

Criticité auto-organisée, modèle de tas de sable et problèmes de forme limite

Les probabilités de demain

Mécanique statistique discrète et continue

Institut Henri Poincaré

Théo Ballu

LAREMA, Université d'Angers

4 février 2026

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

Criticité auto-organisée

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (transition de phase)

- Soit $p \in]0, 1[$. Dans $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), on place une arête entre deux plus proches voisins avec probabilité p , indépendamment les unes des autres.

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (transition de phase)

- Soit $p \in]0, 1[$. Dans $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), on place une arête entre deux plus proches voisins avec probabilité p , indépendamment les unes des autres.
- On note $\mathcal{C}_0$ la composante connexe de 0 dans le graphe obtenu.

Théorème

Il existe $p_c(d) \in]0, 1[$ tel que :

- $\forall p \in]0, p_c(d)[, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| = +\infty) = 0$ (phase sous-critique),
- $\forall p \in]p_c(d), 1[, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| = +\infty) > 0$ (phase sur-critique).

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (transition de phase)

- Soit $p \in]0, 1[$. Dans $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), on place une arête entre deux plus proches voisins avec probabilité p , indépendamment les unes des autres.
- On note $\mathcal{C}_0$ la composante connexe de 0 dans le graphe obtenu.

Théorème

Il existe $p_c(d) \in]0, 1[$ tel que :

- $\forall p \in]0, p_c(d)[, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| = +\infty) = 0$ (phase sous-critique),
 - $\forall p \in]p_c(d), 1[, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| = +\infty) > 0$ (phase sur-critique).
- On observe une **transition de phase** en $p_c(d)$. Quand $p = p_c(d)$, le système est dit **critique**.

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (comportement au point critique)

Outre que l'étude au point critique est notoirement plus difficile, on y observe un comportement différent.

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (comportement au point critique)

Outre que l'étude au point critique est notoirement plus difficile, on y observe un comportement différent.

- En dehors du point critique, on observe typiquement des décroissances exponentielles :

- $\forall p < p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| \geq n) \leq c_p e^{-\alpha_p n},$
- $\forall p > p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(n \leq |\mathcal{C}_0| < +\infty) \leq c_p e^{-\alpha_p n^{(d-1)/d}}.$

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (comportement au point critique)

Outre que l'étude au point critique est notoirement plus difficile, on y observe un comportement différent.

- En dehors du point critique, on observe typiquement des décroissances exponentielles :

- $\forall p < p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| \geq n) \leq c_p e^{-\alpha_p n},$
- $\forall p > p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(n \leq |\mathcal{C}_0| < +\infty) \leq c_p e^{-\alpha_p n^{(d-1)/d}}.$

Au point critique, ce sont plutôt des **lois de puissance**.

Pour $d = 2$, $p_c(d) = \frac{1}{2}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2n} \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\text{rayon}(\mathcal{C}_0) \geq n) \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Criticité en mécanique statistique : exemple de la percolation dans $\mathbb{Z}^d$ (comportement au point critique)

Outre que l'étude au point critique est notoirement plus difficile, on y observe un comportement différent.

- En dehors du point critique, on observe typiquement des décroissances exponentielles :
 - $\forall p < p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_0| \geq n) \leq c_p e^{-\alpha_p n},$
 - $\forall p > p_c(d), \exists c_p, \alpha_p > 0, \forall n \geq 1, \mathbb{P}_p(n \leq |\mathcal{C}_0| < +\infty) \leq c_p e^{-\alpha_p n^{(d-1)/d}}.$

Au point critique, ce sont plutôt des **lois de puissance**.

Pour $d = 2$, $p_c(d) = \frac{1}{2}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2n} \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\text{rayon}(\mathcal{C}_0) \geq n) \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

- On conjecture aussi une **universalité** au point critique : les exposants apparaissant dans ces lois de puissance ne dépendraient pas du réseau (carré, triangulaire, hexagonal...).

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

Un système physique est dit **critique auto-organisé** s'il présente les caractéristiques d'un système critique sans qu'il soit nécessaire d'ajuster un paramètre autour d'une valeur précise (e.g. : la probabilité p de la percolation autour de $p_c(d)$).

Un système physique est dit **critique auto-organisé** s'il présente les caractéristiques d'un système critique sans qu'il soit nécessaire d'ajuster un paramètre autour d'une valeur précise (e.g. : la probabilité p de la percolation autour de $p_c(d)$).

