

Méthodes numériques pour la simulation d'écoulements multi-matériaux

Nicolas THERME

Modéliser les fluides : Un hommage à Jean-Claude Latché

10 juin, 2026

Sommaire

1. Contexte Historique
2. Introduction du schéma VNR 1D
3. Staggered Grid Hydrodynamics (2D/3D)
4. Extensions ALE/Euler/Multimatériaux
5. Conclusion & Perspectives



1. Contexte Historique

L'Émergence de l'Hydrodynamique Numérique (1940-1944)

■ L'impasse analytique du Projet Manhattan :

- Le besoin physique de modéliser les ondes de choc se heurte aux équations non-linéaires générant des solutions discontinues.
- Les méthodes classiques sont incapables de gérer les déformations complexes et les interactions d'ondes.

■ Le tournant numérique (1944) :

- Bascule vers la résolution discrétisée des EDP rendue possible par les premières calculatrices IBM.
- von Neumann propose la première méthode hydrodynamique 1D aux différences finies.

■ Le paradigme de la grille décalée (SGH) :

- Variables cinématiques (vitesses, positions) évaluées aux nœuds.
- Variables thermodynamiques (masse, densité, pression) aux centres des mailles.

Traitement des Chocs et Héritage VNR (1944-1950)



- **Le problème majeur** : Le schéma de von Neumann génère de violentes oscillations non physiques derrière les chocs.
- **Deux écoles pour gérer les discontinuités** :
 - *Le "Shock-Fitting"* : Suivi explicite de la discontinuité. Méthode très précise mais extrêmement laborieuse en termes de calcul.
 - *Le "Shock-Capturing"* : Idée de Peierls d'introduire une viscosité artificielle pour "étalement" le choc. Mathématisé par Richtmyer (1948) pour stabiliser le calcul automatiquement.
- **L'héritage de von Neumann & Richtmyer (1950)** :
 - Publication de leur article fondateur posant les bases des codes SGH modernes.
 - Hydrodynamique en formulation lagrangienne avec une discrétisation décalée en espace et en temps pour une précision du second ordre.



2. Introduction du schéma VNR 1D

Formulation Lagrangienne Totale et Conservative (1D)

■ Notations

- X : Position initiale (coordonnée Lagrangienne)
- $x(X, t)$: Position courante (coordonnée Eulérienne)
- $u = \frac{\partial x}{\partial t}$: Vitesse matérielle
- $\rho_0(X)$: Masse Volumique à l'instant initial $t = 0$
- $V = \frac{1}{\rho}$: Volume spécifique
- e : Énergie interne spécifique
- $E(X, t) = e + \frac{1}{2}u^2$: Énergie totale spécifique

■ Équations d'Euler en formulation Lagrangienne :

$$\rho_0 \frac{dV}{dt} - \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad (\text{Conservation de la Masse})$$

$$\rho_0 \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial X} = 0 \quad (\text{Quantité de mouvement})$$

$$\rho_0 \frac{dE}{dt} + \frac{\partial(pu)}{\partial X} = 0 \quad (\text{Énergie totale})$$

Fermeture Thermodynamique et Relation de Gibbs

- **Loi d'état (EOS)** : Loi de fermeture liant la pression aux autres variables thermodynamiques :

$$p = p(V, e)$$

- **Formulation en énergie interne** : En soustrayant l'énergie cinétique à l'équation de l'énergie totale, on obtient l'évolution de l'énergie interne :

$$\rho_0 \frac{de}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{de}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0$$

Formulation licite en cas de solutions régulières

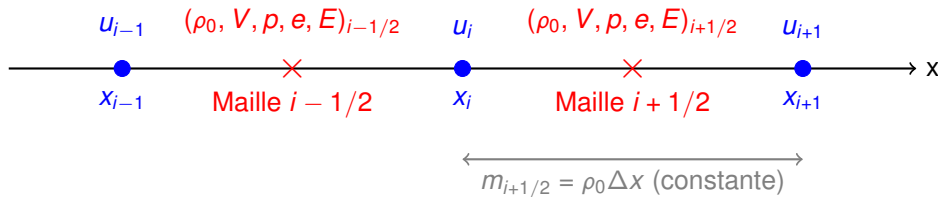
- **Entropie** : En injectant cette équation dans la relation fondamentale de Gibbs ($Tds = de + p dV$), on obtient :

$$T \frac{ds}{dt} = 0$$

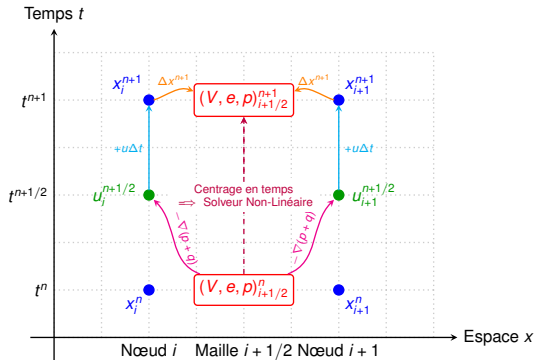
Le système formel continu ne décrit que des écoulements **isentropiques** et ne permet pas la prise en compte des chocs.

Discrétisation Spatiale : Le Maillage Décalé (SGH)

- Le paradigme **Staggered-Grid Hydrodynamics (SGH)** sépare la cinématique de la thermodynamique.
- **Nœuds (indices i)** : variables cinématiques.
- **Centres de mailles (indices $i + 1/2$)** : variables thermodynamiques.



Discrétisation temporelle "Saute-Mouton" (LeapFrog)



1. Phase Cinématique

(Nœuds, $t^{n+1/2}$)

- Forces explicites aux nœuds.
- $u_i^{n+1/2} = u_i^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{m_i} F_i^n$

2. Phase Géométrique

(Maillage, t^{n+1})

- $x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+1/2}$
- Loi GCL pour déduire les volumes V^{n+1} .

3. Phase Thermodynamique

(Cellules, t^{n+1})

- Résolution de $\frac{de}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0$.
- Termes de pression centrés en temps
- Ce couplage avec l'EOS génère un **système non linéaire** qu'on résout (ex : Newton) pour tirer p^{n+1} et e^{n+1} .

Résolution de la Cinématique

- **1. Équation de la quantité de mouvement (aux nœuds) :** Définition naturelle des gradients de pression (Pas de solveur de Riemann) :

$$m_i \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^{n-1/2}}{\Delta t} = - \left[p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n \right]$$
$$m_i = \frac{m_{i+1/2} + m_{i-1/2}}{2}$$

- **2. Équation de trajectoire (Évolution de la géométrie) :**

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+1/2}$$



- **3. Loi de conservation géométrique et Volumes spécifiques :** En représentation Lagrangienne, la masse de la maille $m_{i+1/2}$ est un invariant fondamental du calcul. Les volumes spécifiques ($V = 1/\rho$) sont mis à jour purement à partir de la nouvelle géométrie :

$$\Delta x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} \quad \Rightarrow \quad V_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\Delta x_{i+1/2}^{n+1}}{m_{i+1/2}}$$

- **4. Équivalence avec l'équation de continuité :**

$$m_{i+1/2} \frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\Delta t} = u_{i+1}^{n+1/2} - u_i^{n+1/2}$$

Discrétisation consistante du volume spécifique

Thermodynamique : Mise à jour de l'Énergie Interne

- **1. Bilan d'énergie interne** : L'évolution de l'énergie interne spécifique e est dictée par le travail des forces de pression :

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} + p^{n+1/2} \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} = 0$$

- **2. Centrage LeapFrog et non-linéarité** : Pour assurer la précision et la conservation de l'énergie, la pression est centrée en temps via $p^{n+1/2} = \frac{p^n + p^{n+1}}{2}$. La résolution du bilan d'énergie est implicite via l'équation d'état (EOS) :

$$p^{n+1} = \text{EOS}(V^{n+1}, e^{n+1})$$

- **3. Résolution itérative** : Équation résolue de manière itérative (par exemple via la méthode de Newton) à chaque pas de temps et pour chaque maille, ce qui permet de déduire simultanément p^{n+1} et e^{n+1} .

