'enferment pas d'espace~~

Les postulats des Éléments d'Euclide :

Qu'il soit postulé :

- 1) qu'on puisse mener une ligne droite de n'importe quel point à n'importe quel autre point
- 2) qu'une droite puisse être prolongée continûment en ligne droite
- 3) qu'on puisse décrire un cercle avec n'importe quel centre et n'importe quel rayon
- 5) que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent de ce côté-là, où sont les angles intérieurs à deux droits

Il s'agit (pour nous) des principes les plus importants des mathématiques antiques, et ils sont les ancêtres directs des axiomatisations actuelles de la géométrie élémentaire. Il existe une tradition ininterrompue d'études fondationnelles fondées sur ces principes.

Il est difficile de comprendre ce qu'ils signifiaient pour Euclide, car il ne le dit pas et Aristote n'en fait aucune mention.

Scepticisme à l'égard du scepticisme : il produit des anachronismes.

Il s'agit (pour nous) des principes les plus importants des mathématiques antiques, et ils sont les ancêtres directs des axiomatisations actuelles de la géométrie élémentaire. Il existe une tradition ininterrompue d'études fondationnelles fondées sur ces principes.

Il est difficile de comprendre ce qu'ils signifiaient pour Euclide, car il ne le dit pas et Aristote n'en fait aucune mention.

Scepticisme à l'égard du scepticisme : il produit des anachronismes.

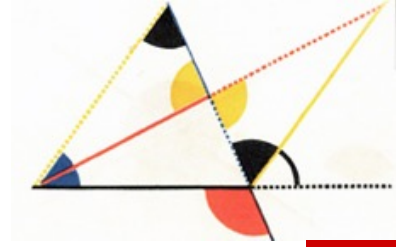
But : proposer une explication de l'origine et une interprétation de la signification des postulats d'Euclide.

Quelques questions auxquelles toute hypothèse sur la naissance et la signification des postulats doit répondre :

1) Pourquoi des postulats ? La géométrie pouvait se faire sans principes. La géométrie grecque ultérieure n'utilise pas de postulats.

2) Pourquoi seulement certains postulats ? Selon les critères modernes, il manque de nombreux axiomes.

3) Pourquoi n'a-t-on pas étudié de géométries non euclidiennes (c'est-à-dire d'autres systèmes d'axiomes) dans l'Antiquité ? Thèse d'Imre Tóth. Saccheri en 1733.



L'origine dialectique des postulats

Nous avons très peu de témoignages antiques sur les postulats. Silence significatif : ils ne pouvaient pas être compris comme les principes les plus importants des mathématiques, comme ils le sont pour nous aujourd'hui.

Quelques témoignages sur la classification des principes : Proclus et les commentateurs aristotéliens. Une classification plutôt qu'une explication.

Un seul témoignage sur l'origine des postulats : Simplicius dans Al-Nayrīzī.

Tardif et suspect. Pourtant : Simplicius était un érudit, il avait accès à d'autres œuvres, et il nous renseigne même sur les manuscrits des *Éléments*.

Surtout : il fait découvrir toute une série d'autres textes.

Simplicius parle d'objections aux constructions admises par les postulats d'Euclide.

Important :

- 1) les principes se formulent lorsqu'il y a des objections ;
- 2) dans les mathématiques modernes, nier un axiome signifie créer une nouvelle géométrie.

Les postulats seraient donc la réponse d'Euclide à ces objections.

Il s'agit d'objections inattendues.

L'exigence du premier postulat, mener une droite de n'importe quel point à n'importe quel point, pourrait échouer...

Il m'est certainement impossible de tracer une ligne sur la surface de la mer.

Il m'est certainement impossible de tracer une ligne sur la surface de la mer.

Il est impossible de tracer une ligne à travers un fleuve, ou au milieu d'une ville.

Il m'est certainement impossible de tracer une ligne sur la surface de la mer.

Il est impossible de tracer une ligne à travers un fleuve, ou au milieu d'une ville.

Il serait hâtif de postuler qu'on puisse tracer une ligne droite entre le Bélier et la Balance.

Il m'est certainement impossible de tracer une ligne sur la surface de la mer.

Il est impossible de tracer une ligne à travers un fleuve, ou au milieu d'une ville.

Il serait hâtif de postuler qu'on puisse tracer une ligne droite entre le Bélier et la Balance.

Sur le second postulat :

Il est impossible de prolonger une ligne indéfiniment, à l'infini, parce que l'infini n'existe pas.

Enfin, à propos du cinquième postulat : « que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontreront de ce côté-là, où sont les angles inférieurs à deux droits »,

Simplicius rapporte cette objection :

Les mots « prolongées indéfiniment », dit Euclide, renvoient à l'imagination, afin de ne pas être contraint d'indiquer une grandeur déterminée des lignes, ni de vouloir qu'elles soient étendues au-delà de la sphère des étoiles fixes. Mais il dit cela pour éviter que, lorsqu'on trace des droites, on ne fixe certains segments qui ne se rencontrent pas dans l'espace assigné aux deux lignes, mais qui se rencontreraient s'ils dépassaient cette limite. Voilà ce qu'on disait communément à propos de cette objection ; il s'agit seulement d'un abrégé et d'une synthèse de ce que d'autres avaient dit plus amplement sur le sujet.

Il s'agit d'objections extra-mathématiques, qui ne portent pas sur le contenu d'axiomes au sens où nous l'entendons.

Il s'agit plutôt de discussions sceptiques et dialectiques portant sur le rapport entre l'idéalisation mathématique et la physique. Ce sont les seules objections aux postulats d'Euclide que l'on lise dans les textes antiques.

Ces objections de Simplicius trouvent des échos dans plusieurs autres textes antiques de mathématiques qui ne sont pas explicitement liés aux postulats, mais qui touchent le même thème : la possibilité de tracer des lignes là où il est physiquement impossible de les tracer.

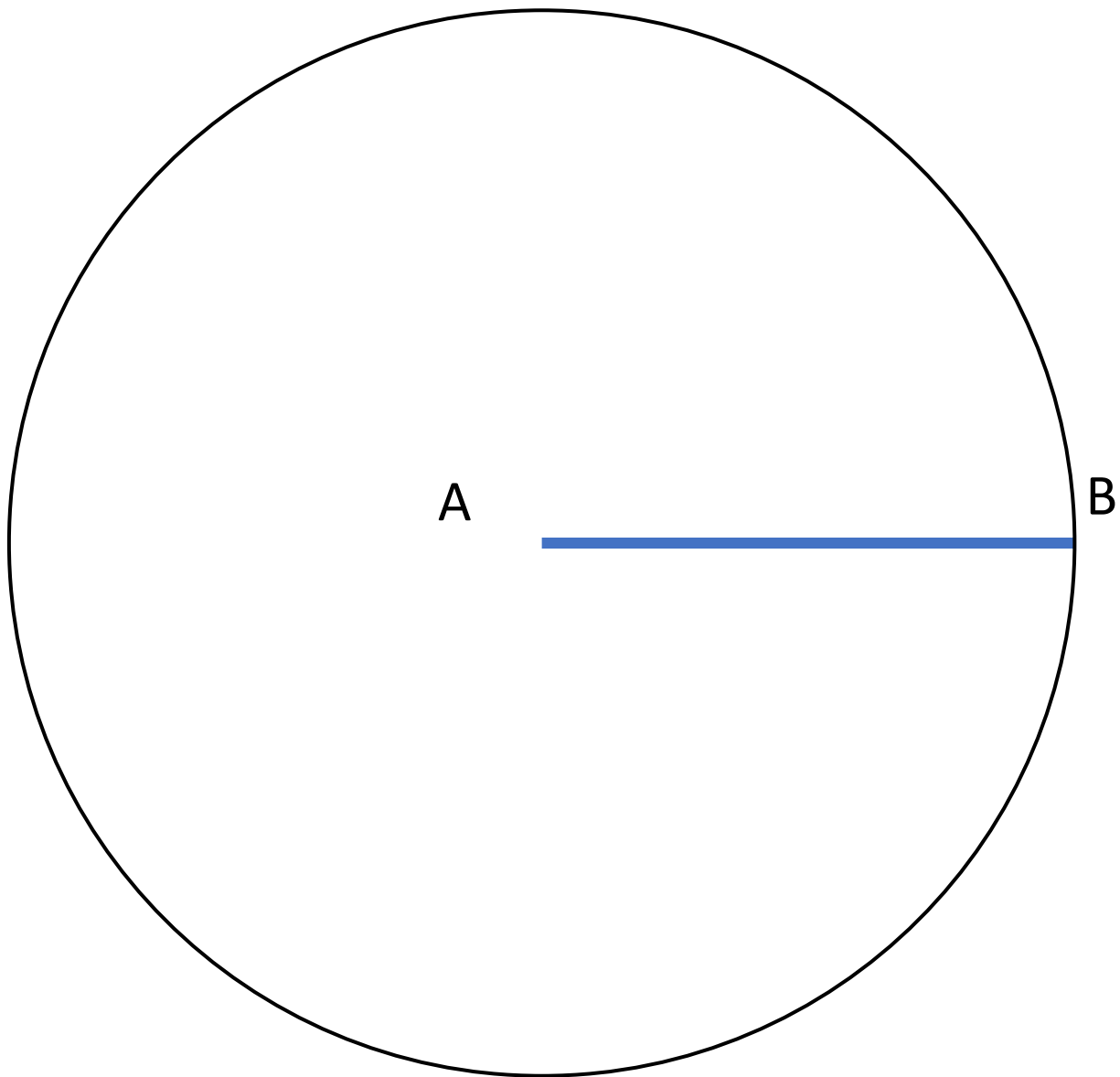
Chez Alexandre d'Aphrodise, on trouve une objection semblable à propos de la construction d'*Éléments* I,1 :

