

Dynamique de Glauber de la percolation FK et nouvelle borne sur le point critique pour $q < 1$

Corentin Faipeur

travail commun avec Vincent Beffara et Tejas Oke

Les probabilités de demain, 4 février 2025



Modèle de percolation FK

- Introduit par Fortuin et Kasteleyn en 1972.
- $(\Lambda, E(\Lambda))$ un graphe fini, $p \in [0, 1]$, $q > 0$.
- Mesure de proba sur $\Omega = \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$

Modèle de percolation FK

- Introduit par Fortuin et Kasteleyn en 1972.
- $(\Lambda, E(\Lambda))$ un graphe fini, $p \in [0, 1]$, $q > 0$.
- Mesure de proba sur $\Omega = \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$: pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\phi_{\Lambda, p, q}(\omega) \propto \prod_{e \in E(\Lambda)} p^{\omega_e} (1 - p)^{1 - \omega_e}$$

Modèle de percolation FK

- Introduit par Fortuin et Kasteleyn en 1972.
- $(\Lambda, E(\Lambda))$ un graphe fini, $p \in [0, 1]$, $q > 0$.
- Mesure de proba sur $\Omega = \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$: pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\phi_{\Lambda, p, q}(\omega) \propto q^{k(\omega)} \prod_{e \in E(\Lambda)} p^{\omega_e} (1-p)^{1-\omega_e}$$

où $k(\omega) =$ nombre de **clusters** dans ω .

Modèle de percolation FK

- Introduit par Fortuin et Kasteleyn en 1972.
- $(\Lambda, E(\Lambda))$ un graphe fini, $p \in [0, 1]$, $q > 0$.
- Mesure de proba sur $\Omega = \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$: pour tout $\omega \in \Omega$,

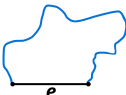
$$\phi_{\Lambda, p, q}^{\xi}(\omega) \propto q^{k(\omega, \xi)} \prod_{e \in E(\Lambda)} p^{\omega_e} (1 - p)^{1 - \omega_e}$$

où $k(\omega, \xi) =$ nombre de **clusters** dans $\omega \cup \xi$.

- On ajoute une condition au bord ξ .

Loi conditionnelle

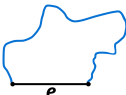
- Pour toute arête $e \in E(\Lambda)$,

$$\phi_{\Lambda,p,q}^{\xi}(\omega_e = 1 \mid \omega|_{E(\Lambda)\setminus\{e\}}) = \begin{cases} p & \text{si} \\ \frac{p}{p + (1-p)q} =: p' & \text{sinon} \end{cases}$$


NB : $q < 1 \iff p < p'$.

Loi conditionnelle et inégalités de comparaison

- Pour toute arête $e \in E(\Lambda)$,

$$\phi_{\Lambda,p,q}^{\xi}(\omega_e = 1 \mid \omega|_{E(\Lambda)\setminus\{e\}}) = \begin{cases} p & \text{si} \\ \frac{p}{p + (1-p)q} =: p' & \text{sinon} \end{cases}$$


NB : $q < 1 \iff p < p'$.

- Encadrement stochastique :

$$\bigotimes_{e \in E(\Lambda)} \mathcal{B}(\min(p, p')) \preceq \phi_{\Lambda,p,q}^{\xi} \preceq \bigotimes_{e \in E(\Lambda)} \mathcal{B}(\max(p, p'))$$

Mesures en volume infini

But : définir une mesure FK sur \mathbf{Z}^d .

2 manières classiques de procéder :

Mesures en volume infini

But : définir une mesure FK sur \mathbf{Z}^d .

2 manières classiques de procéder :

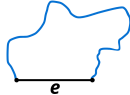
- 1 On prend des limites faibles de $\phi_{\Lambda_n, p, q}^\xi$ pour $\Lambda_n \uparrow \mathbf{Z}^d$.

Mesures en volume infini

But : définir une mesure FK sur \mathbf{Z}^d .