Entropie et capture des chocs

■ Production d'entropie :

- Relation de Gibbs : $Td\eta = de + pdV$
- Énergie interne $\frac{de}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow$ schéma isentropique ($d\eta = 0$)
- $\Rightarrow$ défaut de capture des chocs

■ Pseudo-viscosité (q) : Von Neumann & Richtmyer

- alternative au solveur de Riemann
- pression fictive q ajoutée :

$$\frac{de}{dt} + (p + q)\frac{dV}{dt} = 0$$

- $-q\frac{dV}{dt} \geq 0 \Rightarrow$ production d'entropie

Formulation de la pseudo-viscosité

- **Modélisation en deux termes** (fonction du saut Δu) :

$$q = \underbrace{c_1 \rho a |\Delta u|}_{\text{linéaire (Landshoff)}} + \underbrace{c_2 \rho |\Delta u|^2}_{\text{quadratique (Von Neumann)}}, \quad c_1 \approx 0.1, c_2 \approx 2.0$$

- **Rôles :**

- quadratique ($\propto |\Delta u|^2$) $\Rightarrow$ capture du choc (étalement sur quelques mailles)
- linéaire ($\propto a |\Delta u|$) $\Rightarrow$ amortissement des oscillations parasites

- **Activation en compression seule :**

- $q > 0$ si $\nabla \cdot u < 0$ ($\Delta V < 0$)
- $q = 0$ en détente

Schéma complet VNR

Maillage décalé :

- Nœuds (indices i) : positions x_i , vitesses u_i
- Mailles (indices $i + 1/2$) : masses $m_{i+1/2}$ (constantes), $P_{i+1/2} = p_{i+1/2} + q_{i+1/2}$, $e_{i+1/2}$
- Longueurs : $L_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$

Décalage temporel (leap-frog) : Positions et énergies en t^n , vitesses en $t^{n+1/2}$

Équations discrètes (avec Δt constant)

$$(M) \quad m_i \left(u_i^{n+1/2} - u_i^{n-1/2} \right) = -\Delta t \left(P_{i+1/2}^n - P_{i-1/2}^n \right) \quad (1)$$

$$(X) \quad x_i^{n+1} - x_i^n = \Delta t u_i^{n+1/2} \quad (2)$$

$$(E) \quad m_{i+1/2} (e_{i+1/2}^{n+1} - e_{i+1/2}^n) = -P_{i+1/2}^{n+1/2} (L_{i+1/2}^{n+1} - L_{i+1/2}^n) \quad (3)$$

Définition d'énergie totale et variations

Énergie totale discrète (forme décalée pour leap-frog) :

$$\mathcal{E}^n = \underbrace{\sum_{i+1/2} m_{i+1/2} e_{i+1/2}^n}_{I\mathcal{E}^n} + \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} u_i^{n-1/2} u_i^{n+1/2}}_{\mathcal{KE}^n}$$

Variation d'énergie interne (en sommant (E) et utilisant IBP discrète) :

$$I\mathcal{E}^{n+1} - I\mathcal{E}^n = \Delta t \sum_i u_i^{n+1/2} \left(P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2} \right)$$

Variation d'énergie cinétique : En ajoutant les pas n et $n+1$ de (M) :

$$m_i(u_i^{n+3/2} - u_i^{n-1/2}) = -2\Delta t(P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2})$$

D'où :

$$\mathcal{KE}^{n+1} - \mathcal{KE}^n = -\Delta t \sum_i u_i^{n+1/2} \left(P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2} \right)$$

Conservation exacte de l'énergie totale

Somme des deux contributions :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n &= [I\mathcal{E}^{n+1} - I\mathcal{E}^n] + [\mathcal{K}\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{K}\mathcal{E}^n] \\ &= \Delta t \sum_i u_i^{n+1/2} (P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2}) \\ &\quad - \Delta t \sum_i u_i^{n+1/2} (P_{i+1/2}^{n+1/2} - P_{i-1/2}^{n+1/2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

L'énergie totale est exactement conservée à chaque pas

Inégalité d'entropie : niveau totalement discret

Relation de Gibbs « moyennée » sur le pas discret :

Il existe des valeurs T^*, p^* sur le chemin thermodynamique $(e^n, V^n) \rightarrow (e^{n+1}, V^{n+1})$ telles que :

$$T^* \Delta s = \Delta e + p^* \Delta V$$

(Garanties par convexité de $s(e, V)$.)

Substitution de l'équation d'énergie (avec centrage $P^{n+1/2} = (P^n + P^{n+1})/2$) :

$$\begin{aligned} T^* \Delta s &= -(p + q)^{n+1/2} \Delta V + p^* \Delta V \\ &= -q^{n+1/2} \Delta V + \underbrace{(p^* - P^{n+1/2}) \Delta V}_{O(\Delta t^3)} \end{aligned}$$

Production d'entropie

$$T^* \Delta s = -q^{n+1/2} \Delta V + O(\Delta t^3)$$

Positivité du volume spécifique et énergie interne

Positivité de V (donc de L) : condition cinématique

$$\Delta x^{n+1} = \Delta x^n + \Delta t \Delta u^{n+1/2} \text{ avec } \Delta u = u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}.$$

■ Détente ($\Delta u > 0$) : $\Delta x^{n+1} > 0$ trivialement.

■ Compression ($\Delta u < 0$) : $\Delta x^{n+1} > 0 \Leftrightarrow \Delta t < \frac{\Delta x^n}{|\Delta u|}$ (non-recouvrement des nœuds)

Positivité de e : analyse du bilan d'énergie

$$e^{n+1} = e^n - (p + q)^{n+1/2} \Delta V, \text{ condition } e^{n+1} > 0 :$$

■ Compression : $\Delta V < 0$, $(p + q) > 0 \Rightarrow e^{n+1} > e^n$ **inconditionnellement**.

■ Détente ($\Delta V > 0$, $q = 0$) : nécessite $e^n > p^{n+1/2} \Delta V$.

Positivité de e : gaz parfait

EOS : $p = (\gamma - 1) e / V$. La résolution implicite donne (en détente, $q = 0$) :

$$e^{n+1} = \frac{e^n - \frac{1}{2} p^n \Delta V}{1 + \frac{(\gamma-1) \Delta V}{2V^{n+1}}}$$

En détente, dénominateur > 0 ; numérateur > 0 ssi :

$$\Delta V < \frac{2V^n}{\gamma - 1} \iff \Delta t |\Delta u| < \frac{2\Delta x^n}{\gamma - 1}$$

Borne bien plus large que la CFL acoustique $\Delta t < \Delta x / c_s$.

EOS générales : contrôle robuste du pas de temps

Mie–Grüneisen, JWL, tabulées... : pas de formule fermée pour e^{n+1} .

⇒ condition CFL avec une vitesse du son *augmentée par la pseudo-viscosité*.

Vitesse de signal effective (par maille)

$$Q = c_1 c_s + c_2 |\Delta u| \quad (\Delta u < 0)$$

$$c^* = Q + \sqrt{Q^2 + c_s^2}$$

c_s tiré de l'EOS en (V^n, e^n) ; $Q = 0$ en détente

Pas de temps stable

$$\Delta t_\star = C_{\text{CFL}} \min_i \frac{\Delta x_i^n}{c_i^*}$$

$$C_{\text{CFL}} \in (0.3, 0.8)$$

détente : $c^* = c_s \Rightarrow$ CFL acoustique pure

Croissance contrôlée du pas de temps

$$\Delta t^{n+1} = \min \left(\underbrace{1.1 \Delta t^n}_{+10\% \text{ max}}, \Delta t_\star \right)$$



3. Staggered Grid Hydrodynamics (2D/3D)

Équations d'Euler : Formulation Intégrale

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} & \text{(Cinématique)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \, dv = 0 & \text{(Masse)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{u} \, dv = - \int_{\partial\omega(t)} p \mathbf{n} \, ds & \text{(Quantité de mouvement)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho E \, dv = - \int_{\partial\omega(t)} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds & \text{(Énergie totale)} \end{array} \right.$$

Vers une formulation locale

■ Formule de Transport de Reynolds (RTF)

- Relie la dérivée temporelle d'une intégrale sur un domaine mobile aux quantités locales :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f \, dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dv, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

■ Application à $f = \rho$: conservation de la masse locale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

■ Identité dérivée (combinaison avec la conservation de masse)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho f \, dv = \int_{\omega(t)} \rho \frac{Df}{Dt} \, dv$$

Équations d'Euler : Formulation Locale



Système d'équations de conservation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} & \text{(Cinématique)} \\ \rho \frac{DV}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{(Masse)} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0 & \text{(Quantité de mouvement)} \\ \rho \frac{DE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = 0 & \text{(Énergie totale)} \\ p = EOS(V, e), \quad e = E - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 & \text{(Équation d'état)} \end{array} \right.$$

Équations d'Euler : Formulation Locale



Système d'équations de conservation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} & \text{(Cinématique)} \\ \rho \frac{DV}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{(Masse)} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0 & \text{(Quantité de mouvement)} \\ \rho \frac{De}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{(Énergie interne)} \\ p = EOS(V, e), \quad e = E - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 & \text{(Équation d'état)} \end{array} \right.$$

Maillages et Inconnues

1. Grille décalée (Staggered)

■ **Nœuds** (p) : Cinématique

■ $\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p$

■ **Mailles** (c) : Thermodynamique

■ V_c, e_c, p_c

2. Maillage dual

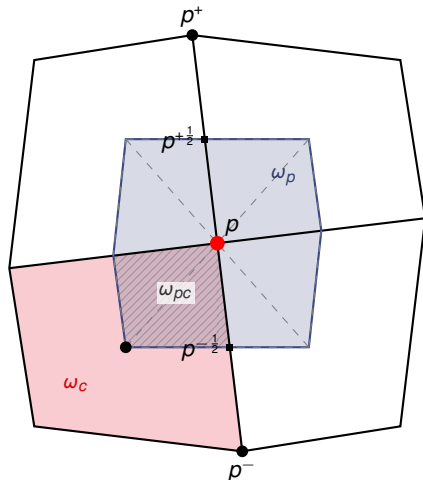
■ **Sous-maille** ω_{pc} : connecte centre, nœud et milieux d'arêtes.