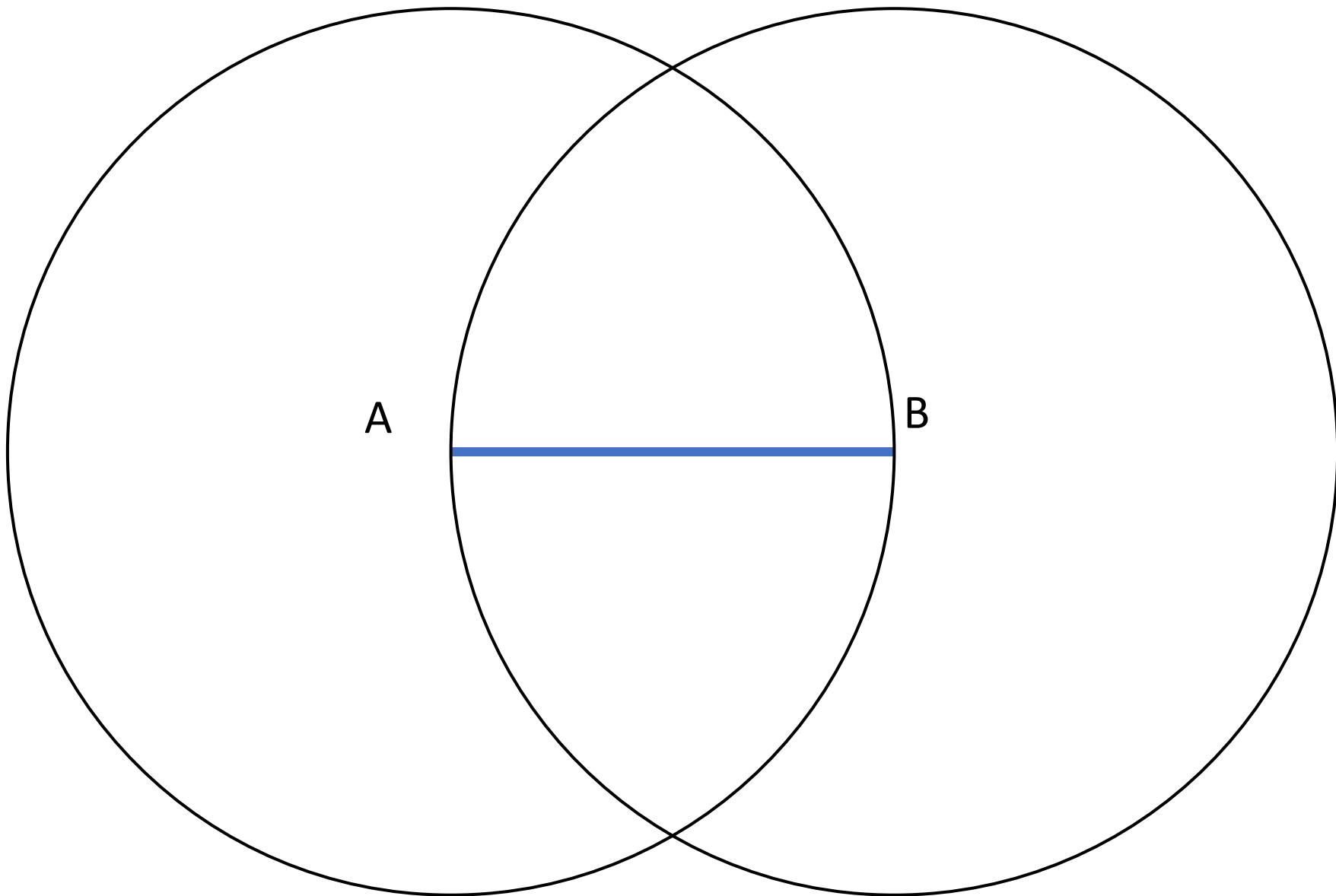
Alexandre se demandait comment il se faisait que le premier théorème des *Éléments* d'Euclide ne soit pas réfuté, s'il n'était pas possible de prolonger une ligne droite ou de tracer un cercle même au-delà de l'univers. En effet, si la droite limitée donnée sur laquelle il faut construire le triangle équilatéral peut être le diamètre du cosmos, il est impossible d'y construire un triangle équilatéral s'il n'y a rien hors du cosmos. Le diamètre de l'univers passe en effet par le centre des cercles dont l'intersection permet aux lignes jointes aux extrémités de la ligne donnée de former avec elle le triangle équilatéral.

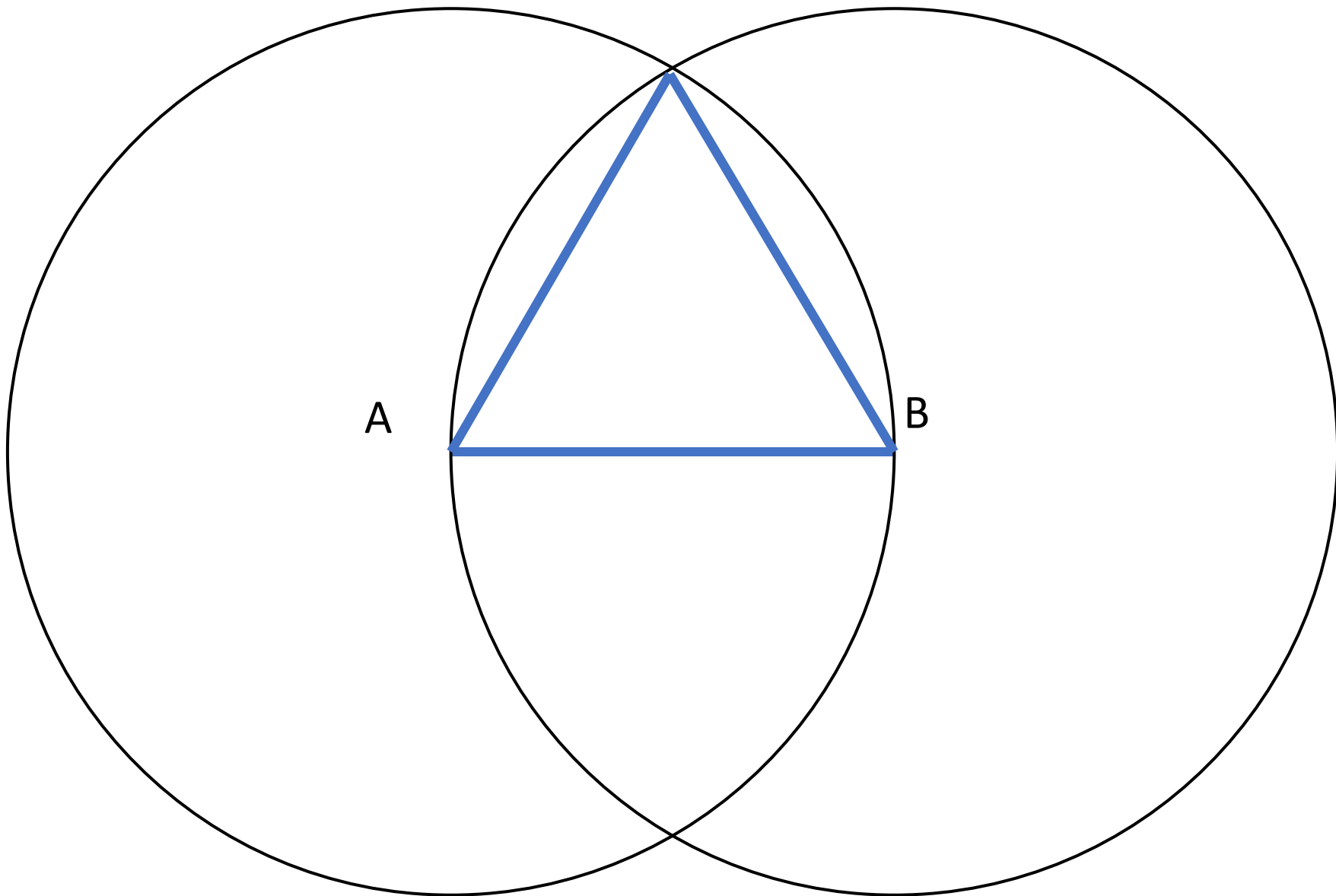
A

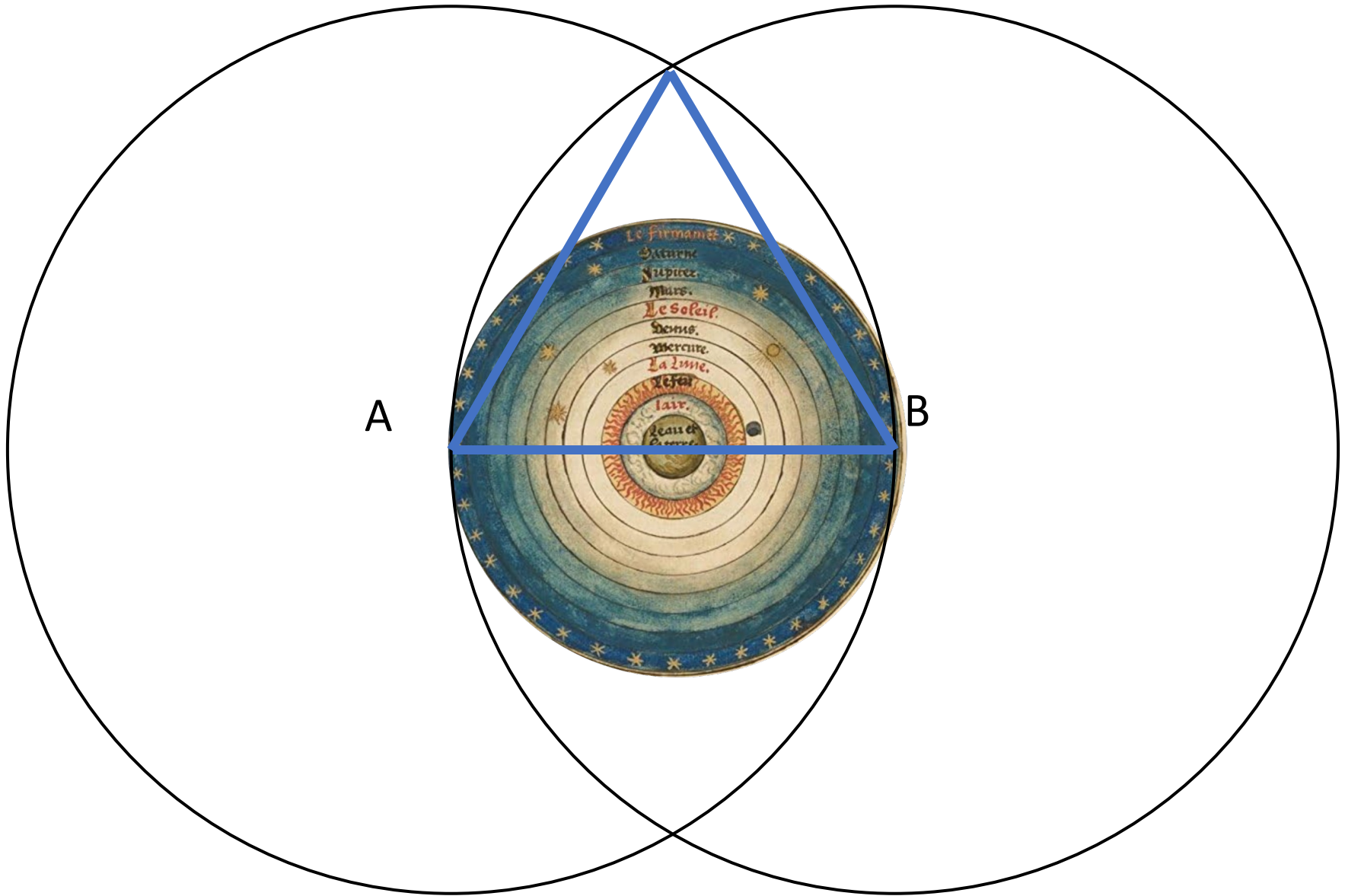


B





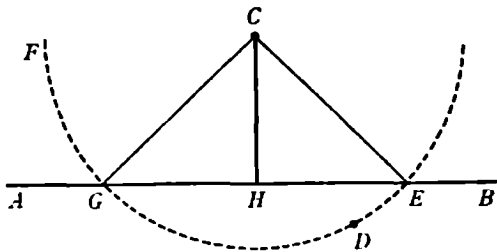




Dans le commentaire de Proclus aux *Éléments* d'Euclide, on trouve de nombreuses constructions alternatives introduites « faute d'espace ».

