

UNE INTRODUCTION AU MODÈLE DE DIMÈRES

Béatrice de Tilière
Université Paris-Dauphine PSL

Les probabilités de demain
IHP, 4 février 2026

PLAN

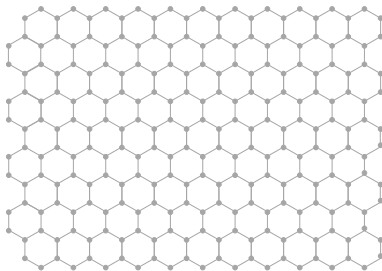
- Modèles de mécanique statistique définis sur des graphes
- Définition du modèle de dimères
- Comportement macroscopique
- Résultats fondateurs dans le cas fini
- Modèle de dimères sur les graphes planaires, infinis, bipartis $\mathbb{Z}^2$ -périodiques

MODÈLES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR GRAPHES

Comprendre le comportement macroscopique d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique

Le cadre général pour les modèles définis sur les graphes est :

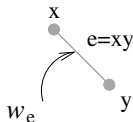
- La structure du système physique est représentée par un **graphe** $G = (V, E)$, fini.



MODÈLES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR GRAPHES

- ▶ Ensemble de configurations sur le graphe G : $\mathcal{C}(G)$,
 - configurations de sommets
 - configurations d'arêtes
 - configurations de sommets/arêtes
- ▶ Paramètres :
 - intensité des interactions entre les composants microscopiques
 - température extérieure.

⇒ Fonction de poids $w = (w_e)_{e \in E}$ sur les arêtes.



MODÈLES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR GRAPHES

- ▶ À une configuration C , on associe une **énergie** $\mathcal{E}_w(C)$.
- ▶ **Mesure de Boltzmann** sur les configurations :

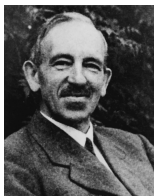
$$\forall C \in \mathcal{C}(G), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(G, w)},$$

où $Z(G, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} e^{-\mathcal{E}_w(C)}$ est la **fonction de partition**.

*Comprendre le comportement des configurations
lorsque le **graphe est grand** ou lorsque la **maille est petite**.*

LE MODÈLE DE DIMÈRES

Répartition de molécules di-atomiques à la surface d'un cristal



Ralph H. Fowler (1889-1944)

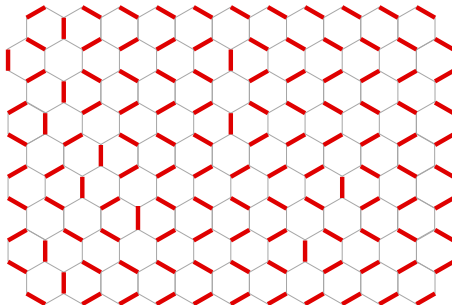


George S. Rushbrooke (1915-1995)

- ▶ Graphe $G = (V, E)$.
- ▶ Une **configuration de dimères** ou **couplage parfait** : sous-ens. d'arêtes M t.q. chaque sommet touche exactement une arête de M .
 $\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \mathcal{M}(G) = \text{ens. des configurations de dimères.}$

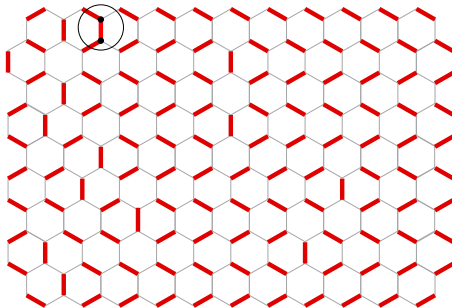
LE MODÈLE DE DIMÈRES

- Une configuration de dimères.



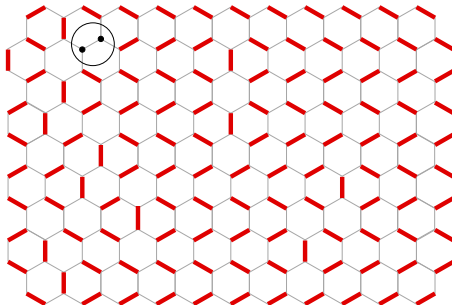
LE MODÈLE DE DIMÈRES

- Une configuration de dimères.