■ **Maille duale** ω_p : union des sous-mailles autour de p .

3. Hypothèse lagrangienne

■ m_{pc} **constante**

■ $m_c = \sum_{p \in \partial c} m_{pc}, m_p = \sum_{c \in \partial p} m_{pc}$



1. Mouvement des nœuds

- Équation de trajectoire multi-D :

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p$$

2. Volume de la maille ($|\omega_c|$)

- Géométrie polygonale 2D :

$$|\omega_c(t)| = \frac{1}{2} \sum_{p \in P(c)} (\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_{p+}) \cdot \mathbf{e}_z$$

3. Évolution temporelle

- Dérivation par composition :

$$\frac{d|\omega_c|}{dt} = \sum_{p \in P(c)} \frac{\partial |\omega_c|}{\partial \mathbf{x}_p} \cdot \frac{d\mathbf{x}_p}{dt}$$

- **Vecteur de coin** : Il apparaît naturellement comme le gradient du volume :

$$l_{pc} \mathbf{n}_{pc} = \frac{\partial |\omega_c|}{\partial \mathbf{x}_p}$$

Loi de Conservation Géométrique (GCL) et Divergence

1. GCL discrète

- Substitution avec les vecteurs de coins :

$$\frac{d|\omega_c|}{dt} = \sum_{p \in P(c)} l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \cdot \mathbf{u}_p$$

- **Bilan** : Relie exactement la variation géométrique aux vitesses nodales.

2. Opérateur Divergence

- Identité continue de base :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega|} \frac{d|\omega|}{dt}$$

- **Définition discrète naturelle** :

$$DIV_c(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\omega_c|} \sum_{p \in P(c)} l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \cdot \mathbf{u}_p$$

- *Propriété* : Exact pour des champs de vitesse affines.

Dérivation des vecteurs de coins

■ 1. Volume d'une maille polygonale

- Calcul exact par somme de triangles cartésiens :

$$|\omega_c| = \frac{1}{2} \sum_{p \in P(c)} (\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_{p+}) \cdot \mathbf{e}_z$$

- *Forme algébrique* : $|\omega_c| = \sum_p \frac{1}{2} (x_p(y_{p+} - y_{p-}))$.

■ 2. Gradient par rapport au nœud p

- On dérive $|\omega_c|$ par rapport aux coordonnées de $\mathbf{x}_p$. Seules les arêtes connectées à p restent :

$$\frac{\partial |\omega_c|}{\partial \mathbf{x}_p} = \frac{1}{2} [(\mathbf{x}_{p+} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{e}_z + (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{p-}) \times \mathbf{e}_z]$$

- *Vecteur résultant* : $\left(\begin{array}{c} \frac{y_{p+} - y_{p-}}{2} \\ -\frac{x_{p+} - x_{p-}}{2} \end{array} \right)$.

Dérivation des vecteurs de coins

■ 3. Lien avec les normales aux arêtes

- Le gradient obtenu se sépare naturellement en deux termes géométriques.

■ Arête entrante ($p- \rightarrow p$)

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{p-}) \times \mathbf{e}_z = l_{pc}^- \mathbf{n}_{pc}^-$$

Demi-normale sortante de l'arête précédente.

■ Arête sortante ($p \rightarrow p+$)

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{p+} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{e}_z = l_{pc}^+ \mathbf{n}_{pc}^+$$

Demi-normale sortante de l'arête suivante.

■ Conclusion : Définition exacte du vecteur de coin

$$\frac{\partial |\omega_c|}{\partial \mathbf{x}_p} = l_{pc}^- \mathbf{n}_{pc}^- + l_{pc}^+ \mathbf{n}_{pc}^+ = l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$$

Vecteurs de Coin

Vecteur de coin $l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$

- **Rôle** : Couplage géométrique pression-vitesse.
- **Définition analytique** : Gradient du volume.

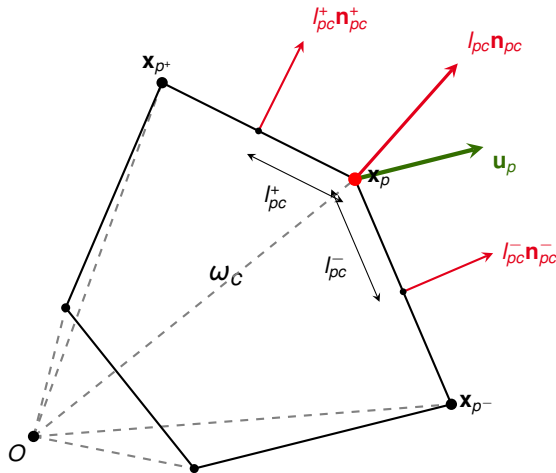
$$\nabla_{\mathbf{x}_p} V_c = l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$$

- **Calcul géométrique** :

$$l_{pc} \mathbf{n}_{pc} = l_{pc}^- \mathbf{n}_{pc}^- + l_{pc}^+ \mathbf{n}_{pc}^+$$

- **Propriété (maille fermée)** :

$$\sum_{p \in P(c)} l_{pc} \mathbf{n}_{pc} = \mathbf{0}$$





■ 1. Principe

- Résolution du bilan d'énergie interne
- Préservation du bilan d'énergie totale

■ 2. Identité d'intégration par parties

- Le travail de la pression sur un domaine ω obéit exactement à :

$$\int_{\omega} p \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p \, dv = \int_{\partial\omega} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

■ 3. Objectif

- Reproduire cette identité au niveau discret pour garantir la conservation de l'énergie totale.

Dérivation du gradient

■ 1. Bilan d'énergie discret

- Sur un domaine fermé (vitesse nulle aux bords), l'identité devient :

$$\sum_c p_c (DIV_c \mathbf{u})|_{\omega_c} + \sum_p \mathbf{u}_p \cdot (GRAD_p p)|_{\omega_p} = 0$$

■ 2. Le principe de dualité

- Conséquence mathématique directe de ce bilan global :

$$GRAD = -DIV^*$$

Dérivation du gradient

■ 1. Injection de la divergence

- On substitue $DIV_c \mathbf{u}$ par sa définition avec les vecteurs de coin :

$$\sum_c \rho_c \left(\sum_{p \in P(c)} l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \cdot \mathbf{u}_p \right) = - \sum_p \mathbf{u}_p \cdot (GRAD_p \rho) |\omega_p|$$

■ 2. Intersion géométrique

- On regroupe les termes par nœuds ($\sum_c \sum_p \equiv \sum_p \sum_c$) :

$$\sum_p \mathbf{u}_p \cdot \left(\sum_{c \in C(p)} \rho_c l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \right) = - \sum_p \mathbf{u}_p \cdot (GRAD_p \rho) |\omega_p|$$

Dérivation du gradient

■ 1. Identification du gradient

- L'égalité précédente étant vraie pour **tout** champ $\mathbf{u}_p$, on identifie :

$$(GRAD_p p) = \frac{-1}{|\omega_p|} \sum_{c \in C(p)} p_c l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$$

■ 2. Force sous-zonale (Force de coin)

- Définition naturelle de la force de pression exercée par la maille sur le nœud :

$$\mathbf{F}_{pc}^p = -p_c l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$$

Schéma semi-discret en espace



Formulation en force

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p & \text{(Cinématique)} \\ \frac{d|\omega_c|}{dt} = \sum_{p \in P(c)} l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \cdot \mathbf{u}_p & \text{(GCL)} \\ m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \sum_{c \in C(p)} \mathbf{F}_{pc} & \text{(Quantité de mouvement)} \\ m_c \frac{de_c}{dt} = - \sum_{p \in P(c)} \mathbf{F}_{pc} \cdot \mathbf{u}_p & \text{(Énergie interne)} \end{array} \right.$$

■ 1. Principe fondamental

- L'objectif reste de dissiper l'énergie cinétique aux chocs pour assurer le dépôt d'entropie.
- Elle est traitée formellement comme une **force sous-zonale** $\mathbf{F}_{pc}^q$ qui s'ajoute à la force de pression.

■ 2. Viscosité "Bulk" (Scalaire)

- Le terme q_c est supposé constant sur la maille (souvent basé sur la forme de Kurapatenko).
- La force de coin s'écrit : $\mathbf{F}_{pc}^q = l_{pc} q_c \mathbf{n}_{pc}$.
- **Activation conditionnelle** : Strictement nulle en détente, active si $\nabla \cdot \mathbf{u}_c < 0$.
- *Défaut* : Manque de directionnalité, provoquant des "jets" parasites le long des axes du maillage.

Forces additionnelles : Pseudo-Viscosité

■ 1. Kurapatenko (Gaz parfait)

- Modèle basé sur l'analyse des chocs avec des gaz parfaits :

$$q_c = \rho_c l_c (1 - \psi_c) \left[c_2 \frac{\gamma + 1}{4} |\Delta \mathbf{u}_c| + \sqrt{c_2^2 \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 |\Delta \mathbf{u}_c|^2 + c_1^2 a_c^2} \right]$$

■ 2. Paramètres physiques

- $|\Delta \mathbf{u}_c|$: Mesure de la variation de vitesse sur la maille.
- a_c : Vitesse du son adiabatique, l_c : Longueur caractéristique de la maille.
- c_1, c_2 : Constantes classiques (contrôlant les contributions linéaire et quadratique).