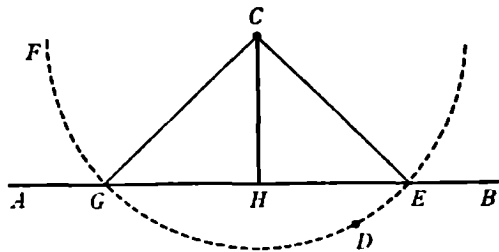
Dans le commentaire de Proclus aux *Éléments* d'Euclide, on trouve de nombreuses constructions alternatives introduites « faute d'espace ».

Par exemple, dans *Éléments* I,12, Euclide enseigne comment construire la perpendiculaire à une droite donnée et propose cette construction :



Dans le commentaire de Proclus aux Éléments d'Euclide, on trouve de nombreuses constructions alternatives introduites « faute d'espace ».

Par exemple, dans Éléments I,12, Euclide enseigne comment construire la perpendiculaire à une droite donnée et propose cette construction :

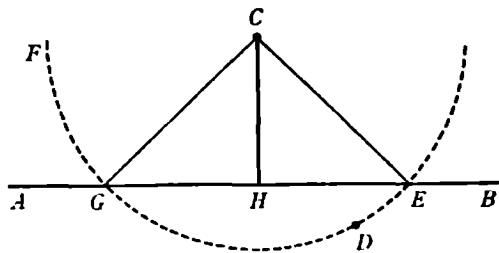


Quelqu'un pourrait dire qu'il n'y a pas d'espace (τόπος) de l'autre côté de la ligne, mais seulement du côté où se trouve C.

En prenant donc le point D sur la droite, et avec C pour centre et CD pour distance, nous pouvons décrire une circonférence DEF...

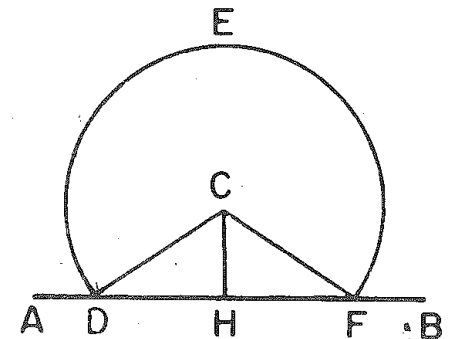
Dans le commentaire de Proclus aux *Éléments* d'Euclide, on trouve de nombreuses constructions alternatives introduites « faute d'espace ».

Par exemple, dans *Éléments* I,12, Euclide enseigne comment construire la perpendiculaire à une droite donnée et propose cette construction :

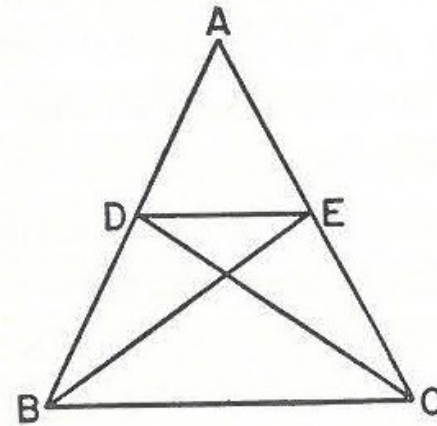
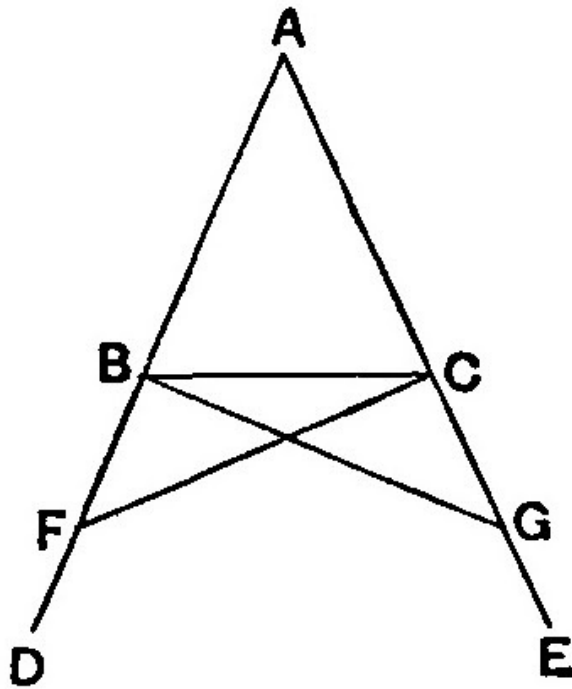


Quelqu'un pourrait dire qu'il n'y a pas d'espace (τόπος) de l'autre côté de la ligne, mais seulement du côté où se trouve C.

En prenant donc le point D sur la droite, et avec C pour centre et CD pour distance, nous pouvons décrire une circonférence DEF...



Ou encore, dans *Éléments* I,5, qui affirme que les angles à la base des triangles isocèles sont égaux, Euclide effectue une construction qui prolonge les côtés du triangle, et Proclus en propose une autre qui ne prolonge les lignes qu'à l'intérieur du triangle.



Et ainsi dans bien d'autres cas :

Dans *Éléments* I,20 :

Cela suffit comme réponse aux Épicuriens. Nous devons donner une brève description des autres démonstrations de cette proposition que les disciples de Héron et de Porphyre ont construites sans produire la droite, comme le fait l'auteur des *Éléments*.

Un cas de construction de *Éléments* I,2 est explicitement présenté « avec son angle vertical non pas au-dessus — puisqu'il n'y a pas d'espace (τόπος) — mais au-dessous ».

Proclus propose une construction alternative de *Éléments* I,5, « si quelqu'un demandait de démontrer l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle sans prolonger les côtés égaux ».

Dans *Éléments* I,9, Proclus propose une construction alternative de son propre cas alternatif, au cas où « quelqu'un dirait qu'il n'y a pas d'espace sous la base ».

Dans *Éléments* I,11, il ajoute une construction « si quelqu'un exigeait que nous prenions le point à l'extrémité de la ligne sans prolonger la ligne au-delà ».

Et dans *Éléments* I,32, il offre une démonstration du célèbre théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle qui évite de prolonger les lignes en dehors du triangle :

L'auteur des *Éléments* démontre chaque partie de la conclusion en traçant une parallèle à l'extérieur du triangle ; mais on peut aussi démontrer la même chose en traçant une parallèle à l'intérieur.

Il est possible que certaines de ces démonstrations soient nées dans le cadre de la géométrie pratique.

Mais certaines démonstrations de théorèmes, et non de problèmes, ne peuvent pas avoir une origine pratique et renvoient à des controverses dialectiques semblables à celles évoquées par Simplicius et Alexandre d'Aphrodise.

Il est possible que certaines de ces démonstrations soient nées dans le cadre de la géométrie pratique.

Mais certaines démonstrations de théorèmes, et non de problèmes, ne peuvent pas avoir une origine pratique et renvoient à des controverses dialectiques semblables à celles évoquées par Simplicius et Alexandre d'Aphrodise.

Simplicius soutient enfin qu'Euclide avait introduit les postulats pour répondre à de telles objections.

On a pensé qu'en géométrie on recourait aux postulats seulement pour garantir la matière. ... L'utilité des trois premiers postulats réside dans le fait que le manque de matière, ou son absence, n'entrave pas les démonstrations.

Telle est donc la thèse de l'origine dialectique des postulats d'Euclide.

Bien avant Simplicius, Alexandre ou Héron, et déjà au temps d'Euclide, quelqu'un avançait des objections à la possibilité des constructions géométriques.

Euclide introduisit ses postulats pour répondre à ces objections : pour exiger qu'un minimum d'idéalité soit accordé aux constructions géométriques.

Il semble en effet que Platon et Aristote fussent déjà surtout soucieux de fonder la géométrie sur des objets idéaux et des procédures d'abstraction idéalisantes.

La géométrie naît comme arpentage et comme astronomie.

Platon :

« Il y a une chose que nous pouvons dire, et que personne ayant la moindre connaissance de la géométrie ne contestera. C'est une branche du savoir dont le caractère est exactement opposé à la terminologie employée par ceux qui la pratiquent. »
« En quel sens ? », demanda-t-il. « Eh bien, ils peinent à trouver les mots pour décrire ce qu'ils font, avec des résultats parfois ridicules. Tout ce langage de quadrature, de prolongement [des lignes] et d'addition [de lignes]. Ils sont pleins d'expressions de ce genre. Tout ce qu'ils disent concerne le faire et les applications pratiques, alors qu'en vérité, à mon avis, c'est une discipline étudiée exclusivement pour l'amour de la connaissance. »

Platon :

« Et tu sauras aussi que [les géomètres] recourent à l'aide de formes visibles et rapportent à celles-ci leur raisonnement, bien qu'ils ne pensent pas à elles, mais aux choses dont elles sont les images. Ainsi, leur raisonnement vise le carré en lui-même et la diagonale en elle-même, non la diagonale qu'ils ont dessinée. Il en va de même pour les autres cas. Les modèles qu'ils construisent, ou les figures qu'ils dessinent, qui ont leurs ombres et leurs images dans l'eau, ils les traitent à leur tour comme des images, dans l'effort de voir les choses correspondantes qui ne peuvent être vues que par la pensée. »

Aristote :

Cela est évident pour les objets mathématiques, qui ne se trouvent en aucun lieu...

Les objets mathématiques ne se trouvent nulle part.

Les géomètres ne supposent pas des faussetés, comme certains l'ont soutenu. On dit qu'il ne faudrait pas user de faussetés, mais que les géomètres parlent faussement lorsqu'ils disent qu'une ligne qui n'a pas un pied de longueur a un pied, ou qu'une ligne tracée qui n'est pas droite est droite. Mais les géomètres ne tirent aucune conclusion du fait que les lignes qu'ils ont eux-mêmes tracées soient telles ou telles ; ils se fondent plutôt sur ce que ces lignes montrent.

Aristote :

Ce raisonnement ne prive pas les mathématiciens de leur étude, même lorsqu'il réfute l'existence, dans l'opération effective, d'un infini inassignable en extension. Même ainsi, ils n'ont pas besoin de l'infini, puisqu'ils n'en font aucun usage ; ils ont seulement besoin qu'existe une ligne finie de la grandeur qu'ils veulent. Or une autre grandeur, de n'importe quelle dimension, peut être divisée selon la même proportion que la grandeur plus grande ; ainsi, du moins pour les besoins de la démonstration, il n'y aura pour eux aucune différence selon qu'une grandeur fait ou non partie des grandeurs existantes.

Euclide était probablement un contemporain d'Épicure, ou il vécut une génération après lui. Nous savons qu'Épicure et les Épicuriens attaquaient les mathématiques du point de vue matérialiste et atomiste.

D'autres écoles philosophiques de la génération suivante pouvaient elles aussi avoir des doutes et soulever des objections. Zénon de Citium était matérialiste, et l'on ne sait pas clairement comment il considérait les objets mathématiques.

À la même époque, Arcésilas orientait aussi l'Académie vers des positions sceptiques.

Interprétation d'Arpad Szabò sur l'Éléatisme et la dialectique.