2 manières classiques de procéder :

- 1 On prend des limites faibles de $\phi_{\Lambda_n, p, q}^\xi$ pour $\Lambda_n \uparrow \mathbf{Z}^d$.
- 2 Equations DLR : une proba ϕ sur $\{0, 1\}^{E(\mathbf{Z}^d)}$ est une FK-mesure de Gibbs si pour tout $e \in E$,

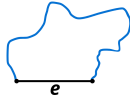
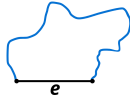
$$\phi(\omega_e = 1 \mid \omega|_{E(\mathbf{Z}^d) \setminus \{e\}}) = \begin{cases} p & \text{si } \img alt="Diagram of a blue irregular shape with a horizontal edge labeled 'e'." data-bbox="688 538 821 668"/>
 
 e
 p
 p' & \text{sinon} \end{cases}$$

Mesures en volume infini

But : définir une mesure FK sur \mathbf{Z}^d .

2 manières classiques de procéder :

- 1 On prend des limites faibles de $\phi_{\Lambda_n, p, q}^\xi$ pour $\Lambda_n \uparrow \mathbf{Z}^d$.
- 2 Equations DLR : une proba ϕ sur $\{0, 1\}^{E(\mathbf{Z}^d)}$ est une FK-mesure de Gibbs si pour tout $e \in E$,

$$\phi(\omega_e = 1 \mid \omega|_{E(\mathbf{Z}^d) \setminus \{e\}}) = \begin{cases} p & \text{si } \img alt="Diagram of a blue irregular shape with a horizontal edge labeled 'e'." data-bbox="688 538 821 668"/>
 
 p si 
 p' sinon$$

On note $\text{FK}(p, q)$ l'ensemble des mesures sur $\{0, 1\}^{E(\mathbf{Z}^d)}$ obtenue par une ces manières.

Deux questions

- 1 Pour quels p et q a-t-on une unique mesure en volume infini, i.e. $|\text{FK}(p, q)| = 1$?

Deux questions

- 1 Pour quels p et q a-t-on une unique mesure en volume infini, i.e. $|\text{FK}(p, q)| = 1$?
- 2 Pour quels p et q a-t-on un cluster infini ?

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

- si $p < p_c(q)$, pas de cluster infini p.s. + unicité de la mesure

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

- si $p < p_c(q)$, pas de cluster infini p.s. + unicité de la mesure
- si $p > p_c(q)$, il y a p.s. un cluster infini + unicité de la mesure... vrai en 2D, en 3D ??

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

- si $p < p_c(q)$, pas de cluster infini p.s. + unicité de la mesure
- si $p > p_c(q)$, il y a p.s. un cluster infini + unicité de la mesure... vrai en 2D, en 3D ??

Sur \mathbf{Z}^2 , on a même :

- $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ [BD12]

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

- si $p < p_c(q)$, pas de cluster infini p.s. + unicité de la mesure
- si $p > p_c(q)$, il y a p.s. un cluster infini + unicité de la mesure... vrai en 2D, en 3D ??

Sur \mathbf{Z}^2 , on a même :

- $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ [BD12]
- unicité à $p = p_c(q)$ pour $q \in [1, 4]$ [DST17]

Transition de phase pour $q \geq 1$

Pour $q \geq 1$, on sait répondre grâce aux inégalités FKG.

Il existe $p_c(q) \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$

- si $p < p_c(q)$, pas de cluster infini p.s. + unicité de la mesure
- si $p > p_c(q)$, il y a p.s. un cluster infini + unicité de la mesure... vrai en 2D, en 3D ??

Sur \mathbf{Z}^2 , on a même :

- $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ [BD12]
- unicité à $p = p_c(q)$ pour $q \in [1, 4]$ [DST17]
- non-unicité à $p = p_c(q)$ pour $q > 4$ [DGHMT21]

Et pour $q < 1$?

