

---

# Une classe de schémas pour les équations de Navier-Stokes compressibles préservant l'asymptotique bas Mach

Khaled SALEH

Institut Camille Jordan,  
Université Claude Bernard, Lyon I

avec R. Herbin, J.-C. Latché, et M.-H. Vignal

Journées scientifiques 2016 du GdR Manu  
Mercredi 19 octobre 2016, Saint-Valery sur Somme

---

# Contexte et motivations

---

## Un code CFD "industriel":

- Stabilité des schémas, indépendamment des pas d'espace et de temps.
- Précision à tout nombre de Mach ?

△ **Discrétisation temporelle par algorithme à pas fractionnaire, méthode de correction de pression.**

△ **Discrétisation spatiale sur grilles décalées (mais pas forcément structurées).**

Les méthodes décrites ici sont mise en œuvre dans le logiciel libre CALIF<sup>3</sup>S, fondé sur la librairie PELICANS.

---

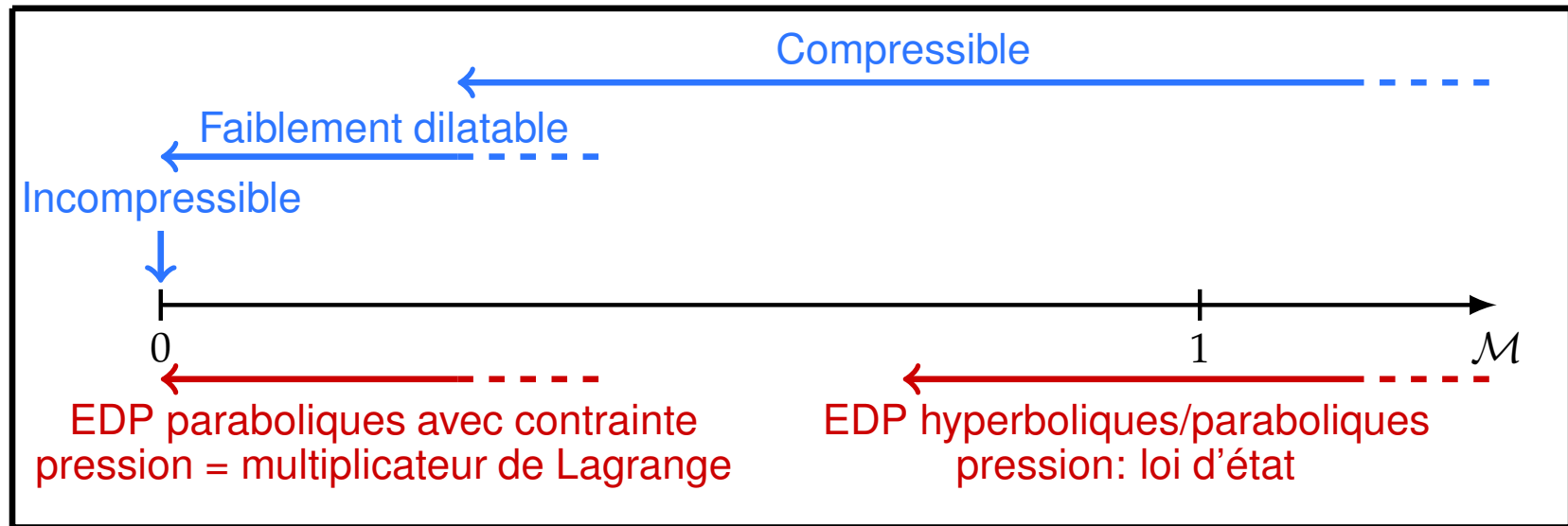
# Plan de l'exposé

---

- Schémas colocalisés VS schémas sur grilles décalées
  - Asymptotique bas Mach: le problème continu
  - Asymptotique bas Mach pour un schéma sur grilles décalées
  - Conclusion et perspectives
-

# Schémas précis à tout nombre de Mach

---



## Difficultés:

- Des méthodes numériques différentes pour des EDP différentes.
- Des contraintes de discrétisation différentes (oscillations de pression, CFL,...).

**But:** Concevoir des schémas numériques valables à tout nombre de Mach.

---

# Schémas colocalisés pour le compressible

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p(\rho) = 0.$$

## Avantages:

- Deux inconnues  $(\rho, \mathbf{u})$ : il est plus simple de les discrétiser au même endroit.
- Techniques de Volumes Finis classiques.
- Inégalités d'énergie cinétique et d'entropie discrètes faciles à démontrer.
- Relations de saut au niveau discret: les chocs sont approchés correctement.

## Difficultés: ( $\varepsilon =$ nombre de Mach)

- Vitesses de propagation :  $u - u/\varepsilon, u, u + u/\varepsilon$ .
- Si schéma explicite  $\implies$  schéma instable car CFL trop restrictive:  $\delta t \leq \varepsilon(\delta x + \delta x^2/\mu)$ .
- Perte de précision lorsque le nombre de Mach est petit:

$$\frac{1}{\delta t} ((\rho \mathbf{u})^{n+1} - (\rho \mathbf{u})^n) + \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_{\text{centré}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^n + \underbrace{\nabla p^n}_{\text{gradient centré}} + \underbrace{\frac{\delta x}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^n}_{\text{viscosité numérique}} = 0.$$