Le système se place seul au point critique, qui est dit **attracteur**.

Un système physique est dit **critique auto-organisé** s'il présente les caractéristiques d'un système critique sans qu'il soit nécessaire d'ajuster un paramètre autour d'une valeur précise (e.g. : la probabilité p de la percolation autour de $p_c(d)$).

Le système se place seul au point critique, qui est dit **attracteur**.

Caractéristiques attendues :

- lois de puissance,
- invariance d'échelle,
- fractales,
- universalité.

- Tremblements de terre. Loi de Gutenberg-Richter : par unité de temps, en notant $N(\text{mag} > M)$ le nombre de séismes de magnitude $> M$,

$$\log N(\text{mag} > M) = a - bM.$$

- Feux de forêts.

Le modèle de tas de sable abélien

Le modèle de tas de sable est un automate cellulaire choisi comme modèle-jouet pour illustrer la notion de criticité auto-organisée.

- 1987 : notion de *criticité auto-organisée* dans [BakTangWies]¹ et premiers modèles de tas de sable,
- 1990 : exemple du modèle de tas de sable abélien dans [Dhar]².

¹Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. "Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise". In: *Phys. Rev. Lett.* (1987).

²Deepak Dhar. "Self-organized critical state of sandpile automaton models". In: *Phys. Rev. Lett.* (1990).

Soit G un graphe.

- Sur chaque sommet, on place un nombre entier de grains de sable.

Soit G un graphe.

- Sur chaque sommet, on place un nombre entier de grains de sable.
- Si le nombre de grains de sable d'un sommet est supérieur à son nombre de voisins, il est *instable* et s'effondre : distribue un grain de sable à chaque voisin.

Soit G un graphe.

- Sur chaque sommet, on place un nombre entier de grains de sable.
- Si le nombre de grains de sable d'un sommet est supérieur à son nombre de voisins, il est *instable* et s'effondre : distribue un grain de sable à chaque voisin.
- On fait s'effondrer les sommets jusqu'à ce qu'ils soient tous stables.

Un exemple sans stabilisation



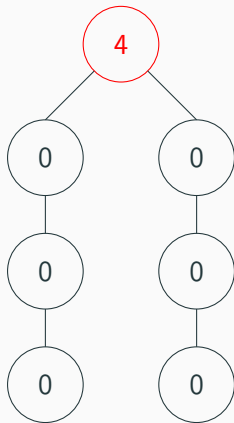
Un exemple sans stabilisation

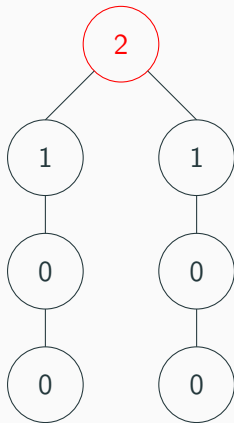


Un exemple sans stabilisation

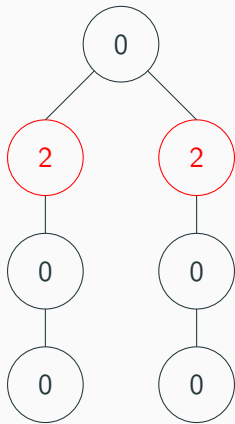


Un exemple avec stabilisation





Un exemple avec stabilisation



Un exemple avec stabilisation

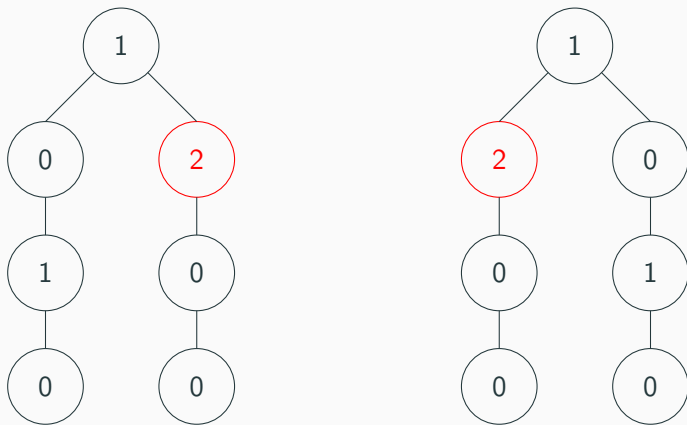
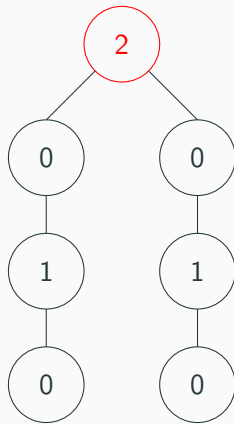
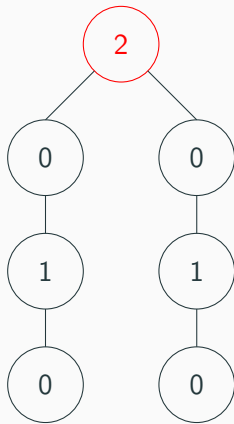


Figure 1: Deux possibilités d'effondrement.