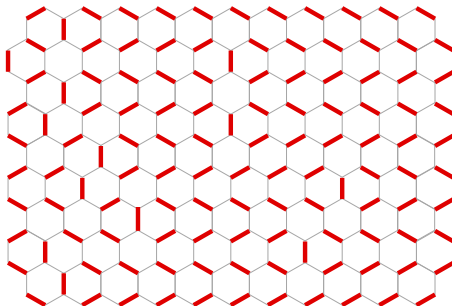
LE MODÈLE DE DIMÈRES

- Une configuration de dimères.



LE MODÈLE DE DIMÈRES

- Une configuration de dimères.



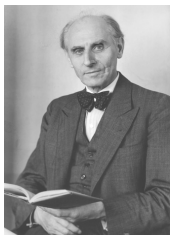
- Fonction de poids positive : $\nu = (\nu_e)_{e \in E}$.
- Energie d'une configuration M : $\mathcal{E}_\nu(M) = - \sum_{e \in M} \log \nu_e$.
- Mesure de Boltzmann des dimères :

$$\forall M \in \mathcal{M}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{dim}}(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dim}}(G, \nu)}.$$

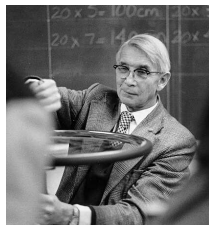
- Arêtes avec poids plus élevé ont plus de chances d'être présentes.

LE MODÈLE D'ISING

Modèle de ferro-magnétisme, de mélange de deux matériaux



Wilhelm Lenz (1888-1957)



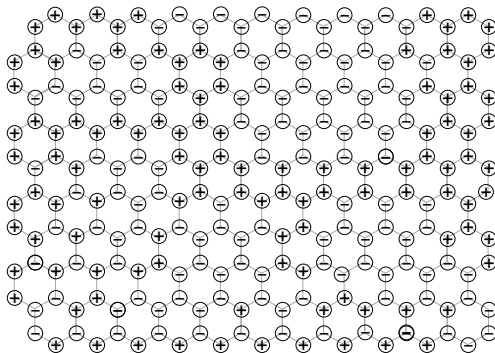
Ernst Ising (1900-1998)

- ▶ Graphe $G = (V, E)$.
- ▶ Une **configuration de spins** σ associe un spin $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ à chaque sommet x du graphe G .

$\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{-1, 1\}^V = \text{ens. des configurations de spins.}$

LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins

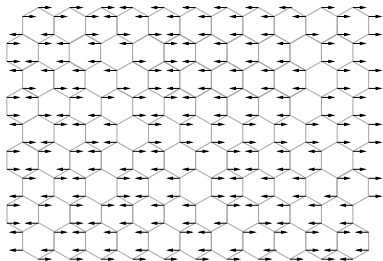


LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins/deux interprétations

Moment magnétique :

$+1/\rightarrow$, $-1/\leftarrow$

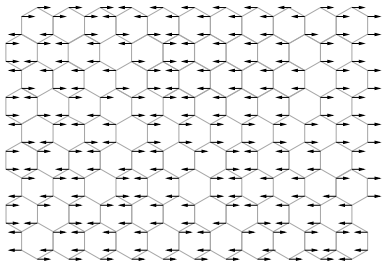


LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins/deux interprétations

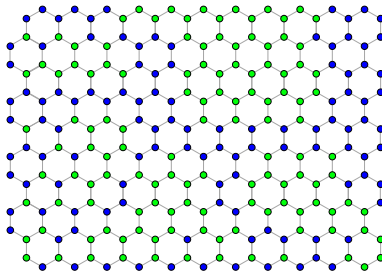
Moment magnétique :

$+1/\rightarrow$, $-1/\leftarrow$



Mélange de deux matériaux :