# Schémas sur grilles décalées pour l'incompressible

---

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

- Une seule inconnue  $\mathbf{u}$  et un multiplicateur de Lagrange  $p$  associé à la contrainte de divergence nulle.
- Les discrétisations sur grilles décalées permettent d'assurer une version discrète de la condition *inf-sup* :

$$\text{Il existe } \beta > 0 \text{ t.q. } \inf_{p \in L^2_0} \sup_{v \in H^1_0} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} v}{\|p\|_{L^2} \|v\|_{H^1_0}} \geq \beta.$$

Autrement dit, pour tout  $p \in L^2(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} p = 0$ , il existe  $v \in H^1_0$  tel que :

$$\frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} v}{\|v\|_{H^1_0}} \geq \beta \|p\|_{L^2}.$$

Donc si  $\nabla p \in H^{-1}$  alors  $\|p\|_{L^2} \leq \frac{1}{\beta} \|\nabla p\|_{H^{-1}}$ .

---

# Schémas sur grilles décalées pour l'incompressible

---

Or, au niveau discret, on peut donner un sens précis au calcul suivant:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0$$

$$\implies \left| \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \right| \leq \frac{1}{\delta t} (\|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}^*\|_{L^2}) \|\mathbf{v}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{H_0^1} + \mu \|\mathbf{u}\|_{H_0^1} \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}$$

$$\implies \left| \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \right| \leq C(\|\mathbf{u}\|, \frac{1}{\delta t}) \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}.$$

- Si on contrôle  $\|\mathbf{u}\|$  on peut contrôler  $\|\nabla p\|_{H^{-1}}$  et donc  $\|p\|_{L^2}$  grâce à la condition *inf-sup* discrète.
  - Les schémas sur grilles décalées sont naturellement stables pour l'incompressible.
  - **Difficulté:** Étendre ces schémas pour simuler des écoulements fortement compressibles.
-

# Schémas précis à tout nombre de Mach

---

**Stratégie usuelle:** Stabiliser les méthodes numériques pour les modèles compressibles (souvent colocalisées) dans le régime bas Mach:

- Préconditionnement.
- Implicitation des termes raides dus à l'acoustique.
- Terme de diffusion dans la conservation de la masse.
- Solveur de Godunov à flux numériques modifiés pour améliorer la précision.

**Stratégie adoptée:** Etendre aux modèles compressibles les méthodes numériques existantes pour les modèles incompressibles.

- Discrétisation spatiale sur **grilles décalées**  
Condition inf-sup discrète  $\implies$  stabilité de la pression
  - Discrétisation temporelle par **méthode de projection** adaptée au compressible.
  - Discrétisation hybride volumes finis / éléments finis.
-



# Equations de Navier-Stokes compressibles isentropiques

---

- Deux équations de bilan:

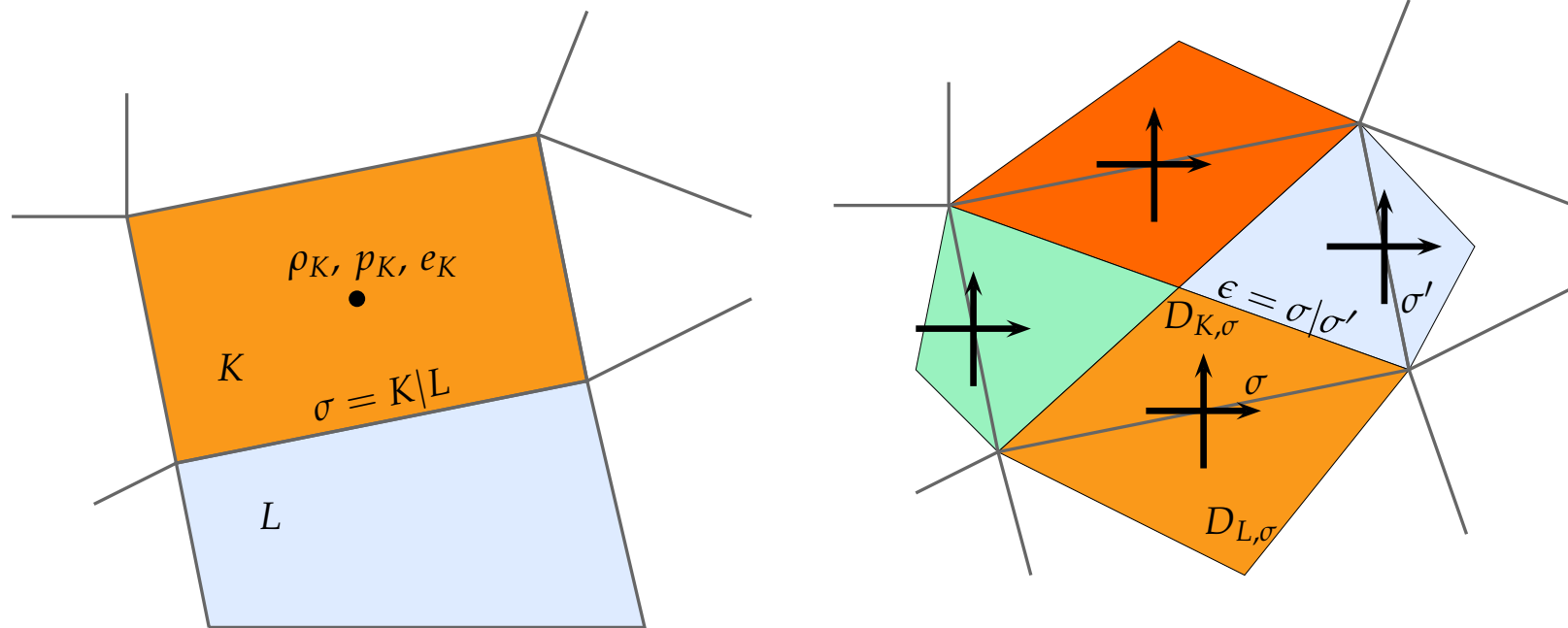
$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla \wp(\rho) = 0.$$