Un exemple avec stabilisation



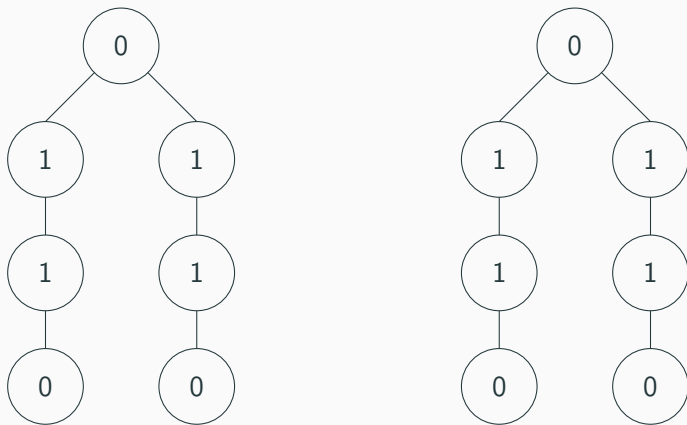


Figure 1: Aboutissent à la même configuration stable.

- Quand plusieurs effondrements sont possibles, l'ordre ne change pas la configuration finale (d'où le qualificatif *abélien*).
- Par conséquent, une fois la configuration initiale fixée, la configuration finale est obtenue de manière **déterministe**.

On part d'une *bonne* configuration initiale **aléatoire**.

On part d'une *bonne* configuration initiale **aléatoire**.

Lois de puissance :

- Pour $d \geq 5$, la probabilité que l'ajout d'un grain de sable en l'origine cause un effondrement en un sommet x décroît en $\frac{1}{\|x\|^{d-2}}$.
- Le nombre moyen d'effondrements de ce sommet x décroît aussi en $\frac{1}{\|x\|^{d-2}}$.

On part d'une *bonne* configuration initiale **aléatoire**.

Lois de puissance :

- Pour $d \geq 5$, la probabilité que l'ajout d'un grain de sable en l'origine cause un effondrement en un sommet x décroît en $\frac{1}{\|x\|^{d-2}}$.
- Le nombre moyen d'effondrements de ce sommet x décroît aussi en $\frac{1}{\|x\|^{d-2}}$.

Fractales.

Forme limite du tas de sable abélien

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

Une simulation

Sur la grille $\mathbb{Z}^2$, on place N grains de sable à l'origine et on laisse s'effondrer.

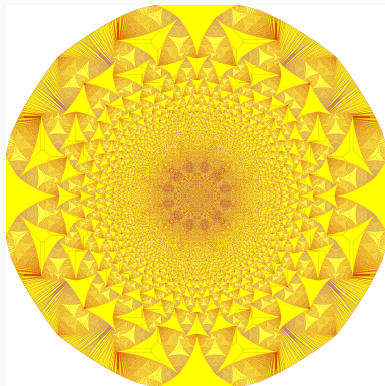


Figure 2: Simulation de Sevak Mkrtchyan avec $N = 10^7$. Les couleurs indiquent le nombre de grains de sable dans la configuration finale stable.

Structure fractale étudiée dans [LevPegSma]³. Le motif est nommé “triangulation d’Apollonius” en référence aux cercles d’Apollonius.

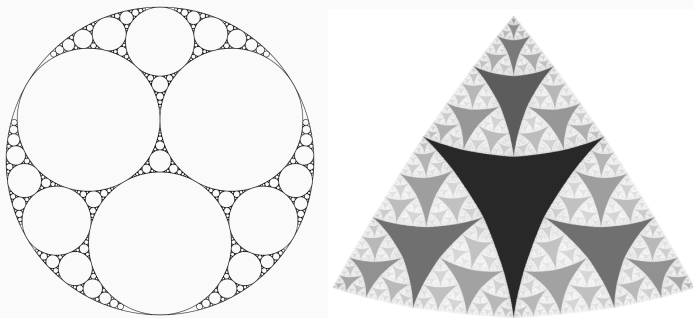


Figure 3: Cercles d’Apollonius (illustration de Guillaume Jacquenot) et triangulation d’Apollonius dans [LevPegSma].