Il est très probable qu'Euclide ait ressenti la nécessité de répondre à ce type d'objections.

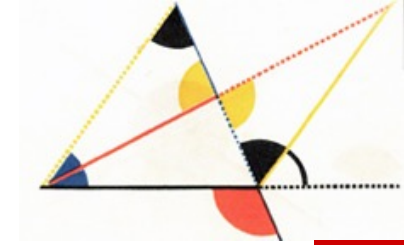
Il n'est pas nécessaire de penser que, pour cette raison, Euclide eût des inclinations philosophiques, ni qu'il fût platonicien ou aristotélicien.

Les postulats exigent le minimum d'idéalité nécessaire pour commencer les constructions à la règle et au compas de la géométrie, et peu importe la manière dont on veut les justifier, par idéalisme, par abstraction, ou autrement.

Si les postulats ont cette origine dialectique, ils sont le produit singulier d'une conjoncture culturelle athénienne entre le IV^e et le III^e siècle av. J.-C.

Cela expliquerait pourquoi ils ne furent plus jamais utilisés par d'autres mathématiciens grecs, qui vivaient dans d'autres milieux culturels et affrontaient d'autres problèmes.

En outre, la naissance de l'axiomatique relève moins du « miracle » grec, et s'explique historiquement comme un processus complexe, qui transforma ensuite au fil des siècles les exigences philosophiques d'Euclide en axiomes au sens moderne.



L'interprétation inférentialiste des postulats

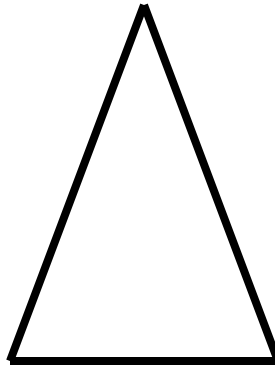
Pour comprendre le rôle des postulats dans les *Éléments* d'Euclide, et donc leur signification, on peut regarder la pratique d'Euclide.

Euclide utilise les postulats pour accomplir une « construction auxiliaire », ou « préparation » (κατασκευή) qui permet d'étendre la figure donnée par des lignes supplémentaires.

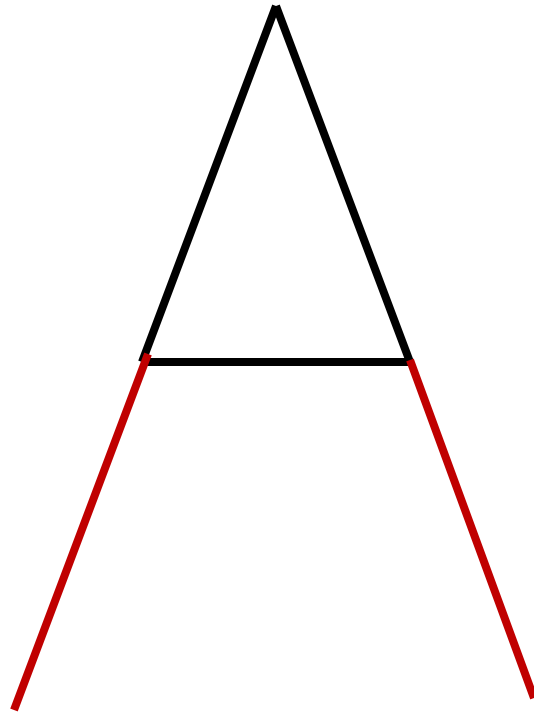
Ces lignes supplémentaires servent ensuite au raisonnement diagrammatique d'Euclide, qui démontre le théorème.

Sans les constructions, Euclide ne pourrait pas démontrer le théorème.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.

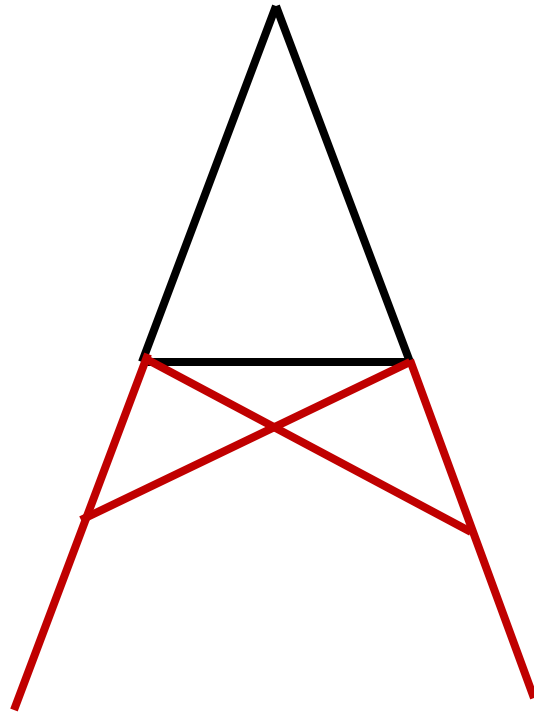


Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



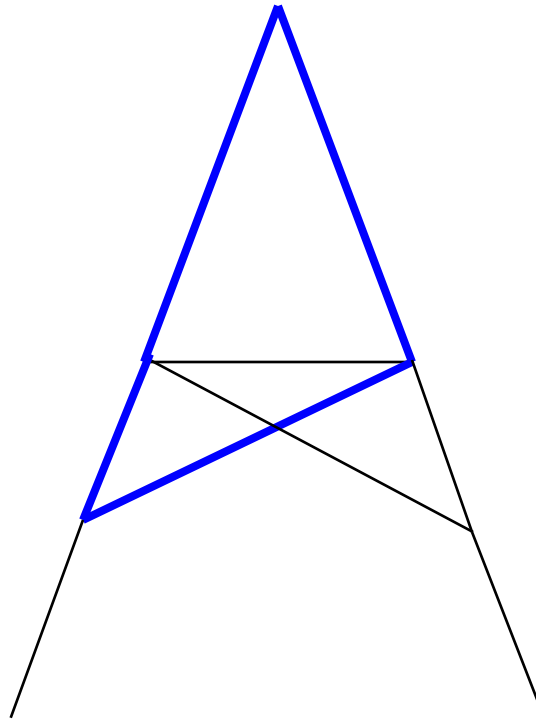
Postulat 2

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



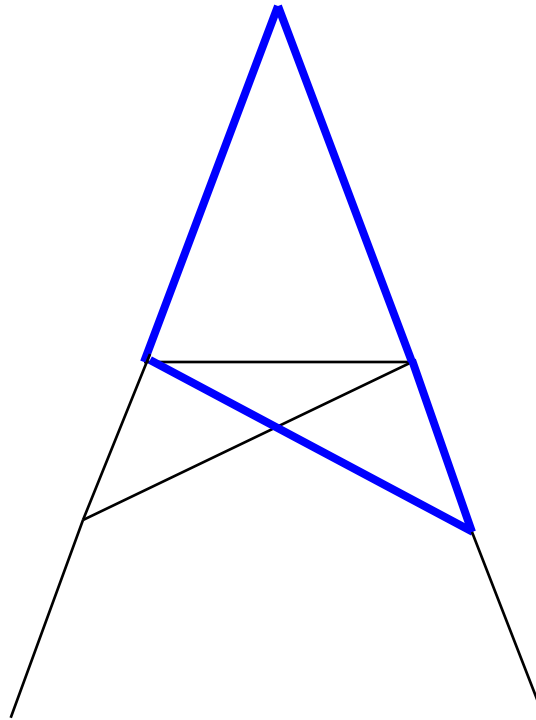
Postulat 1

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



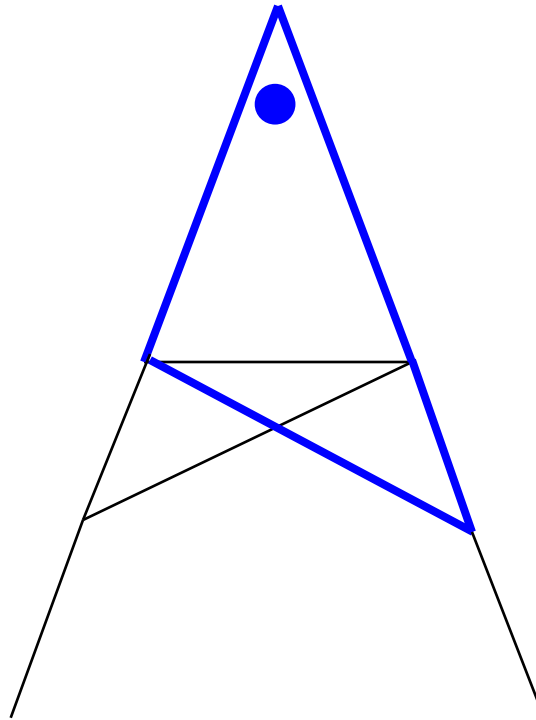
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



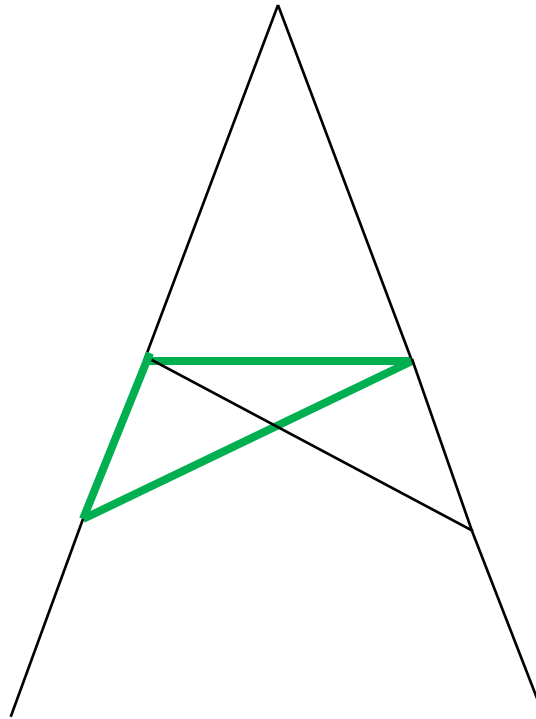
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



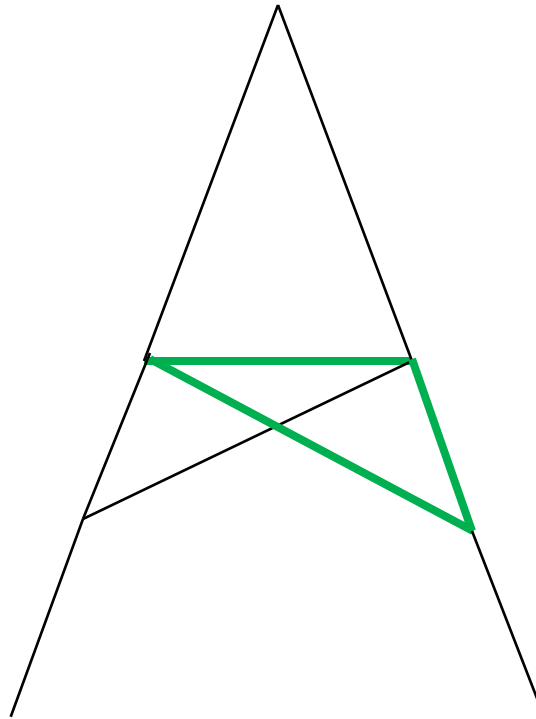
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