- On impose  $\mathbf{u} = 0$  on  $\partial\Omega$ .
  - Les schémas décrits ici s'étendent (plus ou moins douloureusement) à des situations plus générales:
    - Équations de Navier-Stokes compressibles avec énergie, modèle bas Mach de Majda-Sethian.
    - Équations d'évolution pour des espèces chimiques.
    - Modèle diphasique de Baer-Nunziato.
    - Autres conditions aux limites ...
-

# Discrétisation spatiale

---

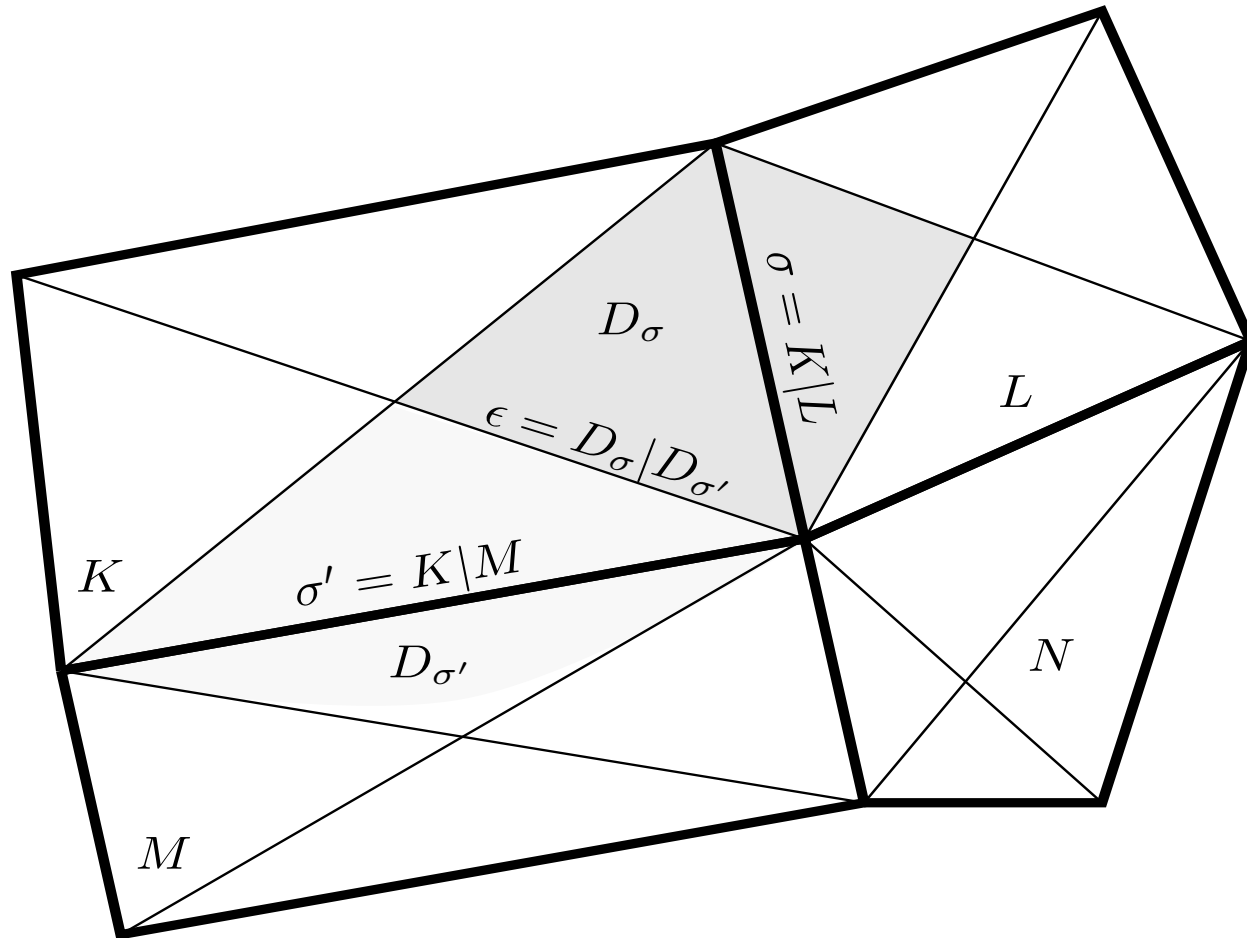


- Maillage primal :  $\mathcal{M} = \{\text{ensemble de volumes de contrôle } K\}$ .  $K$  quadrilatère convexe en 2D, hexaèdre convexe en 3D.
  - Variables scalaires aux centres des cellules du maillage primal:  $(\rho_K)_{K \in \mathcal{M}}, (p_K)_{K \in \mathcal{M}}$ .
  - Vitesse aux interfaces :  $(\mathbf{u}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ .
  - Maillage dual:  $\mathcal{D} = (D_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}} = \{\text{ensemble des mailles duales}\}$ .
-

# Discrétisation spatiale

---

Notations :



# Un schéma implicite

---

- **Conservation de la masse:** (Volumes Finis sur la maillage primal)

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

avec  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}$  et  $F_{K,\sigma} = |\sigma| \rho_\sigma^{\text{up}} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ ,

$\rho_\sigma^{\text{up}}$ : approximation *upwind* de  $\rho$  sur les faces  $\sigma$  de  $K$ .