Pour $q < 1$, FKG n'est plus valide !

Pour toute mesure $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$,

$$\bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p) \preceq \phi_{p,q} \preceq \bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p')$$

Et pour $q < 1$?

Pour $q < 1$, FKG n'est plus valide !

Pour toute mesure $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$,

$$\bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p) \preceq \phi_{p,q} \preceq \bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p')$$

- si $p' < p_c(\mathbf{Z}^d) = p_c(1)$, le modèle est sous-critique + unicité de la mesure

Et pour $q < 1$?

Pour $q < 1$, FKG n'est plus valide !

Pour toute mesure $\phi_{p,q} \in \text{FK}(p, q)$,

$$\bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p) \preceq \phi_{p,q} \preceq \bigotimes_{e \in E(\mathbf{Z}^d)} \mathcal{B}(p')$$

- si $p' < p_c(\mathbf{Z}^d) = p_c(1)$, le modèle est sous-critique + unicité de la mesure
- si $p > p_c(\mathbf{Z}^d)$, le modèle est sur-critique (+ unicité de la mesure uniquement en 2D)

Inégalité de comparaison améliorée

Théorème ([BFO25])

Sur \mathbf{Z}^d , $d \geq 2$, pour tout $p \in (0, 1)$ et $q < 1$, il existe \tilde{E} et \hat{E} deux sous-ensembles d'arêtes de densité positive et $\hat{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} > 0$ tels que

$$\bigotimes_{e \in E} \mathcal{B}(p + \tilde{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{e \in \hat{E}\}}) \preceq \phi_{p,q} \preceq \bigotimes_{e \in E} \mathcal{B}(p' - \tilde{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{e \in \tilde{E}\}})$$

Inégalité de comparaison améliorée

Théorème ([BFO25])

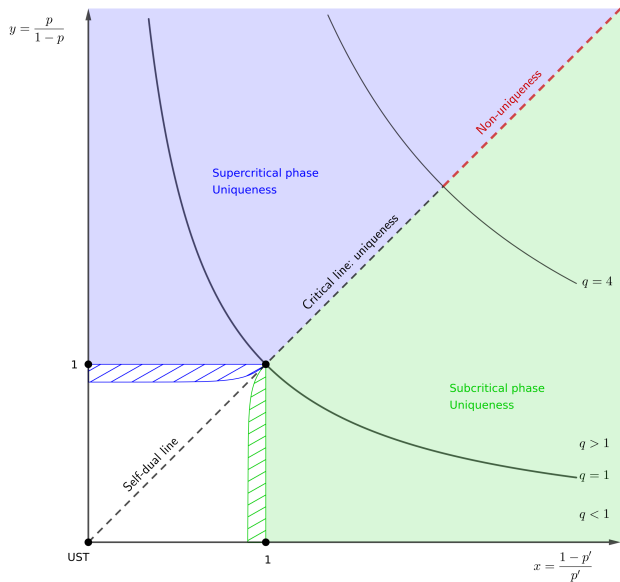
Sur \mathbf{Z}^d , $d \geq 2$, pour tout $p \in (0, 1)$ et $q < 1$, il existe \tilde{E} et \hat{E} deux sous-ensembles d'arêtes de densité positive et $\hat{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} > 0$ tels que

$$\bigotimes_{e \in E} \mathcal{B}(p + \tilde{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{e \in \hat{E}\}}) \preceq \phi_{p,q} \preceq \bigotimes_{e \in E} \mathcal{B}(p' - \tilde{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{e \in \tilde{E}\}})$$

- si $p' < p_c(\mathbf{Z}^d) + \tilde{\delta}$, le modèle est sous-critique + unicité de la mesure en volume infini
- si $p > p_c(\mathbf{Z}^d) - \hat{\delta}$, le modèle est sur-critique (+ unicité de la mesure uniquement en 2D)

Grâce à la théorie des “essential enhancements” [AG91].