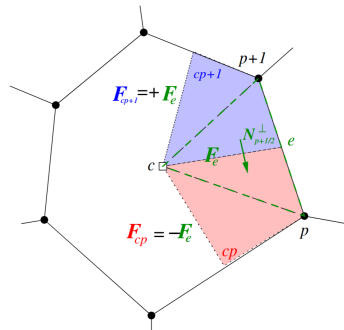
■ 3. Limiteur et Activation

- ψ_c : Limiteur valant 1 si la compression est purement adiabatique (désactive la viscosité).
- **Condition stricte** : q_c est mis à zéro si la maille est en phase de détente.

Forces additionnelles : Pseudo-Viscosité

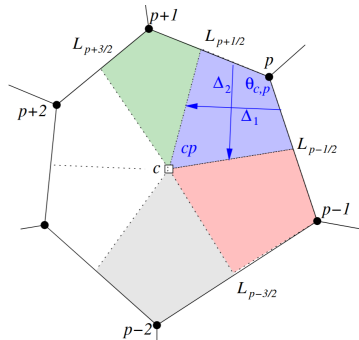
■ 1. Viscosité par arête (Edge-based)

- Au lieu d'un scalaire par maille, on calcule un terme q_e pour **chaque arête**.
- Basée sur le saut de vitesse $\Delta \mathbf{u}_e$ projeté sur la normale locale à l'arête.



■ 2. Viscosité Tensorielle

- Remplace le scalaire par un tenseur des contraintes visqueuses basé sur $\nabla \mathbf{u}$.
- **Rôle** : Sélectionne les directions principales de l'écoulement pour le dépôt d'entropie.
- **Avantage** : Réduit fortement l'empreinte directionnelle du maillage (mesh imprinting).
- $Q_c \sim GRAD_c(\mathbf{u})$



Modes Parasites : Déformations en Sablier

- **Définition** : Champs de vitesse $\mathbf{u}_p \neq \mathbf{0}$ et de pression $p_c \neq 0$ appartenant au **noyau des opérateurs discrets** :

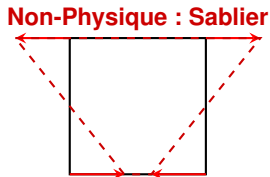
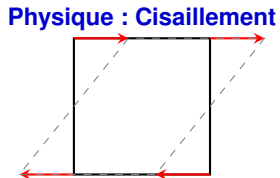
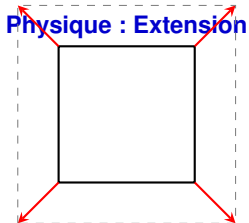
$$GRAD_p(p) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad DIV_c(\mathbf{u}) = 0$$

- **Conséquence** : Ces modes sont *invisibles* pour la thermodynamique.
 - Aucune variation de volume $\Rightarrow$ aucune variation de pression.
 - Aucune force de rappel $\Rightarrow$ instabilité croissante jusqu'au tangling.
- **Origine topologique** : Défaut intrinsèque aux quadrangles / hexaèdres.
 - 8 DDL nodaux pour seulement 6 modes physiques $\Rightarrow$ 2 modes parasites.
 - Absent sur triangles : nombre de DDL = nombre de modes physiques.

Modes Parasites : Déformations en Sablier

Degrés de liberté (Quadrangle)

- **8 DDL** au total (2 par nœud).
- **6 modes physiques :**
 - 2 Translations
 - 2 Extensions
 - 2 Cisaillements
- **2 modes non-physiques :**
 - Modes en sablier (Hourglass).
 - Mouvement alterné en damier.



Modes Parasites : Déformations en Sablier



■ 1. Volume macroscopique constant

- La déformation en sablier pur **ne modifie pas** le volume total de la maille.

■ 2. Insensibilité à la thermodynamique

- Le volume étant figé, la densité ρ_c et l'énergie interne e_c restent constantes.
- La pression de la maille p_c ne change donc pas.

■ 3. Mode instable

- Aucune force de pression ne vient s'opposer au mouvement parasite.
- L'amplitude de la déformation croît jusqu'à l'enchevêtrement (tangling) et la plante du code.



■ 1. Réduire les DDL de la vitesse

- Filtrage cinématique : lissage des vitesses nodales par moyennes pondérées.
- *Défaut* : perte de précision et destruction de la conservation de l'énergie totale.

■ 2. Augmenter les DDL de la pression

- Pressions de sous-mailles : une pression p_{cp} par sous-maille ω_{cp} .
- *Avantage* : force de rappel thermodynamique, conservation stricte de l'énergie.

■ 3. Adapter les propriétés diffusives du schéma

- Viscosité artificielle tensorielle ou par arêtes.
- *Rôle* : opposer une résistance directionnelle aux modes non-physiques.



■ 1. Le concept des sous-maillles

- On divise virtuellement la maille en 4 sous-maillles ω_{cp} .
- On leur attribue des **masses lagrangiennes** m_{cp} strictement constantes.

■ 2. Bris du paradoxe

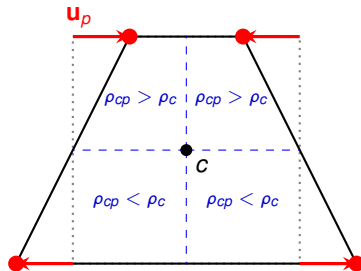
- Lors d'un mode sablier, même si le volume total est constant, les volumes sous-zonaux V_{cp} **varient** (compression/expansion locale).

■ 3. Équations thermodynamiques locales

- Densité sous-zonale : $\rho_{cp} = m_{cp} / V_{cp}(t)$.
- Pression sous-zonale : $p_{cp} = \text{EOS}(\rho_{cp}, e_c)$.
- **Force de rappel** : Proportionnelle à $(p_{cp} - p_c)$, elle s'oppose naturellement au mode sablier tout en préservant l'énergie totale.

Réaction thermodynamique

- Le mouvement parasite (flèches rouges) déforme la maille en trapèze.
- Les sous-mailles du haut se compriment ($V_{cp} \searrow \Rightarrow \rho_{cp} > \rho_c$).
- Les sous-mailles du bas s'étendent ($V_{cp} \nearrow \Rightarrow \rho_{cp} < \rho_c$).
- *Le différentiel de pression crée une force repoussant les nœuds vers leur position physique.*



■ 1. Superposition physique et numérique

- La force sous-zonale totale intègre toutes les contributions de manière unifiée :

$$\mathbf{F}_{pc} = \mathbf{F}_{pc}^{pression} + \mathbf{F}_{pc}^{visqueuse} + \mathbf{F}_{pc}^{sablier}$$

■ 2. Détail des composantes

- $\mathbf{F}_{pc}^{pression} = -p_c l_{pc} \mathbf{n}_{pc}$
(Travail thermodynamique réversible)
- $\mathbf{F}_{pc}^{visqueuse} = \dots$
(Dissipation irréversible des chocs, génération d'entropie)
- $\mathbf{F}_{pc}^{sablier} = (p_{cp} - p_c) \dots$
(Force de rappel purement cinématique, robustesse du maillage)



■ 1. Principe (Passage au pas Δt)

- Évaluation explicite sur un pas de temps complet.
- Utilisation des forces au temps n .
- Construction d'un état prédit (noté $\hat{\cdot}$).
- Schéma RK de type Heun

■ 2. Système de prédiction

- Vitesse : $m_p \frac{\hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p^n}{\Delta t} = \sum_{c \in C(p)} \mathbf{f}_{pc}^n$
- Position : $\frac{\hat{\mathbf{x}}_p - \mathbf{x}_p^n}{\Delta t} = \mathbf{u}_p^n$
- Énergie : $m_c \frac{\hat{e}_c - e_c^n}{\Delta t} = - \sum_{p \in P(c)} \mathbf{f}_{pc}^n \cdot \mathbf{u}_p^n$



■ 1. Centrage par demi-somme

- Moyenne entre l'état prédit et l'état initial.
- Définit l'état au demi-pas de temps $n + 1/2$.

■ 2. Variables au demi-pas

$$A^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\hat{A} + A^n) \quad \text{pour } A \in \{\mathbf{u}, \mathbf{x}, e\}$$

■ 3. Mise à jour thermodynamique et géométrique

- Nouvelle géométrie issue de $\mathbf{x}^{n+1/2}$.
- Calcul de $p^{n+1/2}$ via l'équation d'état $e^{n+1/2}$ et $\rho^{n+1/2}$.
- **Résultat** : Forces centrées $\mathbf{f}_{pc}^{n+1/2}$.



■ 1. Objectif de la correction

- Atteindre l'état final $n + 1$ via les forces centrées $\mathbf{f}_{pc}^{n+1/2}$.
- Garantir l'ordre 2 en temps et la stricte conservation.