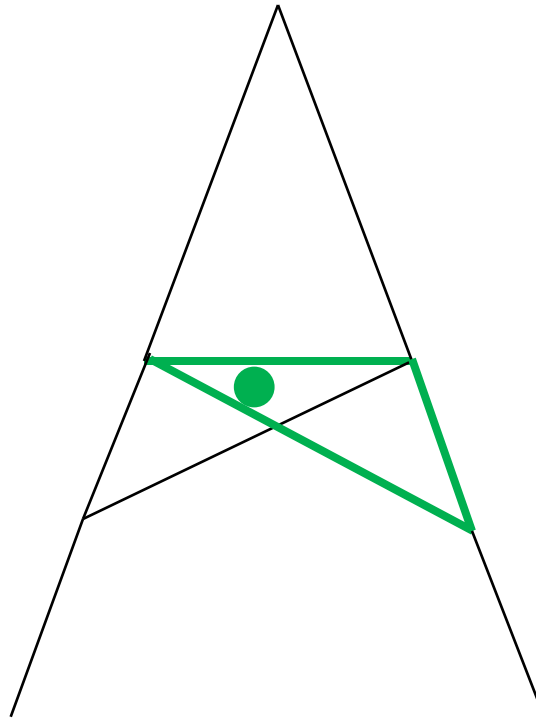
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



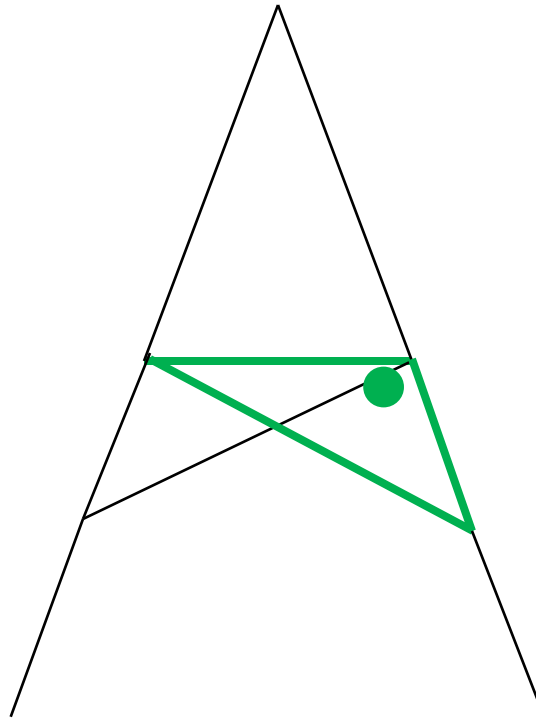
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



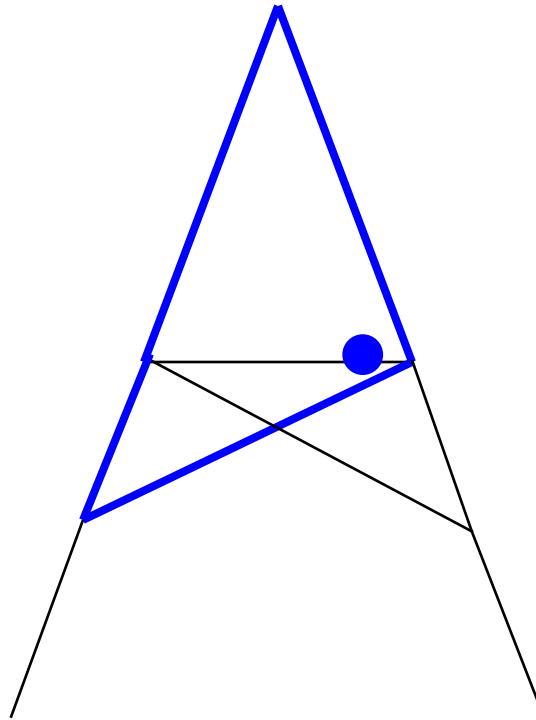
Éléments I,4 : Les triangles qui ont deux côtés et l'angle compris entre eux égaux sont égaux.

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



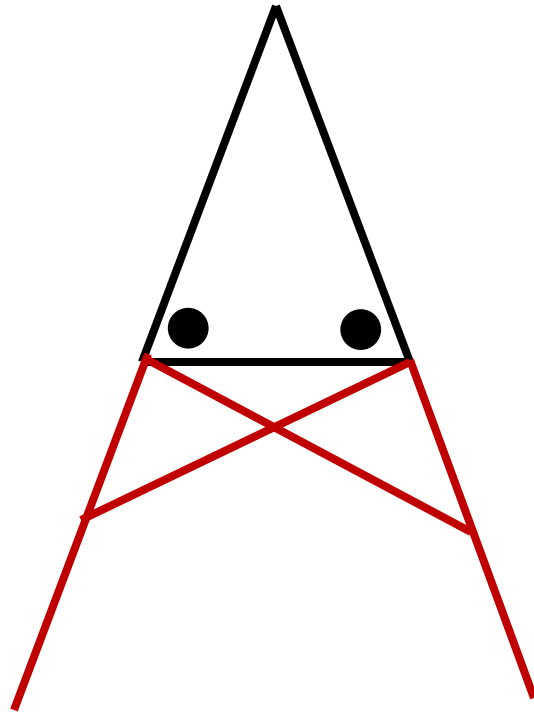
Notion commune 3

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.

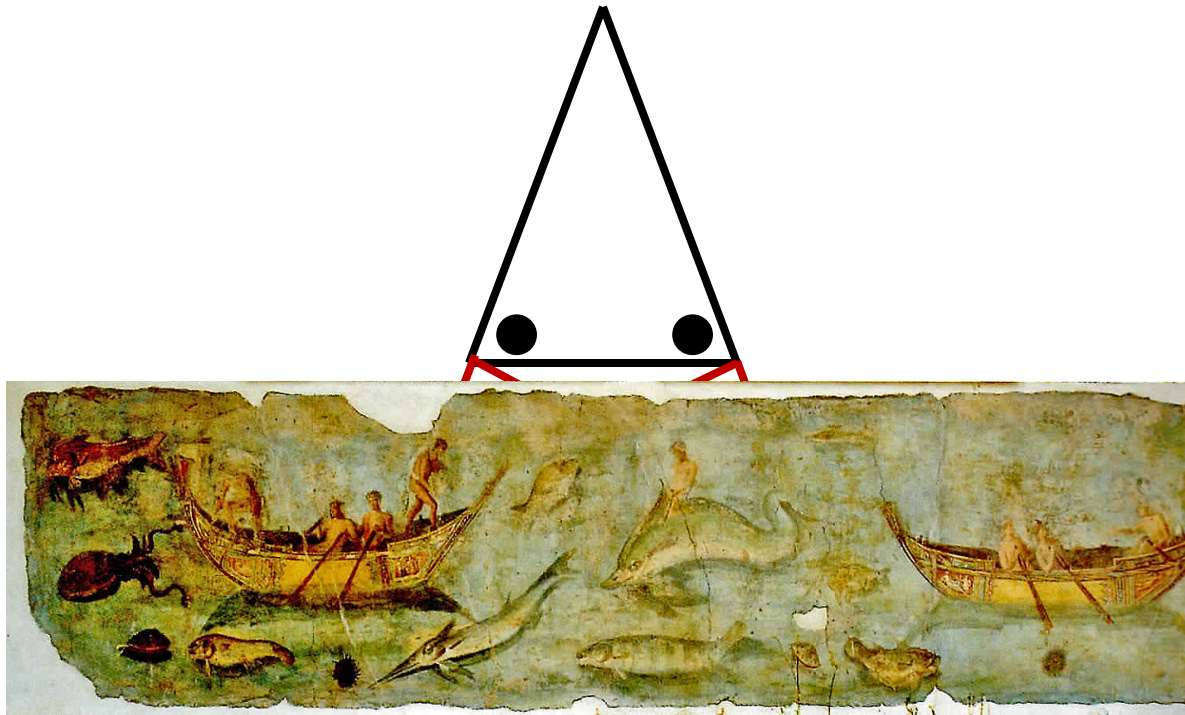


Notion commune 3

Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



Éléments I,5 : Dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux.



La présence d'un fleuve, c'est-à-dire l'impossibilité d'utiliser les constructions requises par les postulats, ne change pas le contenu du théorème.

Il reste vrai que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Simplement, Euclide ne peut pas le démontrer par cette construction.

Il existe d'autres constructions, comme celle de Héron, qui construit les lignes à l'intérieur.

Mais même si elles échouaient toutes, l'énoncé du théorème resterait vrai.

Interprétation inférentialiste des postulats

Les postulats ne sont pas des énoncés sémantiques comme les axiomes modernes.

Ils ne disent rien sur la nature des lignes, des cercles ou des parallèles. Ils n'énoncent aucun état de choses. Les postulats n'expriment pas des premières vérités géométriques.

Au contraire, ils fournissent des instruments pour la démonstration. Ils relèvent de la théorie de la démonstration de la géométrie grecque. Ils sont performatifs.

Cela est clair dans les (rares) sources dont nous disposons.

Thémistius, à propos de l'objection à *Éléments* I,1, où l'on trace des lignes hors de l'univers :

Si donc nous utilisions un lieu (τόπος) ou une région (χώρα) d'une ligne pour la construction du triangle isocèle, alors en supprimant ce lieu nous supprimerions aussi la démonstration. Mais il n'en est pas ainsi, et de fait nous ne disons nulle part que, parce que cette ligne donnée se trouve ici ou là, il est nécessaire qu'il en résulte ceci ou cela.

Proclus sur *Éléments* I,17 :

Telle est donc la cause (la genèse des triangles, γένεσις τῶν τριγώνων), et non le fait que l'angle extérieur soit plus grand que chacun des deux angles intérieurs opposés. En effet, il n'est pas nécessaire qu'un côté soit prolongé, ni qu'un angle extérieur soit construit ; mais il est nécessaire que deux angles intérieurs quelconques soient inférieurs à deux angles droits.

Il n'existe d'ailleurs aucune source antique disant le contraire, à savoir que la négation d'un postulat entraîne la fausseté d'un théorème.

Cela signifie que, dans la géométrie d'Euclide, il ne pouvait y avoir de discussion de théories alternatives. La négation des postulats ne produit pas des théories différentes, ni un ensemble différent de vérités. Elle ne fait que limiter les instruments inférentiels permettant de démontrer les vérités de l'unique géométrie donnée.

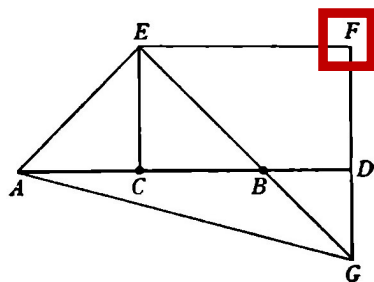
Anatomie des figures : les postulats comme bistouri.
Peut-être déjà connus d'Aristote.

La géométrie grecque est une géométrie sans axiomes au sens moderne. Elle ne repose sur aucun présupposé.