- **Quantité de mouvement :** (Hybride VF/ EF sur le maillage dual )

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \right] + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\nabla p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

avec  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon$ ,

$\mathbf{u}_\epsilon$  approximation *upwind* ou *centrée* de  $\mathbf{u}$  sur les faces  $\epsilon$  de  $D_\sigma$ .

---

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

Soit  $T \in \mathbb{R}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  un domaine borné.

- Problème adimensionné: sur  $\Omega \times (0, T)$ :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla(\rho^\varepsilon)^\gamma = 0,$$

$\varepsilon = \text{nombre de Mach}$ ,  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) = \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon)$ .

- On impose  $\mathbf{u}^\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ .
- Données initiales « mal préparées »:

$$\|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\varepsilon} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

- Données initiales « bien préparées »:

$$\|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

---

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

Soit  $T \in \mathbb{R}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  un domaine borné.

- Problème adimensionné: sur  $\Omega \times (0, T)$ :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla(\rho^\varepsilon)^\gamma = 0,$$

**Formellement, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :**

- On suppose  $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho$  et  $\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$ .
- $\nabla \wp(\rho^\varepsilon) \rightarrow \nabla \wp(\rho) = 0 \quad \implies \quad \rho = \rho(t) \quad \xrightarrow{\text{CL}} \quad \rho = \text{cste} = 1.$
- A la limite, on obtient *formellement*:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \nabla p_0 = 0$$

avec  $p_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} ((\rho^\varepsilon)^\gamma - 1).$

---

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

## Pour les solutions faibles :

Principale difficulté : passage à la limite dans le terme non linéaire.

- Lions-Masmoudi '98:  $\Omega = \mathbb{T}^d$ .
- Desjardins-Grenier '99 :  $\Omega = \mathbb{R}^d$ .
- Desjardins-Grenier-Lions-Masmoudi '02 :  $\Omega$  borné et conditions de Dirichlet homogènes.
- Fereisl-Novotny '09: Navier-Stokes-Fourier avec énergie et lois de pression *ad hoc*.

## Pour les solutions fortes :

- Métivier - Schochet.
  - Hagstrom-Lorenz.
  - Gallagher.
  - Danchin.
  - Alazard.
-

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

## Estimations a priori:

- Énergie cinétique:

$$\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \quad \partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p^\varepsilon = 0,$$

$$\hookrightarrow \quad \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon |\mathbf{u}^\varepsilon|^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 \mathbf{u}^\varepsilon\right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p^\varepsilon \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0.$$

- Identité de renormalisation :

$$b'(\rho^\varepsilon) \times \quad \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\hookrightarrow \quad \partial_t b(\rho^\varepsilon) + \operatorname{div}(b(\rho^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon) + (\rho^\varepsilon b'(\rho^\varepsilon) - b(\rho^\varepsilon)) \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0.$$

On choisit  $b$  t.q.  $sb'(s) - b(s) = s^\gamma$ , i.e.:

$$b(s) = \begin{cases} s^\gamma / (\gamma - 1) & \text{si } \gamma > 1 \\ s \ln s & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$



# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

## Estimations a priori:

- Énergie cinétique et "énergie libre  $\Pi_\gamma$ ":

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\mathbf{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon + \operatorname{div}(f) = 0,$$
$$\hookrightarrow \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\mathbf{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma - 1) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon + \operatorname{div}(f) = 0.$$

Conservation de la masse :

$$-\frac{\gamma}{(\gamma-1)\varepsilon^2} \times \partial_t(\rho^\varepsilon - 1) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0.$$

On somme:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\mathbf{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\partial_t(\Pi_\gamma(\rho^\varepsilon)) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon + \operatorname{div}(g) = 0.$$

avec

$$\Pi_\gamma(s) = \begin{cases} s^\gamma - 1 - \gamma(s-1) & \text{si } \gamma > 1 \\ s \ln s - (s-1) & \text{si } \gamma = 1. \end{cases} \quad C_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} & \text{si } \gamma > 1 \\ 1 & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

---

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

## Estimations a priori:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho^\varepsilon |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 \right) + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \partial_t (\Pi_\gamma(\rho^\varepsilon)) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon + \operatorname{div}(g) = 0,$$

La fonction  $\Pi_\gamma$  satisfait:

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(\rho) &= \wp(\rho) - \wp(1) - \gamma \wp'(1)(\rho - 1) \\ &= |\rho - 1|^2 \gamma \int_0^1 (1 + s(\rho - 1))^{\gamma-2} (1 - s) ds. \end{aligned}$$

Intégration sur  $\Omega \times (0, t)$  + CL:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{2} \rho^\varepsilon(\cdot, t) |\mathbf{u}^\varepsilon(\cdot, t)|^2 dx + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \int_\Omega \Pi_\gamma(\rho^\varepsilon(\cdot, t)) dx + \mu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx dt \\ + (\lambda + \mu) \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon)^2 dx dt \leq \int_\Omega \frac{1}{2} \rho_0^\varepsilon |\mathbf{u}_0^\varepsilon|^2 dx + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \int_\Omega \Pi_\gamma(\rho_0^\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