■ 2. Système de correction

- Vitesse : $m_p \frac{\mathbf{u}_p^{n+1} - \mathbf{u}_p^n}{\Delta t} = \sum_{c \in C(p)} \mathbf{f}_{pc}^{n+1/2}$
- Position : $\frac{\mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{x}_p^n}{\Delta t} = \mathbf{u}_p^{n+1/2}$
- Énergie : $m_c \frac{e_c^{n+1} - e_c^n}{\Delta t} = - \sum_{p \in P(c)} \mathbf{f}_{pc}^{n+1/2} \cdot \mathbf{u}_p^{n+1/2}$

Conservation de l'énergie totale

Identité algébrique clé

$$m_p \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}}_{\mathbf{u}^{n+1/2}} = \frac{\Delta E_c^n}{\Delta t} \quad (\text{variation exacte de } E_c)$$

- **Énergie interne** : Le travail des forces *doit* utiliser la même vitesse $\mathbf{u}^{n+1/2}$.
- **Bilan total** : Les deux contributions se compensent terme à terme $\Rightarrow$ conservation stricte de $E = E_c + E_i$.

Propriétés : Positivité

■ 1. Résultat [Maire & Therme, *SIAM J. Numer. Anal.* 58 (2020)]

- Données initiales admissibles : $\rho^0 \geq 0$, $e^0 \geq 0$.

Positivité préservée sous condition (Prop. 4.4)

$$V_c^n > 0 \quad (\rho_c^n \geq 0) \quad \text{et} \quad e_c^n \geq 0 \quad \forall c, \forall n,$$
$$\Delta t \leq \min_{c,n} \left(\frac{1}{(DIV_c^* \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})_-}, \frac{1}{(\gamma - 1) (DIV_c^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})_+} \right) \quad (4.1)$$

$$x_- = \frac{|x| - x}{2}, \quad x_+ = \frac{|x| + x}{2}; \quad DIV_c^* : \text{divergence moyennée en temps.}$$

Propriétés : Inégalité d'entropie

■ Production d'entropie semi-discrète

Inégalité d'entropie à résidu consistant

$$\theta_c^{n+1} \rho_c^n \frac{S_c^{n+1} - S_c^n}{\Delta t} \geq R_c^{n+1}, \quad R_c^{n+1} = p_c^{n+1} (DIV_c^* - DIV_c^n) \mathbf{u}_p^{n+\frac{1}{2}}$$

- Le résidu R_c est consistant avec 0
- Sous une condition supplémentaire sur Δt

$$\Delta t \leq \min_{c,n} \frac{2}{L_c^n} \frac{\rho_c^n \mu_c^n \theta_c^{n+1} |\Delta H_c^n|^2}{(p_c^{n+1} - p_c^n)^2} \quad (4.8)$$

L_c : taille de maille, $\mu_c \approx \rho_c |\Delta \mathbf{u}_c|$, $|\Delta H_c|^2$: forme quadratique liée à la **Hessienne de l'entropie** $H(V, e)$.

Propriétés : Consistance faible (Lax–Wendroff)

■ 1. La difficulté

- Le schéma repose sur la forme *non conservative* (énergie interne) mais on exige la cohérence avec le système d'Euler **conservatif** (capture correcte des chocs).

Consistance de type Lax–Wendroff

Toute suite de solutions discrètes qui **converge** dans L^1 — sous hypothèse de régularité du maillage, CFL (4.1)+(4.8) — converge vers une **solution faible** des équations d'Euler conservatives.

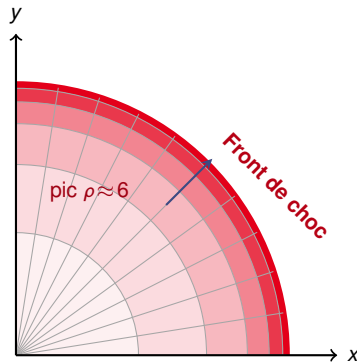
Résultats Numériques : explosion de Sedov

Onde de souffle ponctuelle (Sedov)

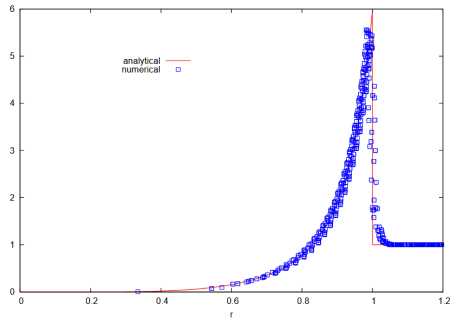
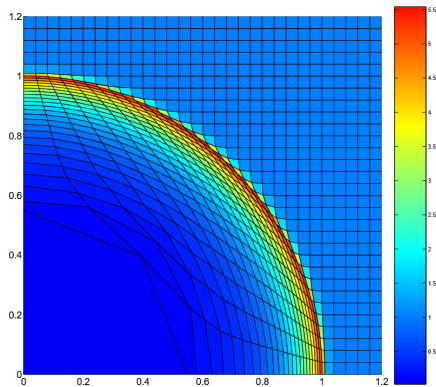
- Domaine $[0, 1.2]^2$, gaz parfait $\gamma = 1.4$.
- Dépôt d'énergie ponctuel dans la maille centrale ($\rho^0 = 1$).
- **Solution auto-semblable** : choc cylindrique en $r = 1$ à $t = 1$.

Ce que teste le cas

- *Symétrie* : pas de déformation directionnelle parasite.
- *Robustesse* : forte distorsion du maillage au centre.
- *Capture de choc* : $\text{pic } \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6$.

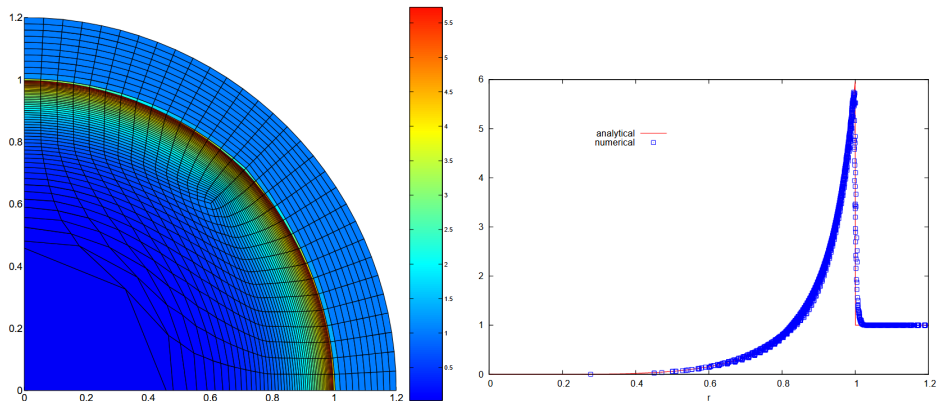


Résultats Numériques : explosion de Sedov



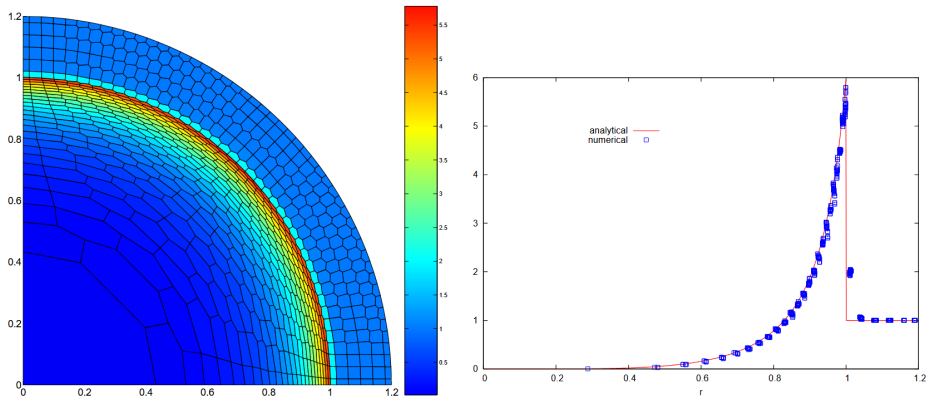
Maillage Cartésien

Résultats Numériques : explosion de Sedov



Maillage Polaire

Résultats Numériques : explosion de Sedov



Maillage Voronoi

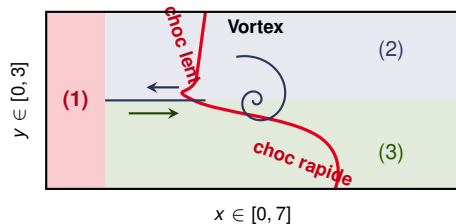
Résultats Numériques : Triple Point Problem

Trois états initiaux — domaine $[0, 7] \times [0, 3]$

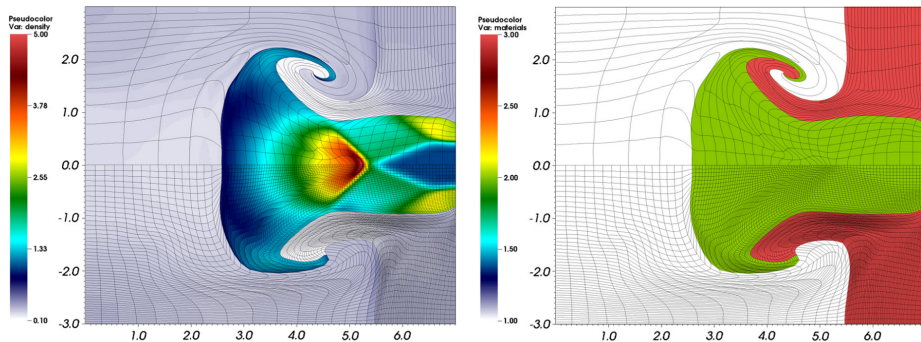
- (1) $x < 1 : \rho = 1, p = 1$
moteur haute pression.
- (2) haut, $x > 1 : \rho = 1, p = 0.1.$
- (3) bas, $x > 1 : \rho = 0.125, p = 0.1.$

Mécanisme

- Le choc avance **plus vite** dans le milieu léger (bas).
- Le **cisaillement** à l'interface $y = 1.5$ génère de la **vorticité**.
- Instabilité de Kelvin–Helmholtz $\Rightarrow$ **enroulement** au point triple.