Portrait de phase en 2D



Dynamique de Glauber de la percolation FK

- $X_0 = \omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$
- Au temps t , MAJ de l'arête e :

$$X_t(e') = X_{t-}(e') \quad \forall e' \neq e \text{ et}$$

$$X_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t \leq p \text{ et } \text{diagram 1} \\ 1 & \text{si } U_t \leq p' \text{ et } \text{diagram 2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

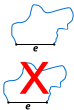
The diagrams are blue irregular shapes representing clusters. The first diagram shows an edge e at the bottom with a small dot above it. The second diagram shows the same shape but with a red 'X' over the edge e .

- Loi invariante : $\phi_{\Lambda, p, q}^{\xi}$

Couplage avec une mesure produit

- $X_0 = \omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$
- Au temps t , MAJ de l'arête e :

$$X_t(e') = X_{t-}(e') \quad \forall e' \neq e \text{ et}$$

$$X_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t \leq p \text{ et } \text{image} \\ 1 & \text{si } U_t \leq p' \text{ et } \text{image} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


- Loi invariante : $\phi_{\Lambda, p, q}^\xi$

- $Y_0 = \omega$
- Au temps t , MAJ de l'arête e :

$$Y_t(e') = Y_{t-}(e') \quad \forall e' \neq e \text{ et}$$

$$Y_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t \leq p' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Loi invariante : $\bigotimes_{e \in E(\Lambda)} \mathcal{B}(p')$

Couplage avec une mesure produit

- $X_0 = \omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$
- Au temps t , MAJ de l'arête e :

$$X_t(e') = X_{t-}(e') \quad \forall e' \neq e \text{ et}$$

$$X_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t \leq p \text{ et } \text{arête ouverte} \\ 1 & \text{si } U_t \leq p' \text{ et } \text{arête fermée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Loi invariante : $\phi_{\Lambda, p, q}^\xi$

- $Y_0 = \omega$
- Au temps t , MAJ de l'arête e :

$$Y_t(e') = Y_{t-}(e') \quad \forall e' \neq e \text{ et}$$

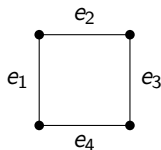
$$Y_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t \leq p' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Loi invariante : $\bigotimes_{e \in E(\Lambda)} \mathcal{B}(p')$

Pour tout t on a $X_t \leq Y_t$, donc on retrouve $\phi_{\Lambda, p, q}^\xi \preceq \bigotimes_{e \in E(\Lambda)} \mathcal{B}(p')$.

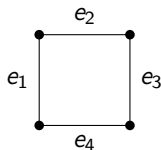
Couplage plus malin avec une mesure produit

- Au temps t , MAJ du **motif**



Couplage plus malin avec une mesure produit

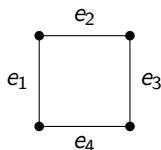
- Au temps t , MAJ du **motif**



- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .

Couplage plus malin avec une mesure produit

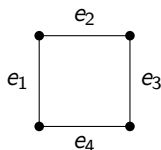
- Au temps t , MAJ du **motif**




- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .
- ▶ MAJ standard de e_4 avec U_4 dans X_t , **MAJ améliorée** dans Y_t :

Couplage plus malin avec une mesure produit

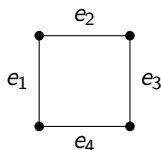
- Au temps t , MAJ du **motif**




- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .
- ▶ MAJ standard de e_4 avec U_4 dans X_t , **MAJ améliorée** dans Y_t :
 - si $U_1, U_2, U_3 \leq p$, alors on sait que  est satisfait dans X_t , et que donc e_4 sera ouverte ssi $U_4 \leq p$

Couplage plus malin avec une mesure produit

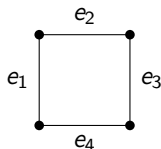
- Au temps t , MAJ du **motif**




- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .
 - ▶ MAJ standard de e_4 avec U_4 dans X_t , **MAJ améliorée** dans Y_t :
 - si $U_1, U_2, U_3 \leq p$, alors on sait que  est satisfait dans X_t , et que donc e_4 sera ouverte ssi $U_4 \leq p$
- \implies on peut faire $Y_t(e_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_4 \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en conservant $X_t \leq Y_t$.