$+1/\bullet$, $-1/\circ$



LE MODÈLE D'ISING

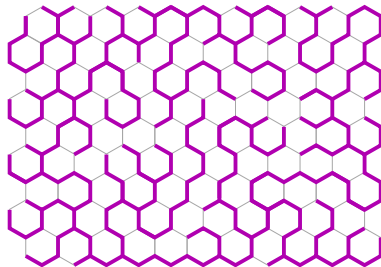
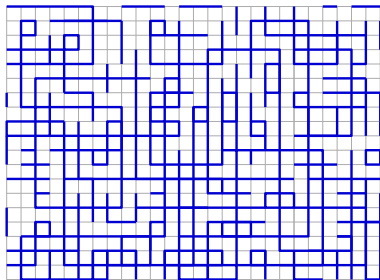
- ▶ Fonction de poids positive : **constantes de couplages** $J = (J_e)_{e \in E}$.
- ▶ Energie d'une configuration de spins : $\mathcal{E}_J(\sigma) = - \sum_{e=xy \in E} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$.
- ▶ **Mesure de Boltzmann d'Ising** :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^V, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J)}.$$

- ▶ Deux spins voisins σ_x, σ_y ont tendance à s'aligner.
- ▶ Plus élevé est la constante J_{xy} , plus forte est cette tendance.

AUTRES MODÈLES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR GRAPHES

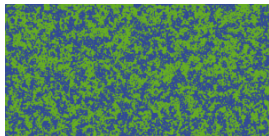
- ▶ **PERCOLATION** : flux d'un liquide à travers un matériau poreux.
- ▶ **ARBRES/FORÊTS COUVRANTS** : reliés aux réseaux électrique, marche aléatoire.
- ▶ **RANDOM CLUSTER MODEL (FK)** : contient la percolation, les arbres couvrants, représentation FK du modèle d'Ising.
- ▶ **MODÈLES VERTEX (6-8...)** : le 6-vertex est un modèle pour la glace.
- ▶ **MODÈLES DE BOUCLES $O(n)$** .



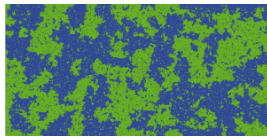
COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Fixer une boîte
Faire tendre la longueur des arêtes vers 0
Analyser une configuration typique.

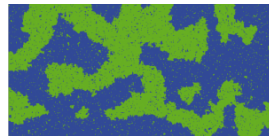
- Modèle d'Ising (illustrations de R. Cerf)



J petit



J critique



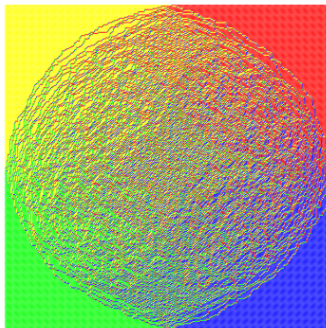
J grand

- Sur $\mathbb{Z}^2$: $J_c \equiv \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ [Kramers et Wannier]
- Transition de phase : étudiée à travers la magnétisation.

COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Fixer une boîte
Faire tendre la longueur des arêtes vers 0
Analyser une configuration typique.

- Modèle de dimères (illustration de Tomas Berggren)



Un pavage par dominos du diamant aztèque

- On remarque **trois phases** sur la même illustration

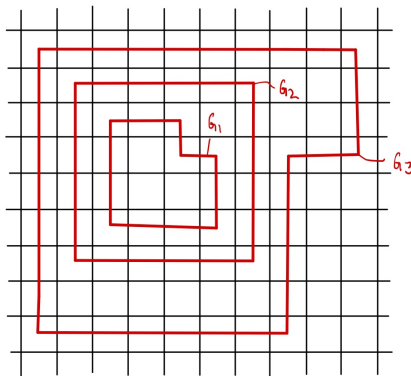
COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Se donner un graphe infini G

Prendre une exhaustion du graphe G par des graphes finis : $(G_n)_{n \geq 1}$

Etudier la “limite” des modèles finis sur $(G_n)_{n \geq 1}$.

- Exhaustion par des graphes planaires.



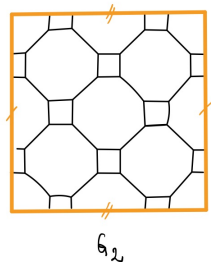
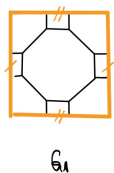
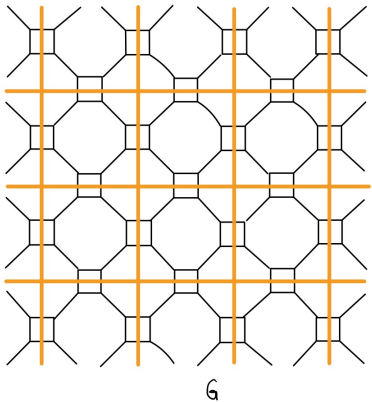
COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Se donner un graphe infini G

Prendre une exhaustion du graphe G par des graphes finis : $(G_n)_{n \geq 1}$

Etudier la “limite” des modèles finis sur $(G_n)_{n \geq 1}$.