Résultats Numériques : Triple Point Problem



Comparaison Low Order/ High Order



4. Extensions ALE/Euler/Multimatériaux

Des calculs Lagrangiens à l'ALE

1. Limite intrinsèque du lagrangien

- Le maillage suit le fluide ($d\mathbf{x}_p/dt = \mathbf{u}_p$) : cisaillement et vorticité $\Rightarrow$ distorsion rapide, croisement d'arêtes (*tangling*).
- Jacobien $J_c = \det(\partial\mathbf{x}/\partial\xi) \leq 0 \Rightarrow$ **volumes négatifs**, $\Delta t \rightarrow 0$, la simulation **s'arrête**.

2. La réponse ALE : trois phases par pas de temps

1. **Lagrange** : on résout l'hydro, le maillage se déforme.
2. **Rezone** : on choisit un maillage de meilleure qualité.
3. **Remap** : on projette les champs de façon *conservative*.

Cas particulier : Euler

Le rezone est trivial — on reprend la **grille cartésienne fixe initiale** $\Rightarrow$ formalisme *Lagrange–Remap*.

Mailles multi-matériaux : Fermeture

1. Maille mixte

- Une interface traverse la maille c : plusieurs matériaux $i \in M(c)$, chacun portant son état $(\rho_{c,i}, p_{c,i}, \varepsilon_{c,i})$ et sa fraction volumique $\alpha_{c,i} = \frac{V_{c,i}}{V_c}$, $\sum_{i \in M(c)} \alpha_{c,i} = 1$.
- **Système sous-déterminé** : une seule vitesse nodale, un seul ΔV_c connu $\Rightarrow$ il faut un **modèle de fermeture**.

2. Iso-déformation (la fermeture de référence)

- Fractions gelées sur le pas lagrangien : $\Delta V_{c,i} = \alpha_{c,i}^n \Delta V_c$, puis mise à jour $p dV$ par matériau $m_{c,i} \Delta \varepsilon_{c,i} = -p_{c,i}^n \alpha_{c,i}^n \Delta V_c$.
- **Robuste, conservative, peu coûteuse**, suffisante dans la grande majorité des cas ;
limite : non physique pour des compressibilités très différentes (gaz + métal).

3. Fermetures alternatives

- **Tipton (PR)** : relaxe les pressions vers un équilibre commun p_c^* à chaque Δt .
- **Interface-aware (IA-SSD)** : sous-mailles lagrangiennes, échanges de volume par solveur de Riemann acoustique à l'interface.

Mailles multi-matériaux : reconstruction d'interface

1. Représentation PLIC (*Piecewise-Linear Interface Calculation*)

- Une droite (un plan en 3D) par matériau et par maille : demi-plan $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \leq d\}$.
- d fixé par **conservation du volume** ($V(\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \leq d\} \cap \omega_c) = \alpha_c V_c$), $\mathbf{n}$ fixé par la **méthode** (VOF / MOF).

2. VOF (Volume-of-Fluid)

- Utilise α **de la maille et de ses voisines** (stencil 3×3 pour $\nabla \alpha$) : Youngs (moindres carrés), LVIRA (minimise l'écart aux voisins, $E^{\text{VOF}}(\mathbf{n}) = \sum_{c'} (\alpha_{c'}^{\text{ref}} - \alpha_{c'}(\mathbf{n}))^2$).
- **Dépend de l'ordre** de traitement (nested dissection).

3. MOF (Moment-of-Fluid)

- Utilise α_c **et le centroïde** : minimise $E^{\text{MOF}}(\mathbf{n}) = \|\mathbf{x}_c^{\text{ref}} - \mathbf{x}_c^{\text{act}}(\mathbf{n})\|^2$.
- **Purement local**, préserve les interfaces linéaires, **indépendant de l'ordre**.



1. Rezone : choisir un bon maillage

- **Untangling** (décroisement) : ramener chaque nœud dans son ensemble admissible.
- **Lissage** (Laplacien, Winslow) : simple mais ignore la physique.
- **Optimisation** (Knupp, *reference Jacobian*) : régularise tout en gardant la **mémoire** du maillage lagrangien.

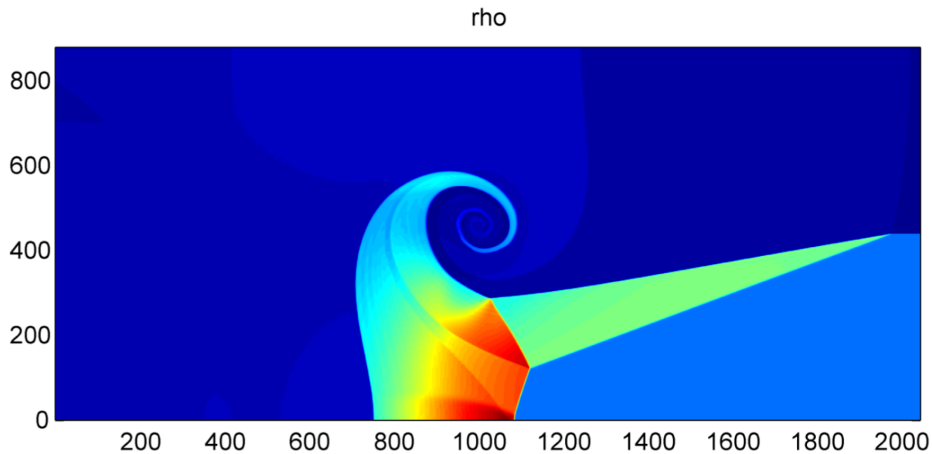
2. Remap : réinterpolation purement conservative

- **Aucune physique** ; exigences : **conservation** (masse, qdm, énergie), **préservation des bornes** ($\rho > 0$, pas de nouvel extremum), **cohérence masse**.
- Brique commune : reconstruction linéaire $f_c(\mathbf{x}) = \langle f \rangle_c + \Phi_c \nabla f_c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$ avec **limitation de pente** $\Phi_c \in [0, 1]$.

3. Choix de la méthode

- Même connectivité, faible déplacement $\Rightarrow$ **balayage de flux (swept)**, local.
- Maillages indépendants ou multi-matériaux $\Rightarrow$ **intersection de maillages**.
- **Cas Euler** : remap directionnel + **splitting de Strang** ($\mathcal{R}_y \mathcal{R}_x / \mathcal{R}_x \mathcal{R}_y$) pour l'ordre 2.

Triple Point



Calcul Euler : 1.8M de mailles



5. Conclusion & Perspectives

Conclusion



1. VNR 1D — la brique fondatrice

- Grille décalée (SGH), schéma saute-mouton, viscosité artificielle.
- Conservation exacte de l'énergie totale, production d'entropie contrôlée, positivité sous CFL.

2. SGH 2D/3D — la généralisation

- Maillage dual, sous-maillages, forces sous-maille.
- Consistance faible (Lax–Wendroff) malgré la forme *non conservative* en énergie interne.

3. ALE / multi-matériaux — la robustesse

- Cycle Lagrange → Rezone → Remap.
- Modèles de fermeture, reconstruction d'interface, remap conservatif.

Bilan : acquis et limites des schémas SGH/VNR

Forces

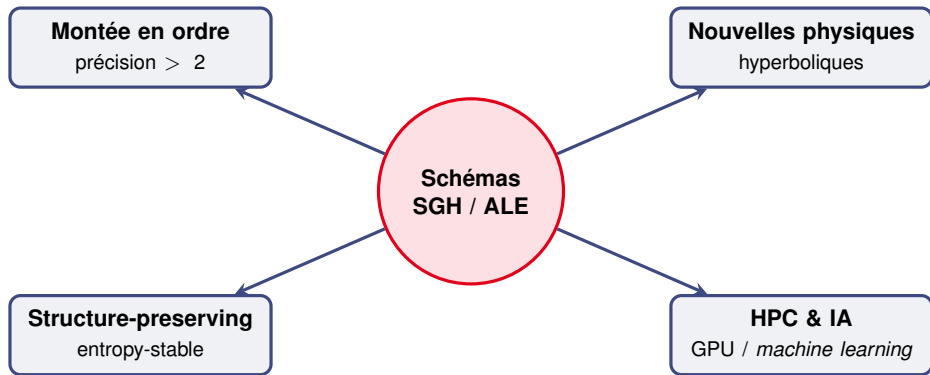
- Maturité **industrielle**, faible coût par pas de temps.
- Conservation **exacte** de l'énergie totale.
- Production d'entropie aux chocs, **positivité** de V et e .
- Suivi naturel des **interfaces** matérielles.