---

# Asymptotique bas Mach: problème continu

---

## Estimations a priori: Quels arguments a-t-on utilisés ?

(i) Énergie cinétique:

$$\mathbf{u} \cdot \left[ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] \geq \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right).$$

(ii) Identité de renormalisation : (pour  $b$  convexe)

$$b'(\rho) \times \left[ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] \geq \partial_t b(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho) \mathbf{u}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho)) \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

(iii) Dualité Gradient-Divergence

$$\nabla p \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(p \mathbf{u}).$$

(iv) Conservativité globale:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \implies \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi \mathbf{u}) \, dx = 0.$$

(v) Coercivité du terme de diffusion:

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} \, dx \geq C \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 \, dx.$$

---

# Un schéma implicite

---

- **Conservation de la masse:** (Volumes Finis sur le maillage primal)

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

avec  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}$  et  $F_{K,\sigma} = |\sigma| \rho_\sigma^{\text{up}} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ ,

$\rho_\sigma^{\text{up}}$ : approximation *upwind* de  $\rho$  sur les faces  $\sigma$  de  $K$ .

- **Quantité de mouvement :** (Hybride VF/ EF sur le maillage dual )

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \right] + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\nabla p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

avec  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon$ ,

$\mathbf{u}_\epsilon$  approximation *upwind* ou *centrée* de  $\mathbf{u}$  sur les faces  $\epsilon$  de  $D_\sigma$ .

---

# Identité de renormalisation discrète

---

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \rho_\sigma^{\text{up}} = 0.$$

**On suppose que :**

- Les masses volumiques  $\rho_K$  et  $\rho_K^*$  sont **positives**
- la fonction  $b$  est **convexe**
- $\rho_\sigma^{\text{up}}$  est une approximation **upwind** de  $\rho$  sur  $\sigma$ .

**Alors :** après multiplication par  $b'(\rho_K)$  on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{\delta t} (b(\rho_K) - b(\rho_K^*)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} b(\rho_\sigma^{\text{up}}) \\ + (\rho_K b'(\rho_K) + b(\rho_K)) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + R_K = 0. \end{aligned}$$

avec  $R_K \geq 0$ .

---

# Dualité $\nabla$ – div discrète

---

Divergence discrète:

$$(\operatorname{div} u)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

La dualité  $\nabla$  – div attendue **impose** que :

$$\text{pour } \sigma = K|L, \quad (\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

On obtient, pour toutes données discrètes  $(p_K)_{K \in \mathcal{M}}$ ,  $(\mathbf{u}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K (\operatorname{div} u)_K &= \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (\nabla p)_\sigma. \end{aligned}$$

---

# Energie cinétique discrète :

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

↓

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$



# Energie cinétique discrète :

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

↓

$$\mathbf{u} \cdot \left\{ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0. \right\}$$





# Energie cinétique discrète :

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left( \partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$



## Energie cinétique discrète :

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left( \partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$\partial_t \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée **deux fois**.
-

# Energie cinétique discrète :

---

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = 0.$$

$$\rho \left( \partial_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$$\partial_t \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée **deux fois**.
- Les deux équations **ne sont pas discrétisées sur le même maillage !**

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\epsilon - (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

---

# Energie cinétique discrète :

---

## Théorème (Herbin, Kheriji, Latché) :

- **Supposons** un bilan de masse vérifié sur les cellules du maillage dual :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

avec  $\rho_\sigma > 0$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ .

- **Alors** une équation locale d'énergie cinétique discrète est vérifiée sur ce maillage :

$$\frac{1}{2\delta t} (\rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma|^2 - \rho_\sigma^* |\mathbf{u}_\sigma^*|^2) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\epsilon} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{u}_{\sigma'} - (\text{div } \boldsymbol{\tau})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma + (\nabla p)_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma \leq 0.$$



# Energie cinétique discrète :

---

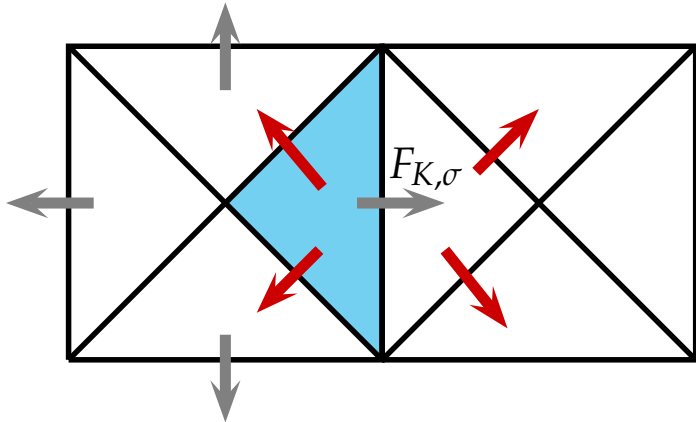
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