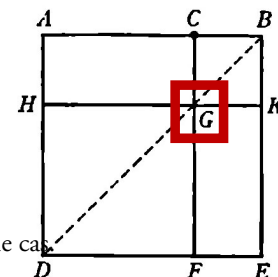
Cela vaut aussi pour le célèbre postulat des parallèles, qui est inférentiel exactement comme les autres. Il est en effet formulé de manière à être constructif.

Post. 5 : si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté inférieurs à deux droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontreront de ce côté-là, où sont les angles intérieurs à deux droits.

Euclide ne le cite que lorsque les droites se rencontrent « très loin »



Dans Éléments II,10, le cinquième postulat est mentionné explicitement.



Dans Éléments II,4, ce n'est pas le cas.

Thème général de l'absence du concept d'espace géométrique dans la géométrie d'Euclide.

Géométrie des figures vs géométrie de l'espace.

En l'absence d'une structure spatiale, les principes ne décrivent pas un objet, mais remplissent d'autres rôles épistémiques.

Euclide avait donc une conception de l'axiomatique entièrement différente de celle des Modernes.

Ce n'était pas un « clever schoolboy », mais un « fellow of another college » (Littlewood).

En conclusion, les conjectures sur l'origine dialectique et la signification inférentielle des postulats permettent de répondre à un grand nombre des questions initiales.

1) Pourquoi des postulats ? Controverses dialectiques. Absents dans d'autres cultures mathématiques. Absents dans d'autres contextes des mathématiques grecques (Archimède, Apollonius).

2) Pourquoi seulement certains postulats ? Parce qu'ils ne servent pas à fonder les étapes déductives. Euclide n'en a pas oublié quelques-uns : à proprement parler, il n'avait pas d'axiomes.

3) Pourquoi n'a-t-on pas étudié de géométries non euclidiennes (c'est-à-dire d'autres systèmes d'axiomes) dans l'Antiquité ? Parce que les postulats ne sont pas sémantiques.

En conclusion, les conjectures sur l'origine dialectique et la signification inférentielle des postulats permettent de répondre à un grand nombre des questions initiales.

1) Pourquoi des postulats ? Controverses dialectiques. Absents dans d'autres cultures mathématiques. Absents dans d'autres contextes des mathématiques grecques (Archimède, Apollonius).

2) Pourquoi seulement certains postulats ? Parce qu'ils ne servent pas à fonder les étapes déductives. Euclide n'en a pas oublié quelques-uns : à proprement parler, il n'avait pas d'axiomes.

3) Pourquoi n'a-t-on pas étudié de géométries non euclidiennes (c'est-à-dire d'autres systèmes d'axiomes) dans l'Antiquité ? Parce que les postulats ne sont pas sémantiques.

Nécessité d'une histoire de l'axiomatique.

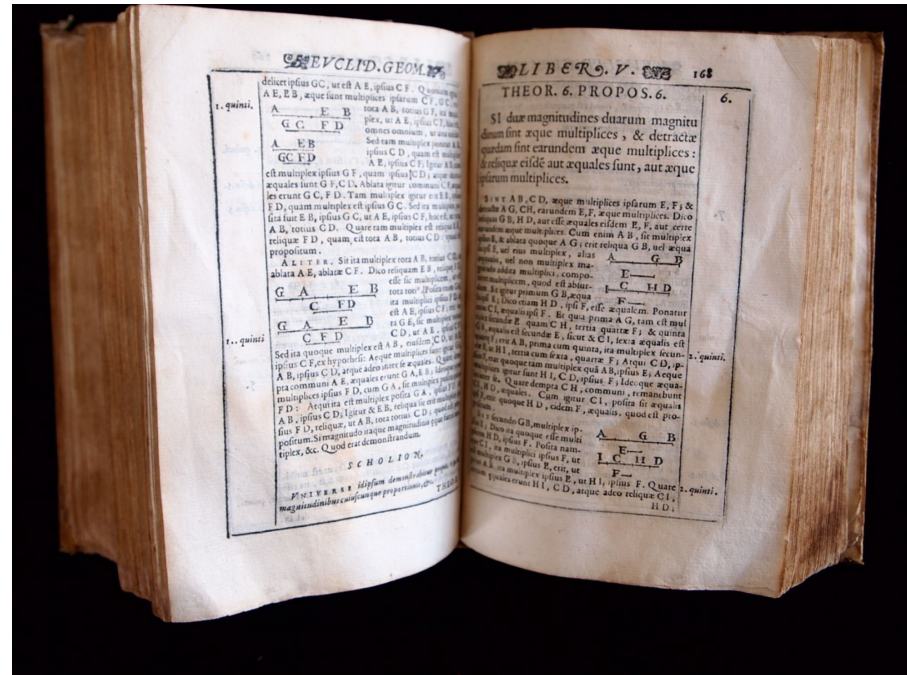
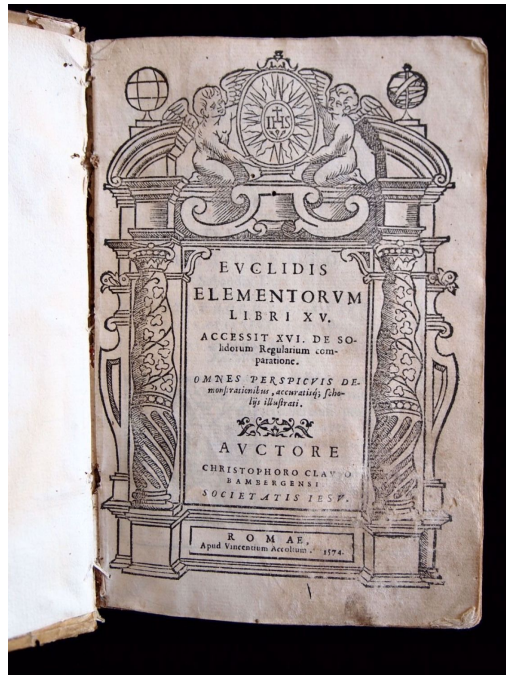
Une question précise mais essentielle pour l'histoire des sciences :
Pourquoi la géométrie non euclidienne n'a-t-elle pas été découverte avant le XIXe siècle ?

La découverte de la géométrie non euclidienne par Lobatchevski, Bolyai et Gauss dans les années 1820 est généralement considérée comme l'une des révolutions les plus importantes de l'histoire des mathématiques et comme l'aube d'une nouvelle époque de l'épistémologie mathématique.

C'était la première fois que les mathématiques exploraient des systèmes axiomatiques alternatifs, et la première fois que la géométrie explorait une structure spatiale différente. C'était aussi la première fois que la géométrie traitait d'un contenu « non intuitif ».

Au cours des décennies suivantes, plusieurs autres disciplines mathématiques suivirent cette voie vers l'abstraction, des axiomatisations différentes et une pluralité de structures. En un sens, les mathématiques modernes étaient nées.

L'édition moderne la plus importante des *Éléments* d'Euclide est celle du mathématicien jésuite Christoph Clavius, en 1574.



Elle fut lue et discutée par tous les savants de la Révolution scientifique, et fut tenue pour un paradigme de la méthode scientifique.

Tout comme l'édition des *Éléments* par Clavius, de nombreux traités de la science moderne s'ouvrent par une liste de définitions, suivie d'une liste d'axiomes : et chacun de ces axiomes est accompagné d'une preuve.

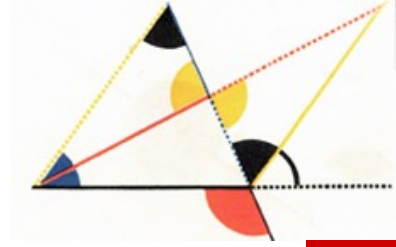
C'est une théorie scolastique conçue au Moyen Âge, adoptée par de grandes autorités comme Thomas d'Aquin et Duns Scot, et encore largement en usage entre le XVI^e et le XVIII^e siècle.

Selon cette théorie, les axiomes sont démontrables (ou dérivables) à partir des définitions des termes employés.

Le postulat euclidien selon lequel tous les angles droits sont égaux, par exemple, devrait être dérivé de la définition de l'angle droit.

La notion commune selon laquelle le tout est plus grand que la partie devrait être démontrable une fois données des définitions exactes du tout et de la partie.

Et il en va de même pour les autres axiomes, y compris celui des parallèles.



Le problème :
Aristote sur la science et les axiomes

Aristote :

Avoir la connaissance scientifique (ἐπιστήμη) d'une proposition, c'est pouvoir donner les raisons de sa vérité.

Il soutenait qu'on ne peut pas demander les raisons de tout. À un certain point, « il faut s'arrêter » (ἀνάγκη δὲ στῆναι).

Selon Aristote, les axiomes (ἀξιώματα) étaient des lois logiques.

Les axiomes structurent notre manière de demander et de donner des raisons, plutôt qu'ils n'offrent des raisons pour des énoncés particuliers. À ce titre, ils relèvent de l'habitus de la pensée scientifique en général, et n'ont pas à être justifiés comme s'ils étaient des énoncés substantiels sur, par exemple, les animaux ou les nombres.

Cependant, une longue tradition post-aristotélicienne avait compris les axiomes comme des énoncés substantiels exprimant des faits à propos d'un domaine d'objets.

Fusion de la tradition des commentaires des *Seconds Analytiques* avec celle des commentaires des *Éléments* d'Euclide.

Prolifération des axiomatisations de disciplines particulières.

Cependant, une longue tradition post-aristotélicienne avait compris les axiomes comme des énoncés substantiels exprimant des faits à propos d'un domaine d'objets.

Fusion de la tradition des commentaires des *Seconds Analytiques* avec celle des commentaires des *Éléments* d'Euclide.

Prolifération des axiomatisations de disciplines particulières.

La redécouverte des *Seconds Analytiques* au XIII^e siècle confronta ainsi les interprètes à la difficulté d'un idéal scientifique clair — donner les raisons de tout énoncé — conjointement avec un système de principes qui fondent la science tout en demeurant eux-mêmes sans raisons. L'arbre lumineux de la science fleurit à partir de racines obscures.



Robert Grosseteste (1175-1253)

La question est abordée pour la première fois dans le plus ancien commentaire Latin des *Seconds Analytiques*, rédigé par Grosseteste dans les années 1220-1230.

Pour résoudre la difficulté, Grosseteste abandonne Aristote et ajoute à la théorie aristotélicienne de la science une théorie Augustinienne de l'illumination.

Les axiomes sont connus par illumination divine.

La question est abordée pour la première fois dans le plus ancien commentaire Latin des *Seconds Analytiques*, rédigé par Grosseteste dans les années 1220-1230.

Pour résoudre la difficulté, Grosseteste abandonne Aristote et ajoute à la théorie aristotélicienne de la science une théorie Augustinienne de l'illumination.

Les axiomes sont connus par illumination divine.

Un axiome n'exige rien d'autre que la raison qui réside dans l'âme — comme la vue réside dans l'œil. Et de même qu'une chose visible et colorée n'exige rien, pour être vue, sinon que la vue extérieure tombe sur elle, ainsi un axiome, pour être connu, n'exige rien d'autre que cette raison — qui est le regard de l'esprit — tombe sur lui, sans aucunement l'expliquer.