Limites

- Précision **ordre 1–2** $\Rightarrow$ diffusion numérique.
- Viscosité artificielle **paramétrée** (c_1, c_2 à calibrer).
- Fermetures multi-matériaux **approchées**.
- Sensibilité au **maillage** : tangling ...

Les perspectives visent à lever ces quatre limites

Quatre axes de recherche actuels



Perspective 1 — Montée en ordre

■ 1. Schémas cell-centered haute précision

- Solveur **nodal** type *Generalized Riemann Problem* (Maire) : ordre ≥ 2 sur maillages non structurés, GCL par construction.

■ 2. Éléments finis lagrangiens d'ordre élevé

- Bases **curvilignes** (Dobrev–Kolev–Rieben, code BLAST).
- *Discontinuous Galerkin* et *ADER-WENO* lagrangiens (Vilar–Loubère, Boscheri–Dumbser).

■ 3. *Residual Distribution* décalé (SGH-RD)

■ 4. ALE d'ordre élevé

- Optimisation de maillage *target-matrix* (Knupp) couplée à l'hydro.

Challenge

Préserver les **bornes** (monotonie, positivité) et capturer les chocs *sans* dégrader l'ordre élevé en zone régulière.

Perspective 2 — Vers d'autres physiques hyperboliques

■ Extensions *directes*

- **MHD** lagrangienne : contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ($\Rightarrow$ *divergence cleaning* GLM).
- **Radio-hydrodynamique** (modèles à 3 températures), élasto-plasticité en grandes déformations.

■ Le modèle unifié **GPR / SHTC** (Godunov–Peshkov–Romenski)

- **Un seul** système hyperbolique du 1^{er} ordre pour **fluides ET solides**, via un champ de distorsion **A**.
- Les **temps de relaxation** pilotent la transition *fluide* $\leftrightarrow$ *solide élasto-plastique*.

Perspective 3 — Robustesse (*structure-preserving*)

■ 1. Compatibilité thermodynamique (SHTC)

- On discrétise **directement l'entropie** ; la conservation de l'énergie totale en découle comme *conséquence*.
- Stabilité non linéaire en norme d'énergie *par construction*.

■ 2. Schémas entropy-stable lagrangiens

- Correction nodale (Abgrall) : **blending** convexe entropy-conservative / entropy-stable via détecteurs *a priori* ou *a posteriori*.
- **Positivité** prouvée de ρ et p , diffusion nulle en isentropique.

■ 3. Préservation d'involutions et de symétries

- Champ de distorsion **curl-free** (grilles décalées vertex-based, *GLM curl cleaning*).
- Symétrie sphérique / cylindrique en géométrie r - z .

Perspective 4 — Calcul Intensif & apprentissage



1. HPC / exascale

- Portage **GPU** et *performance portability* (architectures Frontier, etc.).
- Reformulations **locales** et explicites favorables au parallélisme massif (solveurs nodaux).

2. Raffinement adaptatif

- Cadres **AMR-ALE** cell-centered 3D, remap *Flux-Corrected*.

3. Machine learning

- **Viscosité artificielle par IA** : remplacer la forme quadratique-linéaire par une fonction apprise (*differentiable programming*, entraînement *en ligne*).
- **Détecteurs de chocs** (*troubled-cell*) et limiteurs par réseaux de neurones.



- **Synthèse des méthodes numériques (ALE, SGH, CGH) :**

A. J. Barlow, P.-H. Maire, W. J. Rider, R. N. Rieben, M. J. Shashkov.

Arbitrary Lagrangian–Eulerian methods for modeling high-speed compressible multimaterial flows.

Journal of Computational Physics, 322, 603–665 (2016).

- **Fondements théoriques des schémas SGH et CGH (CLH) :**

R. Loubère, P.-H. Maire, B. Rebourecet.

Staggered and Colocated Finite Volume Schemes for Lagrangian Hydrodynamics.

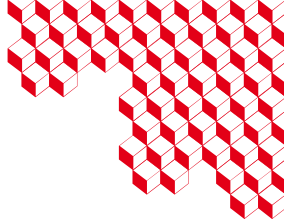
Handbook of Numerical Analysis, Elsevier (2016).

- **Histoire et prémices de la méthode VNR :**

N. R. Morgan, B. J. Archer.

On the Origins of Lagrangian Hydrodynamic Methods.

Nuclear Technology, 207 :sup1, S147-S175 (2021).



Thank you !

CEA CESTA

Le Barp

France

`nicolas.therme@cea.fr`



A. Appendix

Limite des calculs lagrangiens

1. Faiblesse des simulations lagrangiennes

- Le maillage *suit* le fluide :
$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p.$$
- Cisaillement et vorticité $\Rightarrow$ distorsion rapide des mailles.

2. Plantage des simulations

- Perte de convexité, croisement d'arêtes (*tangling*).
- Jacobien $J_c = \det(\partial\mathbf{x}/\partial\xi) \leq 0 \Rightarrow$ **volumes négatifs**.
- $\Delta t \rightarrow 0$: la simulation **s'arrête**.

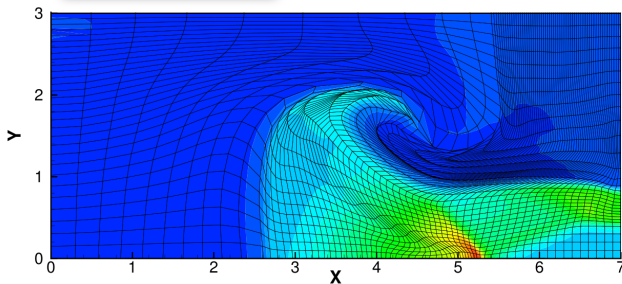
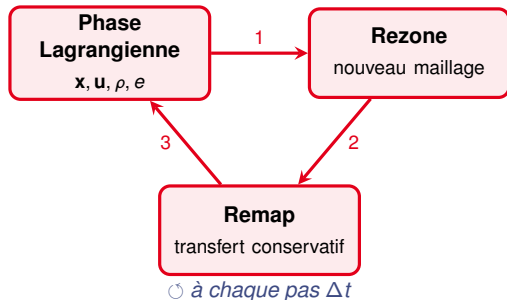


Illustration du *tangling*

Le cycle ALE : Lagrange $\rightarrow$ Rezone $\rightarrow$ Remap



Trois phases, un pas de temps

1. **Lagrange** : on résout l'hydro, le maillage se déforme.
2. **Rezone** : on choisit un maillage de meilleure qualité.
3. **Remap** : on projette les champs, de façon *conservative*.

Cas particulier : Euler

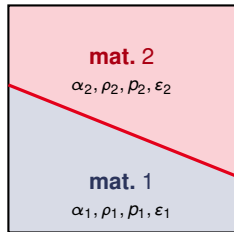
Le rezone est trivial : on reprend la **grille cartésienne initiale** fixe $\Rightarrow$ formalisme *Lagrange-Remap*.

Mailles multi-matériaux

1. Maille mixte

- Une interface traverse la maille c : plusieurs matériaux $i \in M(c)$.
- Chacun porte son état : $\rho_{c,i}$, $p_{c,i}$, $\varepsilon_{c,i}$ et sa fraction volumique

$$\alpha_{c,i} = \frac{V_{c,i}}{V_c}, \quad \sum_{i \in M(c)} \alpha_{c,i} = 1.$$



2. Système sous-déterminé

- **Une seule** vitesse nodale, **un seul** ΔV_c connu.
- Comment répartir ΔV_c et faire évoluer chaque $(\rho_{c,i}, \varepsilon_{c,i})$?

⇒ Il faut un **modèle de fermeture**.

Mailles multi-matériaux : fermeture iso-déformation

■ 1. Principe (iso-compressibilité)

- Hypothèse la plus simple : les fractions volumiques sont **gelées** pendant le pas lagrangien, $\alpha_{c,i}^{n+1} = \alpha_{c,i}^n$.
- La variation totale ΔV_c est répartie au prorata :

$$\Delta V_{c,i} = \alpha_{c,i}^n \Delta V_c$$

■ 2. Mise à jour thermodynamique (équation $p dV$ par matériau)

$$m_{c,i} (\varepsilon_{c,i}^{n+1} - \varepsilon_{c,i}^n) = -p_{c,i}^n \Delta V_{c,i} = -p_{c,i}^n \alpha_{c,i}^n \Delta V_c$$

■ 3. Bilan

- **Robuste, conservatif, peu coûteux** : *suffisant dans la grande majorité des cas.*
- **Limite** : non physique si les matériaux ont des compressibilités très différentes (gaz + métal) $\Rightarrow$ pressions hors équilibre.