# Energie cinétique discrète :

---

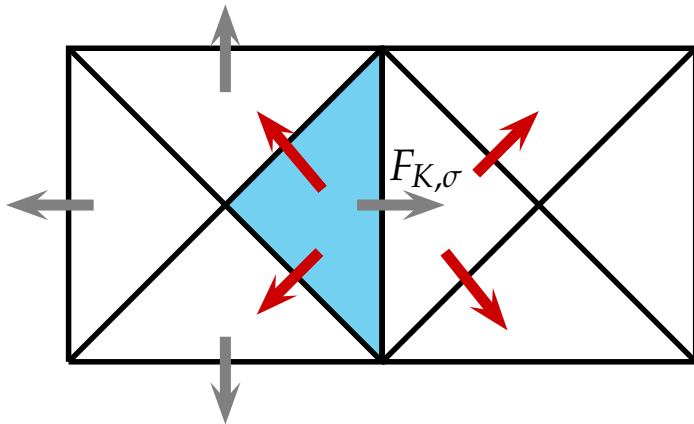
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit  $w$  tel que  $\text{div} w = cste$  et pour toute face  $\sigma$  de  $K$ :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors :  $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

---

# Energie cinétique discrète :

---

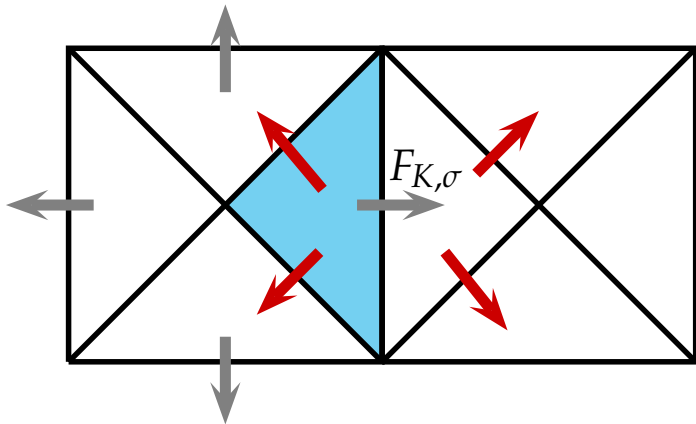
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit  $w$  tel que  $\text{div} w = cste$  et pour toute face  $\sigma$  de  $K$ :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors :  $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_{K,\sigma}) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} &= \int_{\partial D_{K,\sigma}} w \cdot n = \int_{D_{K,\sigma}} \text{div} w = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \text{div} w = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} w \cdot n \\ &= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) \end{aligned}$$


---

# Energie cinétique discrète :

---

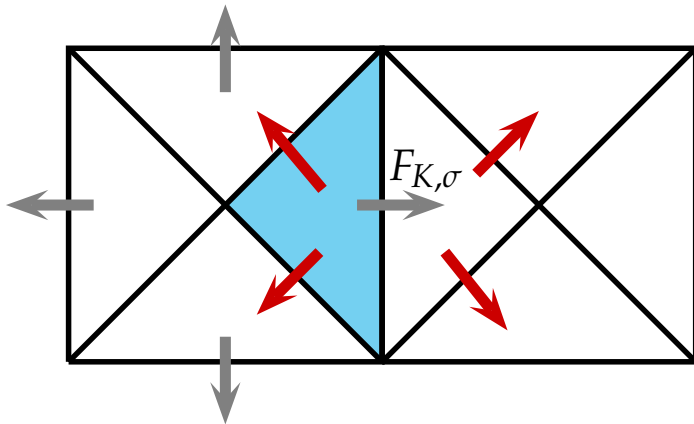
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit  $w$  tel que  $\text{div} w = cste$  et pour toute face  $\sigma$  de  $K$ :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors :  $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

---



# Energie cinétique discrète :

---

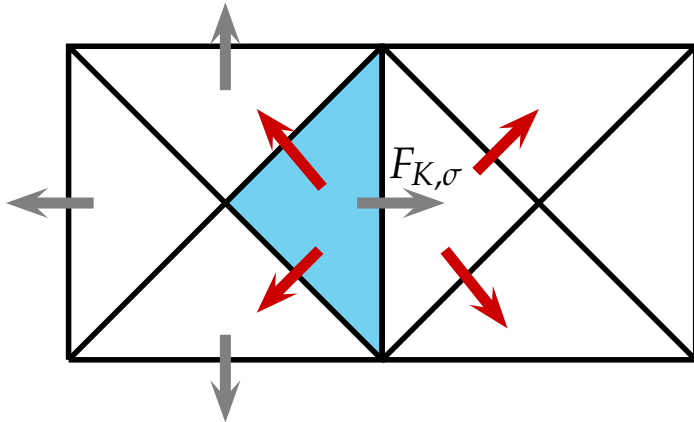
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit  $w$  tel que  $\text{div} w = cste$  et pour toute face  $\sigma$  de  $K$ :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors :  $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{|D_{L,\sigma}|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + F_{L,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset L}} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$


---

# Energie cinétique discrète :

---

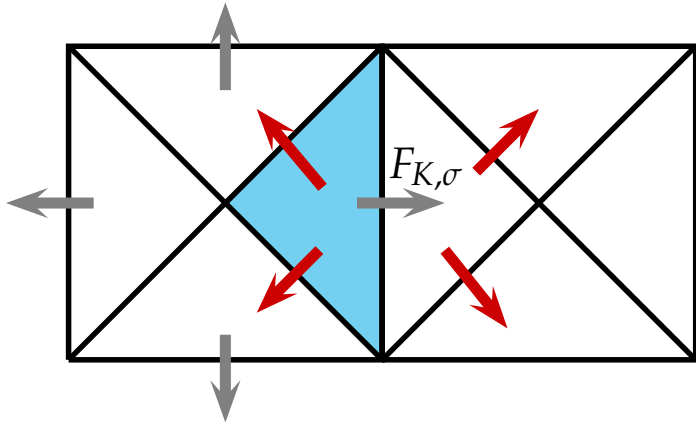
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t} (\rho_L - \rho_L^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit  $w$  tel que  $\text{div} w = cste$  et pour toute face  $\sigma$  de  $K$ :

$$\int_{\sigma} w \cdot n_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \quad (\text{relèvement des flux}).$$