(Grosseteste, In an. post. I, 8 ; p. 157-158 Rossi)

Le point essentiel est que, pour Grosseteste, les axiomes ne sont pas sans raisons ; ils ont leurs propres raisons en eux-mêmes. Un axiome est *causa sui*.

C'est une position tout à fait différente de celle d'Aristote (et qu'on ne trouve pas non plus chez Augustin).

Le point essentiel est que, pour Grosseteste, les axiomes ne sont pas sans raisons ; ils ont leurs propres raisons en eux-mêmes. Un axiome est *causa sui*.

C'est une position tout à fait différente de celle d'Aristote (et qu'on ne trouve pas non plus chez Augustin).

Grosseteste a brièvement explicité une propriété logique des axiomes :

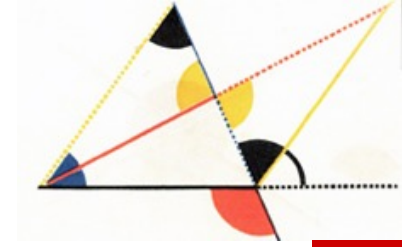
La vérité d'une proposition se connaît en voyant l'identité de la substance du sujet et du prédicat ; et la nécessité d'un syllogisme se connaît en voyant l'identité des deux extrêmes avec le moyen terme. Si, dans une proposition ou un syllogisme, ces identités sont manifestes par elles-mêmes, la proposition est un axiome et le syllogisme est parfait. Je dis donc qu'un axiome n'exige aucune raison extérieure...

Quelques années plus tard, Guillaume d'Auvergne défendit à Paris la même théorie, en modifiant la métaphore de Grosseteste pour éviter les risques de l'averroïsme :

Il est donc manifeste que les principes des sciences et des doctrines, qui sont connus par eux-mêmes, sont des lumières qui s'illuminent elles-mêmes par leur propre lumière ou connaissance ; car ils montrent les conclusions par leur propre connaissance, et la science les réfléchit vers elle-même, ce qui les rend connues. Ainsi, lorsqu'ils sont supprimés ou ignorés, comme une lumière cachée, une nuit spirituelle survient dans la puissance de l'intellect, et cette nuit empêche que les conclusions soient vues ou connues. De même, lorsque la lumière solaire est retirée, la nuit survient dans la région d'où la lumière a été enlevée, et les choses qui auparavant étaient vues dans l'illumination du soleil cessent de pouvoir être vues.

Quelques années plus tard, Guillaume d'Auvergne défendit à Paris la même théorie, en modifiant la métaphore de Grosseteste pour éviter les risques de l'averroïsme :

De plus, les principes scientifiques qui sont connus par eux-mêmes (nota per semetipsa) et qu'on appelle principes premiers, axiomes et conceptions communes des âmes, n'entrent pas dans l'intellect matériel par autre chose, mais par eux-mêmes seulement. Autrement, ils ne seraient pas connus par eux-mêmes, mais par autre chose. ... Il est donc clair, d'après ces considérations, que des principes de ce genre n'ont pas besoin de l'aide de l'intellect agent pour entrer dans notre intellect, ni pour y resplendir ou y être connus, de même que les choses qui brillent d'elles-mêmes et qui sont en elles-mêmes des lumières n'ont besoin d'aucun autre secours pour resplendir à notre vue, s'y manifester ou y devenir connues.



Logique et erreurs de traduction

Robert Kilwardby (1215-1279)

À Paris, une nouvelle génération de savants se consacra à l'interprétation d'Aristote et chercha à attribuer cette théorie à Aristote lui-même, sans avoir à infléchir le texte par Augustin.

Cette possibilité s'offrit alors à Robert Kilwardby, grâce à un contresens décisif dans la traduction des *Seconds Analytiques*.

Aristote, *An. Post.* A3, 72b23-25 :

καὶ οὐ μόνον ἐπιστήμην ἀλλὰ καὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης εἶναι
τινά φαμεν, ἣ τοὺς ὅρους γνωρίζομεν.

Nous affirmons aussi qu'il existe non seulement la
science, mais encore un certain principe de la science
par lequel nous connaissons les termes / définitions.

Aristote, *An. Post.* A3, 72b23-25 :

καὶ οὐ μόνον ἐπιστήμην ἀλλὰ καὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης εἶναί τινά
φαμεν, ἧ τοὺς ὅρους γνωρίζομεν.

Nous affirmons aussi qu'il existe non seulement la science,
mais encore un certain principe de la science **par lequel** nous
connaissons les termes / définitions.

Dans ce passage, la particule ἧ est un pronom relatif au datif,
qui renvoie à « principe » dans la première partie de la phrase.
La même particule ἧ, cependant, est souvent employée par
Aristote comme une préposition, rendue en anglais par *qua*,
dans des expressions comme « l'homme en tant qu'homme »
ou « le triangle en tant que triangle ».

Aristote, *An. Post.* A3, 72b23-25 :

καὶ οὐ μόνον ἐπιστήμην ἀλλὰ καὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης εἶναί τινά
φαμεν, ἧ τοὺς ὅρους γνωρίζομεν.

Nous affirmons aussi qu'il existe non seulement la science,
mais encore un certain principe de la science **par lequel** nous
connaissons les termes / définitions.

Ce passage a été mal traduit par Jacques de Venise (XIIe s.) :

Et hec igitur sic dicimus, et non solum scientiam, sed et
principium scientie esse quoddam dicimus, **in quantum**
terminos cognoscimus.

Nous affirmons aussi qu'il existe non seulement la science,
mais encore un certain principe de la science **dans la mesure**
où nous connaissons les termes / définitions.

Kilwardby exploita ce contresens pour soutenir qu'Aristote disait que nous connaissons la vérité des principes de la démonstration dans la mesure où nous connaissons la signification de leurs termes.

Kilwardby exploita ce contresens pour soutenir qu'Aristote disait que nous connaissons la vérité des principes de la démonstration dans la mesure où nous connaissons la signification de leurs termes.

... car en effet, le commencement de la science s'obtient par la connaissance des termes employés dans les principes, c'est-à-dire que nous connaissons les principes dans la mesure où nous connaissons les termes (*in quantum terminos cognoscimus*).

(Notule, I, 11)

Kilwardby exploita ce contresens pour soutenir qu'Aristote disait que nous connaissons la vérité des principes de la démonstration dans la mesure où nous connaissons la signification de leurs termes.

... car en effet, le commencement de la science s'obtient par la connaissance des termes employés dans les principes, c'est-à-dire que nous connaissons les principes dans la mesure où nous connaissons les termes (*in quantum terminos cognoscimus*).

(Notule, I, 11)

Kilwardby s'efforça de montrer que cette théorie était bien celle d'Aristote, au prix de quelques nouveaux infléchissements du texte des *Seconds Analytiques*.

Kilwardby accorde la théorie de la dérivabilité des principes à partir du sens des termes avec l'affirmation aristotélicienne selon laquelle les principes sont indémonstrables, en soutenant qu'une telle dérivation n'est pas une véritable démonstration, puisqu'elle ne part pas d'autres propositions.

Il faut noter que, même si nous connaissons les principes par les termes, ils ne sont pas connus par quelque chose qui les précède, car les termes ne sont pas des principes ; et même s'ils étaient connus par quelque chose qui les précède, ils le seraient par des termes, et non par quelque chose du même genre.

Il propose aussi une réinterprétation du critère aristotélicien de l'immédiateté des principes, en soutenant que « immédiat » signifie une identité entre le sujet et le prédicat du jugement.

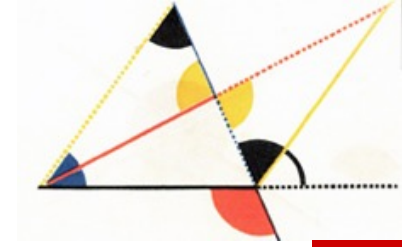
« immédiat », puisqu'il n'y a pas de terme moyen entre le sujet et le prédicat

Il propose aussi une réinterprétation du critère aristotélicien de l'immédiateté des principes, en soutenant que « immédiat » signifie une identité entre le sujet et le prédicat du jugement.

« immédiat », puisqu'il n'y a pas de terme moyen entre le sujet et le prédicat

Enfin, Kilwardby explique qu'Aristote avait parlé d'induction vers les principes parce que l'induction est nécessaire pour apprendre les termes eux-mêmes (et non le contenu propositionnel des principes). L'induction

supprime l'ignorance des termes, qui empêcherait la connaissance des axiomes



Optique et théorie de la perception

Roger Bacon (1214-1292)

Au XI^e siècle, le mathématicien persan Ibn al-Haytham (Alhazen en latin) rédigea au moins deux commentaires des Éléments d'Euclide, dans lesquels il proposait de longues discussions et démonstrations de plusieurs principes de démonstration. Aucun de ces commentaires n'est parvenu en Europe, mais Ibn al-Haytham inséra aussi l'une de ses preuves dans son traité d'optique. Le *De aspectibus* d'Alhazen fut traduit en latin par Gérard de Crémone et devint bientôt l'un des traités scientifiques les plus importants de l'Occident.

Ibn al-Haytham soutenait que la perception sensible repose sur des actes de raisonnement dont nous n'avons pas conscience. Comme preuve de cette thèse, il produisit une démonstration de l'axiome euclidien selon lequel le tout est plus grand que la partie, afin de montrer qu'un tel énoncé apparemment évident est en réalité le résultat d'une série d'inférences.

Ibn al-Haytham proposa une démonstration de l'axiome purement logique, « syllogistique », fondée sur la seule signification des termes.

Par exemple, on suppose que [l'axiome] « le tout est plus grand que la partie » sera naturellement jugé vrai par l'entendement, et que la perception de sa vérité n'implique aucun jugement. Mais le fait que le tout soit plus grand que la partie n'est compris qu'au moyen d'un jugement, car il n'y a aucun moyen pour la faculté discriminante de saisir que le tout est plus grand que sa partie sans connaître d'abord le sens de « tout » et de « partie », ainsi que celui de « plus grand ». ... Or la disposition de ce syllogisme est la suivante : (1) Tout tout excède la partie. (2) Tout ce qui excède autre chose est plus grand qu'elle. (3) Donc tout tout est plus grand que sa partie. Mais la rapidité avec laquelle la faculté de discrimination atteint la conclusion tient uniquement au fait que la prémisse majeure est évidente.