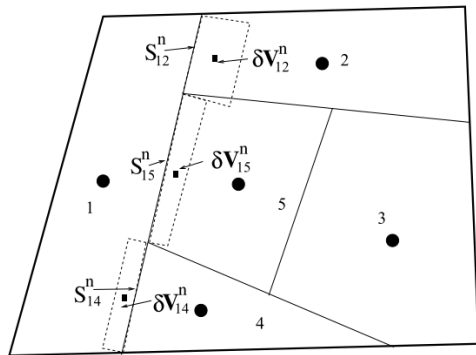
Mailles multi-matériaux : fermetures alternatives

1. Tipton – relaxation de pression (PR)

- Cherche les $\Delta V_{c,i}$ tels que $\sum_i \Delta V_{c,i} = \Delta V_c$ **et** une pression commune p_c^* .
- Relaxe les pressions vers l'équilibre à chaque Δt .

2. Interface-aware (IA-SSD)

- Émule des **sous-mailles lagrangiennes** séparées.
- Échanges de volume par paires via un **Riemann acoustique** à l'interface.
- *Requiert* la topologie issue de la reconstruction d'interface.



Mailles multi-matériaux : reconstruction d'interface (PLIC)

1. Représentation PLIC

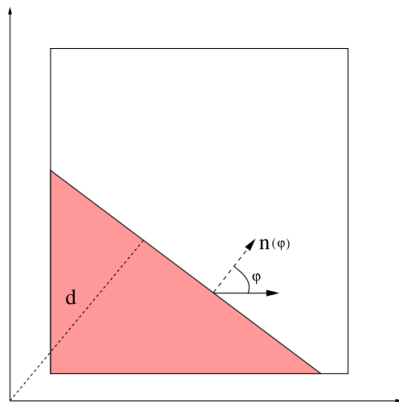
- *Piecewise-Linear Interface Calculation* : une **droite** (un **plan** en 3D) par matériau et par maille.
- Demi-plan $\{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \leq d \}$ défini par l'angle φ de $\mathbf{n}$ et la distance d .

2. Deux paramètres à fixer

- d : **conservation du volume.**
 $V(\{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \leq d \} \cap \omega_c) = \alpha_c V_c$
- $\mathbf{n}$: **direction.** MOF/VOF

3. Plus de 2 matériaux

- *Nested dissection* : on découpe les matériaux un par un, dans un ordre donné.



Mailles multi-matériaux : VOF

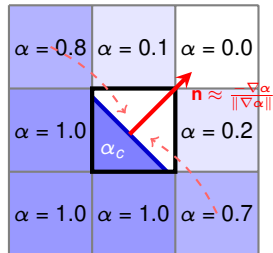
VOF (Volume-of-Fluid)

- Utilise les fractions volumiques **de la maille et de ses voisines**.
- Youngs : reconstruction d'un gradient par méthode des moindres carrés
- LVIRA : minimise l'écart aux voisins

$$E^{\text{VOF}}(\mathbf{n}) = \sum_{c' \in C(c)} (\alpha_{c'}^{\text{ref}} - \alpha_{c'}(\mathbf{n}))^2$$

Nested Dissection

Le découpage de la maille en sous-mailles est **dépendant** de l'ordre de traitement des matériaux.



Stencil 3×3 nécessaire pour $\nabla \alpha$

Mailles multi-matériaux : MOF

MOF (Moment-of-Fluid)

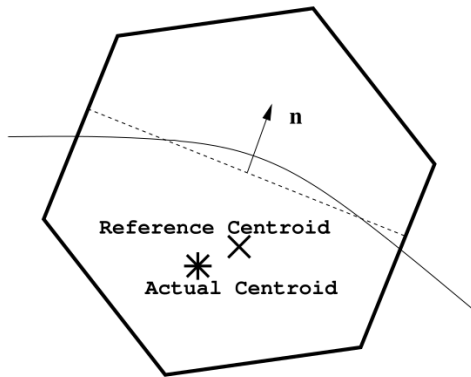
- Utilise α_c et le **centroïde** de référence $\mathbf{x}_c^{\text{ref}}$.
- Minimise l'erreur de centroïde

$$E^{\text{MOF}}(\mathbf{n}) = \|\mathbf{x}_c^{\text{ref}} - \mathbf{x}_c^{\text{act}}(\mathbf{n})\|^2$$

- **Purement local** (sans voisins),
préserve les interfaces linéaires.

Nested Dissection

MOF est **indépendant** de l'ordre de traitement des matériaux.



1. Untangling (décroisement)

- Réparer localement les mailles non convexes : déplacer chaque nœud dans son **ensemble admissible** (*feasible set*).

2. Lissage (smoothing)

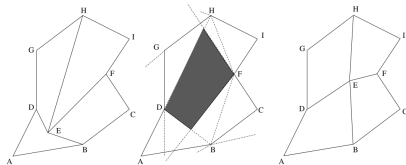
- Laplacien / harmonique, Winslow (équipotentiel) :

$$\mathbf{x}_p \leftarrow \frac{1}{|N(p)|} \sum_{q \in N(p)} \mathbf{x}_q$$

- Simple, mais ignore la physique.

3. Optimisation (matrice cible)

- Paradigme de Knupp : *reference Jacobian*.
- Garde la **mémoire** du maillage lagrangien tout en le régularisant.



Remap : principe et exigences

■ 1. Définition

- Transfert des champs du maillage lagrangien vers le maillage rezone.
- **Aucune physique** : une pure réinterpolation conservative.

■ 2. Exigences

- **Conservation** de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.
- **Préservation des bornes** : pas de nouvel extremum ($\rho > 0$, monotonie).
- **Cohérence masse** : ε et $\mathbf{u}$ remappés proportionnellement à la masse remappée.

■ 3. Le choix de la méthode dépend des deux maillages

- Même connectivité + petit déplacement $\Rightarrow$ **balayage de flux (swept)**.
- Maillages indépendants ou multi-matériaux $\Rightarrow$ **intersection de maillages**.

Remap : reconstruction et limitation

1. Brique commune à tous les remaps

- À partir des moyennes $\langle f \rangle_c$, on reconstruit un champ **linéaire par morceaux** :

$$f_c(\mathbf{x}) = \langle f \rangle_c + \nabla f_c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$$

2. Limitation des pentes

- Le gradient brut est **limité** ($\nabla f_c \rightarrow \Phi_c \nabla f_c$, $\Phi_c \in [0, 1]$) pour ne pas créer de nouvel extremum.
- Garantit la **préservation des bornes**.

3. Conservation

- La reconstruction préserve la moyenne $\Rightarrow$ remap exactement conservatif :
$$\sum_c m_c^{\text{new}} = \sum_c m_c^{\text{Lag}}.$$

Remap : balayage de flux (swept)

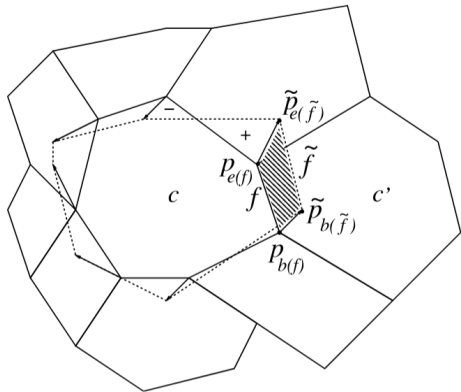
1. Hypothèses

- Connectivité **inchangée**, déplacements **faibles**.
- Chaque face f balaie une région entre sa position lagrangienne et rezonée.

2. Flux par région balayée

$$F_f = \int_{\delta V_f} \hat{f}(\mathbf{x}) dV, \quad m_c^{\text{new}} = m_c^{\text{Lag}} - \sum_{f \in \partial c} F_f$$

- δV_f : volume **signé** balayé par la face.
- Algorithme local.



Remap : intersection de maillages (overlay)

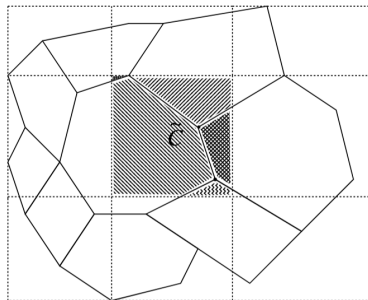
1. Quand l'utiliser

- Maillages **indépendants** (grand déplacement, changement de connectivité).
- **Indispensable** pour les mailles **multi-matériaux**.

2. Principe géométrique

$$m_C^{\text{new}} = \sum_c \int_{\omega_c \cap \Omega_C} \hat{\rho}_c(\mathbf{x}) dV$$

- On calcule les **intersections** maille-à-maille des deux grilles.
- Pour le multi-matériaux : intersection des **sous-mailles** issues de la reconstruction d'interface.



Remap : le cas Euler – splitting directionnel

1. Grille cartésienne $\Rightarrow$ balayage par direction

- Remap *Alternate Directions* (AD) : flux calculés **direction par direction**.
- **X-remap** : faces verticales (vitesse u_x).
- **Y-remap** : faces horizontales (vitesse u_y).

2. Splitting de Strang

$$\mathcal{L}^{\Delta t} \approx \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x / \mathcal{R}_x \mathcal{R}_y$$

- On **alterne** $X-Y$ et $Y-X$ à chaque pas $\Rightarrow$ ordre 2, biais directionnel supprimé.