On définit alors :  $F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\epsilon} w \cdot n_{\sigma,\epsilon} .$

$$\frac{1}{\delta t} \left( \underbrace{|D_{K,\sigma}| \rho_K + |D_{L,\sigma}| \rho_L}_{=: |D_\sigma| \rho_\sigma} - |D_{K,\sigma}| \rho_K^* - |D_{L,\sigma}| \rho_L^* \right) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

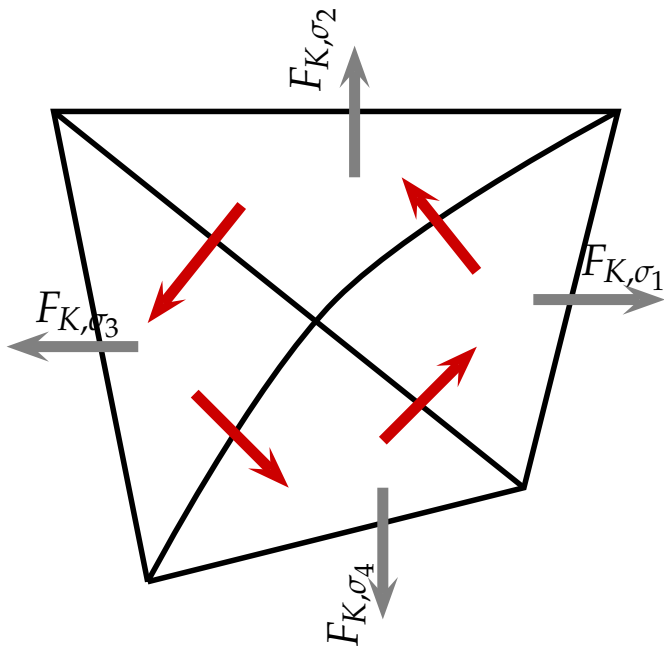
# Energie cinétique discrète :

---

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\partial D_{K,\sigma}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \int_{D_{K,\sigma}} \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$$

$$= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t} (\rho_K - \rho_K^*)$$

avec  $\zeta_K^\sigma = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}$  indépendant de  $K$  et  $\sigma$ .



On résout le système linéaire :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \zeta_K^\sigma \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(K).$$

# Autres propriétés du schéma

---

- **Coercivité du terme de diffusion :**

Éléments finis de Rannacher-Turek:

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma \geq C \|\mathbf{u}\|_{1,d}^2.$$

- **Condition *inf-sup* discrète :** (via un opérateur de Fortin)

$$\inf_{p=(p_K)} \sup_{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_\sigma)} \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K (\operatorname{div} \mathbf{u})_K}{\|p\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,d}} \geq \beta.$$



# Asymptotique bas Mach

---

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + |K|^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \right] + |D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} \mathbf{u}_\epsilon^{n+1} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + \frac{1}{\epsilon^2} (\nabla p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

**Théorème :** *On suppose que les conditions initiales sont mal préparées. Alors à maillage fixé, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ :*

- $\rho_\epsilon \rightarrow 1$  comme  $\epsilon$  en norme  $L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$  pour tout  $q \in [1, \min(2, \gamma)]$ .
  - $\sqrt{\rho^\epsilon} \mathbf{u}^\epsilon$  est borné dans  $L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d)$  et  $\mathbf{u}^\epsilon$  est borné dans  $L^2((0, T); H_d^1(\Omega)^d)$ .
  - $\|\delta p^\epsilon\|_{L^2} := \left\| \frac{1}{\epsilon^2} (p^\epsilon - |\Omega|^{-1} \int_\Omega p^\epsilon \, dx) \right\|_{L^2} \leq C / \delta t$ .
-

# Asymptotique bas Mach

---

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + |K|^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^n \right] + |D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} \mathbf{u}_\epsilon^{n+1} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + \frac{1}{\epsilon^2} (\nabla p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

**Théorème :** *On suppose que les conditions initiales sont mal préparées. Alors à maillage fixé, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ :*

- $\rho_\epsilon \rightarrow 1$  comme  $\epsilon$  en norme  $L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$  pour tout  $q \in [1, \min(2, \gamma)]$ .
- $\sqrt{\rho^\epsilon} \mathbf{u}^\epsilon$  est borné dans  $L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d)$  et  $\mathbf{u}^\epsilon$  est borné dans  $L^2((0, T); H_d^1(\Omega)^d)$ .
- $\|\delta p^\epsilon\|_{L^2} := \left\| \frac{1}{\epsilon^2} (p^\epsilon - |\Omega|^{-1} \int_\Omega p^\epsilon \, dx) \right\|_{L^2} \leq C / \delta t$ .