Couplage plus malin avec une mesure produit

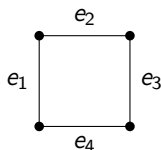
- Au temps t , MAJ du **motif**




- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .
- ▶ MAJ standard de e_4 avec U_4 dans X_t , **MAJ améliorée** dans Y_t :
 - si $U_1, U_2, U_3 \leq p$, alors on sait que  est satisfait dans X_t , et que donc e_4 sera ouverte ssi $U_4 \leq p$
 - \implies on peut faire $Y_t(e_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_4 \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en conservant $X_t \leq Y_t$.
 - sinon, MAJ standard de e_4

Couplage plus malin avec une mesure produit

- Au temps t , MAJ du **motif**



- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_1, U_2, U_3 dans X_t et Y_t .
- ▶ MAJ standard de e_4 avec U_4 dans X_t , **MAJ améliorée** dans Y_t :
 - si $U_1, U_2, U_3 \leq p$, alors on sait que  est satisfait dans X_t , et que donc e_4 sera ouverte ssi $U_4 \leq p$
 - \implies on peut faire $Y_t(e_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_4 \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en conservant $X_t \leq Y_t$.
 - sinon, MAJ standard de e_4
- ▶ MAJ standard de e_1, e_2, e_3 avec U_5, U_6, U_7 dans X_t et Y_t pour récupérer l'indépendance des $Y_t(e_i)$.

Inégalité de comparaison améliorée $q < 1$

Loi invariante de (X_t) : toujours $\phi_{\Lambda, p, q}^{\xi}$.

Loi invariante de (Y_t) :

$$\bigotimes_{e \in E_1, E_2, E_3} \mathcal{B}(p') \quad \bigotimes_{e \in E_4} \underbrace{\mathcal{B}(p \cdot p^3 + p'(1 - p^3))}_{= p' - \varepsilon}.$$

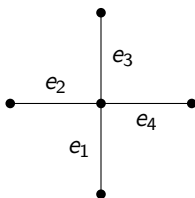
Inégalité de comparaison améliorée $q < 1$

Loi invariante de (X_t) : toujours $\phi_{\Lambda, p, q}^{\xi}$.

Loi invariante de (Y_t) :

$$\bigotimes_{e \in E_1, E_2, E_3} \mathcal{B}(p') \quad \bigotimes_{e \in E_4} \underbrace{\mathcal{B}(p \cdot p^3 + p'(1 - p^3))}_{= p' - \varepsilon}.$$

Pour la domination par en-dessous, même chose avec le motif



Merci pour votre attention !!

- [AG91] Michael Aizenman and Geoffrey Grimmett. “Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models”. In: *Journal of Statistical Physics* 63.5–6 (June 1991), pp. 817–835.
- [BD12] Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin. “The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ ”. In: *Probab. Theory Related Fields* 153.3-4 (2012), pp. 511–542.
- [BFO25] Vincent Beffara, Corentin Faupéur, and Tejas Oke. *A new bound for the critical point of the FK model for $q < 1$* . 2025. arXiv: 2512.16486 [math.PR].
- [DGHMT21] Hugo Duminil-Copin, Maxime Gagnebin, Matan Harel, Ioan Manolescu, and Vincent Tassion. “Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with $q > 4$ ”. In: *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 54.6 (2021), pp. 1363–1413.
- [DST17] Hugo Duminil-Copin, Vladas Sidoravicius, and Vincent Tassion. “Continuity of the phase transition for planar random-cluster and Potts models with $1 \leq q \leq 4$ ”. In: *Comm. Math. Phys.* 349.1 (2017), pp. 47–107.