(Alhazen, *De aspectibus*, II, 3, §§32-33)

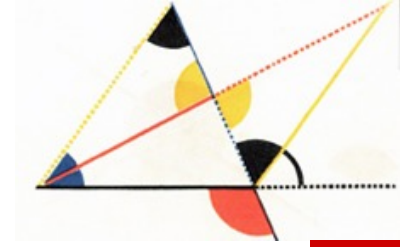
En Europe, Roger Bacon, qui connaissait très bien l'œuvre d'Alhazen et fut lui-même l'auteur d'un important ouvrage d'optique, adopta la conception d'Alhazen sur les inférences inconscientes et soutint que tous les axiomes peuvent être prouvés de cette manière:

Ces propositions que chacun peut connaître par elles-mêmes, une fois qu'il en a compris les termes, sont appelées conceptions [c'est-à-dire axiomes] ; c'est précisément pour cela qu'on les appelle conceptions, parce qu'elles sont évidentes par elles-mêmes pour tous (per se nota). Et nous le voyons dans l'exemple de l'égalité mentionné plus haut. ... Ainsi, cette proposition, « tout tout est plus grand que sa partie », est dite une conception évidente par elle-même. Et pourtant les auteurs de la Perspectiva d'Alhazen enseignent qu'elle peut être démontrée par la définition de « plus grand », à savoir par cette proposition : « tout ce qui contient une autre chose et lui est supérieur est plus grand qu'elle ; tout tout est de cette sorte par rapport à sa partie ; donc tout tout est plus grand que sa partie. »

Bacon appliqua aussi cette idée à l'ensemble des notions communes d'Euclide :

... et Adélard de Bath, dans son édition des Éléments d'Euclide, dit : « Les axiomes (conceptiones) sont les dernières propositions (ou plutôt les premières) qui se présentent à l'intelligence humaine, et à leur sujet on ne requiert aucune raison (*propter quid*). » En effet, une fois leurs termes connus, les axiomes soit [1] n'ont aucune preuve, comme le premier principe selon lequel une chose est soit affirmée soit niée, et non les deux ; soit [2] ont leur preuve (*probatio*) en eux-mêmes, comme « le tout est plus grand que la partie », dont la preuve est si évidente qu'il n'est pas nécessaire de l'exposer.

(Bacon, *Communia mathematica* I, dist. 5, ch. 4)



Mathématiques et théologie

Thomas d'Aquin (1225-1274)

Dans la seconde moitié du XIII^e siècle, la théorie de la dérivation des axiomes à partir des définitions fut reprise par Thomas d'Aquin et, grâce à son élaboration et à son autorité, elle se diffusa largement dans le monde scolastique.

Chez Thomas d'Aquin, nous trouvons une référence explicite au fait que les axiomes sont des propositions dans lesquelles le prédicat est contenu dans le sujet.

Les propositions connues par elles-mêmes (*per se notae*) sont celles qui sont connues dès que leurs termes sont connus, comme il est dit au premier livre des *Seconds Analytiques*. Cela se produit dans les propositions où le prédicat est contenu dans la définition du sujet, ou bien où le prédicat est identique au sujet.

(In metaph. IV, 5, §595)

Selon Thomas d'Aquin, les axiomes sont donc des propositions analytiques.

Il répète fréquemment cette théorie et forge la formule, à propos des axiomes, *praedicatum est de ratione subiecti*, qu'il emploie systématiquement dans ce contexte.

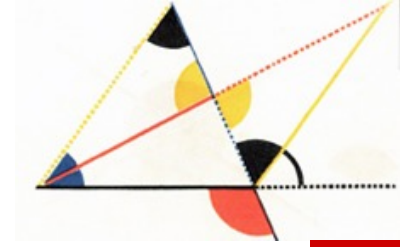
Il existe des propositions immédiates dont les termes ne sont pas connus de tous. Dès lors, bien que le prédicat soit inclus dans la notion du sujet (*predicatum sit de ratione subiecti*), comme la définition du sujet n'est pas connue de tous, il n'est pas nécessaire que de telles propositions soient admises par tous. Par exemple, la proposition « tous les angles droits sont égaux » est, en elle-même, immédiate et connue par elle-même (*per se nota*). L'égalité, en effet, est contenue dans la définition de l'angle droit : un angle droit est celui qui est formé par une droite tombant sur une autre droite de manière à produire des angles égaux des deux côtés.

(In an. post. I, 5)

Thomas d'Aquin voit bien les conséquences de cette théorie, et en particulier que toute science obtenue par syllogismes à partir d'axiomes analytiques est elle-même analytique. Nier un théorème mathématique, c'est engendrer une contradiction.

Aucun miracle ne peut aller contre les axiomes, par exemple faire que la partie ne soit pas plus petite que le tout. Car tout ce qui est contraire aux axiomes implique une contradiction directe. De même, aucun miracle ne peut aller contre les conclusions de la géométrie déduites infailliblement des axiomes, comme si un triangle n'avait pas ses trois angles égaux à deux droits.

(In IV sententiarum, d. 44, q. 2, art. 2, qu. 3)



*L'héritage
de la théorie de la dérivation*

Après Thomas d'Aquin, et surtout en raison de son autorité ainsi que de l'attribution de cette théorie à Aristote, l'idée selon laquelle les axiomes sont des propositions analytiques dérivant immédiatement de la signification des termes semble avoir été acceptée par la totalité des penseurs médiévaux.

J'en ai trouvé une expression claire chez :

Bonaventure de Bagnoregio, Henri de Gand, Gilles de Rome, Simon de Faversham, Radulphus Brito, Jean Duns Scot, Pierre Auriol, Grégoire de Rimini, Walter Burley, Guillaume d'Ockham, Thomas Bradwardine, Nicolas d'Autrécourt, Jean Buridan, Albert de Saxe, Venator, Paul de Venise, Jean Capréolus, Jean Versor, Dominique de Flandre, Thomas de Vio (Cajetanus), Francesco Silvestri (Ferrariensis), Chrisostomus Javelli, Domingo de Soto, Francisco de Toledo, Pedro Fonseca.

Tous mentionnaient la traduction « in quantum » de Jacques de Venise.

L'addition d'autorité à autorité mit d'accord sur cette théorie les thomistes et les scotistes, les reales et les nominales, les dominicains et les franciscains — bref, tout le monde.

À partir du XVe siècle, l'attribution de la théorie à Aristote fut contestée, et de nouvelles traductions de Jean Argyropoulos et d'autres mirent en lumière l'erreur de Jacques de Venise sur laquelle la tradition s'était fondée.

Cependant, la théorie continua d'être soutenue par les maîtres de la scolastique tardive, qui abandonnèrent l'attribution à Aristote, mais non la notion d'axiome qui en était issue.

En 1523, Agostino Nifo publia une autre traduction des Seconds Analytiques, en imprimant aussi dans son édition la traduction d'Argyropoulos, et commenta explicitement l'erreur de traduction de Jacques de Venise. Nifo soutenait l'indémontrabilité absolue des axiomes.

Aristote, An. Post. A3, 72b23-25 :

καὶ οὐ μόνον ἐπιστήμην ἀλλὰ καὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης εἶναί τινά φαμεν, ἣ τοὺς ὅρους γνωρίζομεν.

Quo vero ad verba attinet, verbum illud quo graece est ἥ licet multa apud graecos significet nam significat idem quod inquantum. Hic (ut mihi videtur) est relativum & dativi casus, referturque ad archem, idest principium, quod graece est foeminini generis.

L'un des manuels les plus célèbres et les plus diffusés du début de l'époque moderne, le volume de *Dialectica* du *Cursus Conimbricensis* (1606), discute tous les auteurs antérieurs et se concentre sur Thomas et Scot. C'était le principal manuel utilisé dans les collèges jésuites. Le *Cursus* lui-même reposait en grande partie sur la *Dialectica* de Pedro Fonseca (1594). Fonseca avait été le professeur de Clavius à l'université de Coimbra quelques décennies plus tôt.

Les Conimbricenses écrivent :

Aristote explique qu'il y a certaines propositions indémonstrables à partir desquelles commence la science. Il dit : nous affirmons qu'il existe un certain principe de la science par lequel nous connaissons les termes. À partir de ces mots, les philosophes et théologiens postérieurs ont produit la définition d'une proposition connue par elle-même. Une proposition connue par elle-même est une proposition qui peut être connue à partir de ses seuls termes.

(Cursus, vol. 2, p. 339)

Fonseca avait été le professeur de Christoph Clavius à Coimbra, et Clavius avait appris de lui que tout axiome devait recevoir une dérivation logique de sa vérité à partir de la signification des termes. Clavius produisit ainsi une édition d'Euclide dans laquelle tous les axiomes étaient démontrés.

Après Clavius, et largement en raison de son autorité, la théorie de la dérivabilité des axiomes fut acceptée par des penseurs aussi importants que Galilée, Thomas Hobbes, Gottfried Leibniz, Jakob Bernoulli, Georg Friedrich Hegel, Gottlob Frege — et bien d'autres.

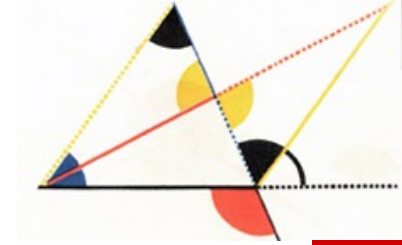
Leibniz en 1672 :

Tous les axiomes qui ne dépendent pas des sens (et, de fait, tous les théorèmes des sciences indépendantes du sens et de l'expérience) sont des propositions de cette sorte, comme Aristote l'a lui aussi observé, car il n'a posé qu'un seul principe de démonstration : la définition. Et, en vérité, tous les axiomes qu'Euclide a placés en tête des Éléments comme principes sont démontrables à partir des définitions.

La théorie scolastique des axiomes, née au XIII^e siècle et devenue dominante au XVII^e siècle, attribuait aux axiomes des caractéristiques logiques très différentes de celles d'aujourd'hui.

De notre point de vue, les mathématiques du XVII^e siècle sont une science sans axiomes, parce qu'elles n'ont rien à supposer qui soit non démontré (si l'on excepte les définitions des termes).

Selon cette théorie, il était impossible de concevoir l'existence de structures mathématiques alternatives, telles que les géométries non euclidiennes.



Conclusions

L'histoire de la théorie de la dérivabilité des axiomes peut étayer quelques thèses fondamentales sur le rôle de l'ingénierie conceptuelle à travers les siècles.

L'histoire de la théorie de la dérivabilité des axiomes peut étayer quelques thèses fondamentales sur le rôle de l'ingénierie conceptuelle à travers les siècles.

1) Il y a une histoire de l'axiomatique ! Les axiomes n'ont pas été conçus de la même manière d'Euclide à Hilbert.

L'histoire de la théorie de la dérivabilité des axiomes peut étayer quelques thèses fondamentales sur le rôle de l'ingénierie conceptuelle à travers les siècles.

1) Il y a une histoire de l'axiomatique ! Les axiomes n'ont pas été conçus de la même manière d'Euclide à Hilbert.

2) Les pratiques axiomatiques étaient stables, mais l'épistémologie changeait derrière ces pratiques. Cela n'est visible que dans les révolutions, non dans la « science normale ».

L'histoire de la théorie de la dérivabilité des axiomes peut étayer quelques thèses fondamentales sur le rôle de l'ingénierie conceptuelle à travers les siècles.

1) Il y a une histoire de l'axiomatique ! Les axiomes n'ont pas été conçus de la même manière d'Euclide à Hilbert.

2) Les pratiques axiomatiques étaient stables, mais l'épistémologie changeait derrière ces pratiques. Cela n'est visible que dans les révolutions, non dans la « science normale ».

3) Les changements conceptuels et l'ingénierie conceptuelle essentiels aux mathématiques peuvent se produire hors de leur domaine : philosophie, théologie, études textuelles, autres sciences (optique, théorie de la perception, rhétorique, etc.).