³Lionel Levine, Wesley Pegden, and Charles Smart. “Apollonian Structure in the Abelian Sandpile”. In: *Geometric and Functional Analysis* (2016).

Ce qui est connu :

- Le bord du tas de sable est entre deux cercles de rayons $c_1\sqrt{N}$ et $c_2\sqrt{N}$.
- Il y a une forme limite après normalisation par $\sqrt{N}$.

Forme du bord

Ce qui est connu :

- Le bord du tas de sable est entre deux cercles de rayons $c_1\sqrt{N}$ et $c_2\sqrt{N}$.
- Il y a une forme limite après normalisation par $\sqrt{N}$.

Ce qui est conjecturé :

- La forme est convexe.
- Ce n'est pas un disque.
- Il y a des zones plates.



Figure 4: Zone plate conjecturée.

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

On étudie une variante dissipative du modèle. Les changements sont :

On étudie une variante dissipative du modèle. Les changements sont :

- la quantité de sable n'est plus entière ;

On étudie une variante dissipative du modèle. Les changements sont :

- la quantité de sable n'est plus entière ;
- on peut donner plus de sable à certains voisins qu'à d'autres ;

On étudie une variante dissipative du modèle. Les changements sont :

- la quantité de sable n'est plus entière ;
- on peut donner plus de sable à certains voisins qu'à d'autres ;
- à chaque effondrement, une proportion $\varepsilon \in]0, 1[$ du sable disparaît (d'où le nom).

On étudie une variante dissipative du modèle. Les changements sont :

- la quantité de sable n'est plus entière ;
- on peut donner plus de sable à certains voisins qu'à d'autres ;
- à chaque effondrement, une proportion $\varepsilon \in]0, 1[$ du sable disparaît (d'où le nom).

Graphe : $\mathbb{Z}^d$ avec arêtes périodiques (pas forcément plus proches voisins).

Questions :

- Y a-t-il une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$?

⁴Ian Alevy and Sevak Mkrtchyan. “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In: *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2022).

Questions :

- Y a-t-il une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$?
- Quelle renormalisation ? Est-ce toujours en $\sqrt{N}$?

⁴Ian Alevy and Sevak Mkrtchyan. “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In: *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2022).

Questions :

- Y a-t-il une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$?
- Quelle renormalisation ? Est-ce toujours en $\sqrt{N}$?
- Comment la forme varie-t-elle avec ε ?

⁴Ian Alevy and Sevak Mkrtchyan. “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In: *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2022).

Questions :

- Y a-t-il une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$?
- Quelle renormalisation ? Est-ce toujours en $\sqrt{N}$?
- Comment la forme varie-t-elle avec ε ?

Dans [Alevy-Mkrtchyan]⁴, ces questions sont traitées pour $\mathbb{Z}^2$, en donnant la même quantité de sable aux 4 plus proches voisins.

On généralise à $\mathbb{Z}^d$ pour une grande classe de modèles.

⁴Ian Alevy and Sevak Mkrtchyan. “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In: *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2022).

Figure 5: Exemple pour N variant de 1000 à 10^{11} avec normalisation par $r_N = \log(N)$.

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Il y a convergence du tas de sable vers une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$ (après normalisation par $\log(N)$).

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Il y a convergence du tas de sable vers une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$ (après normalisation par $\log(N)$).

La convergence a lieu pour la distance de Hausdorff.

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Il y a convergence du tas de sable vers une forme limite quand $N \rightarrow +\infty$ (après normalisation par $\log(N)$).

La convergence a lieu pour la distance de Hausdorff.

La forme limite s'exprime à l'aide du taux de décroissance exponentielle de la fonction de Green de la marche aléatoire tuée associée au modèle de tas de sable dissipatif.

Convergence du paramètre de dissipation

On étudie l'influence du paramètre de dissipation ε sur la forme limite en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ (approche le modèle critique non-dissipatif).

⚠ Ici, on a déjà fait tendre $N \rightarrow +\infty$.

On étudie l'influence du paramètre de dissipation ε sur la forme limite en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ (approche le modèle critique non-dissipatif).