*Pour toute sous-suite de  $(\mathbf{u}^\epsilon, \delta p^\epsilon)$  qui converge vers  $(\mathbf{u}, \pi)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , alors  $(\mathbf{u}, \pi)$  est solution d'un schéma implicite **stable** pour Navier-Stokes incompressible:*

$$|K|^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + |D_\sigma|^{-1} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} \mathbf{u}_\epsilon^{n+1} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\nabla \pi)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

---

# Asymptotique bas Mach

---

## Estimations a priori discrètes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_\sigma^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \sum_{k=1}^n \delta t \|\mathbf{u}^k\|_{1,d}^2 + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \Pi_\gamma(\rho_K^n) \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_\sigma^0 |\mathbf{u}_\sigma^0|^2 + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \Pi_\gamma(\rho_K^0). \end{aligned}$$

Par hypothèse sur  $\rho^0$  on a  $\frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \Pi_\gamma(\rho_K^0) \leq C$ .

On en déduit que:

- $\rho_\varepsilon \rightarrow 1$  comme  $\varepsilon$  en norme  $L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$  pour tout  $q \in [1, \min(2, \gamma)]$ .
- $\sqrt{\rho^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d)$  et  $\mathbf{u}^\varepsilon$  est borné dans  $L^2((0, T); H_d^1(\Omega)^d)$ .
- De l'équation de qdm, on obtient :

$$\|\nabla(\delta p^\varepsilon)\|_{H^{-1}} \leq C/\delta t \quad \text{avec} \quad \delta p^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} \left( p^\varepsilon - |\Omega|^{-1} \int_\Omega p^\varepsilon \, dx \right).$$

- Par la condition *inf-sup* discrète, on obtient  $\|\delta p^\varepsilon\|_{L^2} \leq C/\delta t$ .
-

# Asymptotique bas Mach

---

- Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (maillage fixé  $\Rightarrow$  dimension finie): il existe une sous-suite de  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \delta p^\varepsilon)$  qui converge vers  $(\mathbf{u}, \pi)$  et en passant à la limite dans le schéma, on obtient:

$$\operatorname{div} (\mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \operatorname{div} (\mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\nabla \pi)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

- Si la solution de ce système est unique, c'est toute la suite qui converge.
- Le sous-système suivant est régulier (il existe une solution):

*Trouver  $\mathbf{u}^{n+1}$  tel que:*

$$\mathbf{v} \cdot \left[ \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \operatorname{div} (\mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} \right], \quad \forall \mathbf{v} \text{ t.q. } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

On peut donc remplacer la vitesse initiale  $\mathbf{u}_0$  par sa projection  $L^2$  sur l'espace des fonctions à divergence nulle.

---



# Un schéma de correction de pression

---

- **Re-scaling du gradient de pression:**

$$(\overline{\nabla p})_\sigma^n = \left( \frac{\rho_\sigma^n}{\rho_\sigma^{n-1}} \right)^{1/2} (\nabla p)_\sigma^n, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

- **Étape de prédiction :** Résoudre en  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ :

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n \right] + \text{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_\sigma + (\text{div } \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma + (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

- **Étape de correction:** Résoudre en  $p^{n+1}$ ,  $\rho^{n+1}$  et  $\mathbf{u}^{n+1}$ :

$$\frac{1}{\delta t} \rho_\sigma^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + (\nabla p)_\sigma^{n+1} - (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$p_K^{n+1} = (\rho_K^{n+1})^\gamma, \quad K \in \mathcal{M}.$$

Stabilité inconditionnelle et asymptotique bas Mach similaire au cas implicite.

**Difficulté:** établir l'inégalité d'énergie cinétique discrète.

---

# Un schéma aussi explicite que possible

---

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} \left[ \rho_\sigma^n \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n \right] + \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma + (\nabla p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

$$p_K^{n+1} = (\rho_K^{n+1})^\gamma, \quad K \in \mathcal{M}.$$

- En combinant les deux équations, on obtient un problème elliptique sur la pression, comme pour le schéma de correction de pression.

↪ schéma potentiellement efficace pour les problèmes faiblement visqueux (LES).

- **Difficulté:** stabilité avec un opérateur de convection explicite dans la qdm ?

On peut démontrer l'existence d'une équation d'énergie cinétique discrète avec un terme de reste positif si:

- La diffusion numérique est suffisante (upwinding)
  - Sous une condition CFL.
-

# Conclusion et perspectives

---

**Conclusion :** (comparaison avec les méthodes colocalisées)

- La preuve fonctionne pour  $\mu = 0 \implies$  schéma AP pour Euler.
- Stabilisation en temps lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ :
  - Implicitation de l'acoustique : Liou '98 (AUSM), Degond '11, Chalons '14 (Splitting), Zakerzadeh '15, Dimarco...
  - Méthode de correction de pression: Schémas sur grilles décalées *mais aussi* schémas colocalisés (Thèse de Chady Zaza).
- Correction de la précision lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  sur maillage colocalisé: (Dellacherie '10)

$$(\nabla p)_j = \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2\delta x} - \kappa(\varepsilon) \frac{c_j}{2\delta x} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad c_j \approx \frac{u_j}{\varepsilon}.$$

En prenant  $\kappa(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , la viscosité numérique est alors en  $\mathcal{O}\left(\kappa(\varepsilon) \frac{\delta x}{\varepsilon}\right) = \mathcal{O}(\delta x)$ .

**Perspectives :**

- Tests numériques.
  - Asymptotique vers le modèle de Majda-Sethian.
  - Limite bas Mach pour le modèle de Navier-Stokes-Fourier complet avec énergie et diffusion thermique.
-

---

**Merci de votre attention.**

---