⚠ Ici, on a déjà fait tendre $N \rightarrow +\infty$.

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Après bonne normalisation, la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un ellipsoïde quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Convergence du paramètre de dissipation

On étudie l'influence du paramètre de dissipation ε sur la forme limite en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ (approche le modèle critique non-dissipatif).

⚠ Ici, on a déjà fait tendre $N \rightarrow +\infty$.

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Après bonne normalisation, la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un ellipsoïde quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cet ellipsoïde est $\{x \in \mathbb{R}^d \mid 2x^\top \sigma x \leq 1\}$ où σ est la matrice de covariance de la marche non tuée.

Convergence du paramètre de dissipation

On étudie l'influence du paramètre de dissipation ε sur la forme limite en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ (approche le modèle critique non-dissipatif).

⚠ Ici, on a déjà fait tendre $N \rightarrow +\infty$.

Théorème (B., Boutillier, Mkrtchyan, Raschel (2025))

Après bonne normalisation, la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un ellipsoïde quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cet ellipsoïde est $\{x \in \mathbb{R}^d \mid 2x^\top \sigma x \leq 1\}$ où σ est la matrice de covariance de la marche non tuée.

Cet ellipsoïde limite n'est a priori **pas** la forme limite du tas de sable non-dissipatif (conjectures de bords droits) : discontinuité en $\varepsilon = 0$.

Figure 6: Convergence de la courbe limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Criticité auto-organisée

Criticité en mécanique statistique, exemple de la percolation

Caractère auto-organisé de la criticité

Le modèle de tas de sable abélien

Forme limite du tas de sable abélien

Résultats connus et conjectures

Forme limite pour le modèle dissipatif dans $\mathbb{Z}^d$

Forme limite pour le modèle dissipatif sur des graphes isoradiaux

Un **graphe isoradial** est un graphe planaire plongé dans le plan de sorte que chaque face soit inscrite dans un cercle de rayon 1 (dont le centre est dans la face).

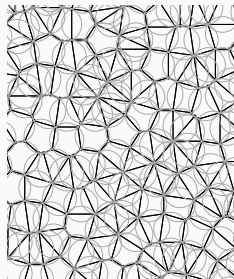


Figure 7: Un graphe isoradial. Simulations de Cédric Boutillier.

Un **graphe isoradial** est un graphe planaire plongé dans le plan de sorte que chaque face soit inscrite dans un cercle de rayon 1 (dont le centre est dans la face).

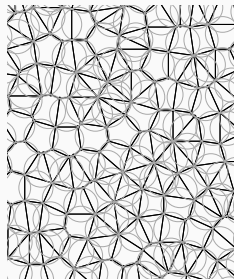


Figure 7: Un graphe isoradial. Simulations de Cédric Boutillier.

Classe de graphes adaptée à l'étude des modèles discrets de mécanique statistique.

Dans [BdTR]⁵, les auteurs définissent une famille de conductances et de masses sur les graphes isoradiaux.

—→ Permet de définir un modèle de tas de sable dissipatif.

⁵Cédric Boutillier, Béatrice de Tilière, and Kilian Raschel. “The Z-invariant massive Laplacian on isoradial graphs”. In: *Invent. Math.* (2017).

Dans [BdTR]⁵, les auteurs définissent une famille de conductances et de masses sur les graphes isoradiaux.

→ Permet de définir un modèle de tas de sable dissipatif.

Théorème (B. (2025))

On place N grains de sable en un sommet et on laisse s'effondrer. Lorsque N tend vers $+\infty$, après normalisation par $\log N$, on a convergence vers une forme limite.

⁵Cédric Boutillier, Béatrice de Tilière, and Kilian Raschel. “The Z-invariant massive Laplacian on isoradial graphs”. In: *Invent. Math.* (2017).

Dans [BdTR]⁵, les auteurs définissent une famille de conductances et de masses sur les graphes isoradiaux.

—→ Permet de définir un modèle de tas de sable dissipatif.

Théorème (B. (2025))

On place N grains de sable en un sommet et on laisse s'effondrer. Lorsque N tend vers $+\infty$, après normalisation par $\log N$, on a convergence vers une forme limite.

*Lorsque le paramètre de dissipation tend vers 0, cette forme tend vers le cercle unité (**universalité**).*

⁵Cédric Boutillier, Béatrice de Tilière, and Kilian Raschel. “The Z-invariant massive Laplacian on isoradial graphs”. In: *Invent. Math.* (2017).