- Si G est $\mathbb{Z}^2$ -périodique : exhaustion par **des graphes toriques**.



COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

- ▶ Identification de la transition de phase.
- ▶ Compréhension des régimes sous/sur critiques.
- ▶ Compréhension du modèle critique (à la transition de phase) :
 - ▶ Universalité et invariance conforme.
 - ▶ Conjectures : Nienhuis, Cardy, Duplantier ...
Preuves : Lawler, Schramm, Werner, D. Chelkak, S. Smirnov,
Hugo Duminil-Copin ...

MODÈLES EXACTEMENT SOLUBLES

- ▶ Un des outils pour étudier le comportement macroscopique est la **fonction de partition** :

$$Z(G, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} e^{-\mathcal{E}_w(C)},$$

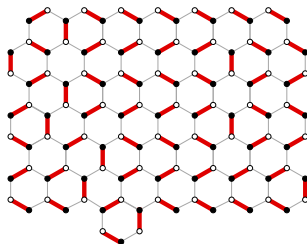
la constante normalisatrice dans la mesure de Boltzmann.

$$\forall C \in \mathcal{C}(G), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(G, w)}.$$

- ▶ le modèle est **fortement exactement soluble** s'il existe une formule exacte et explicite pour la fonction de partition
- ▶ Trois modèles fortement exactement solubles :
 - ▶ Ising-2d : Onsager (1944) - Fisher (1966).
 - ▶ Dimères-2d : Kasteleyn, Temperley-Fisher (1961).
 - ▶ Arbres couvrants : Kirchhoff (1848).

FONCTION DE PARTITION DU MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ $G = (W \sqcup B, E)$: graphe fini, planaire, biparti.
- ▶ $\mathcal{M}(G)$: ens. des config. de dimères/couplages parfaits de G .



- ▶ Mesure de Boltzmann des dimères :

$$\forall M \in \mathcal{M}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{dim}}(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dim}}(G, \nu)},$$

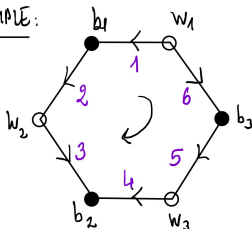
où $Z_{\text{dim}}(G, \nu) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G)} \prod_{e \in M} \nu_e$ est la **fonction de partition**.

FONCTION DE PARTITION

- Supposons que $|B| = |W| = n$, $W = \{w_1, \dots, w_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.
- Supposons que les arêtes de G sont munies d'une **orientation de Kasteleyn** : les faces intérieures sont “clockwise odd”.
- **Matrice de Kasteleyn K** : matrice d'adjacence orientée et pondérée

$$K_{w_i, b_j} = \begin{cases} v_{w_i b_j} & \text{si } w_i \sim b_j \text{ et } w_i \rightarrow b_j \\ -v_{w_i b_j} & \text{si } w_i \sim b_j \text{ et } w_i \leftarrow b_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE:



$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

FONCTION DE PARTITION

THÉORÈME (KASTELEYN, TEMPERLEY-FISHER '61)

Supposons que le graphe G est muni d'une *orientation de Kasteleyn*. Alors,

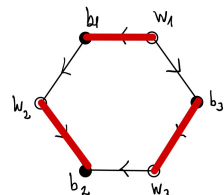
$$Z_{\dim}(G, \nu) = |\det K|.$$

Idee de preuve.

- $\det K = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \dots K_{w_n, b_{\sigma(n)}}.$
- Termes non-nuls du développement de $\det K \longleftrightarrow$ config. dimères

EXAMPLE:

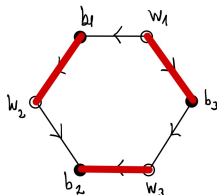
dimers:



$$\sigma = \begin{matrix} w \\ b \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{id}$$

det K:

$$1. K_{w_1 b_1} K_{w_2 b_2} K_{w_3 b_3}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3 \ 2 \ 1).$$

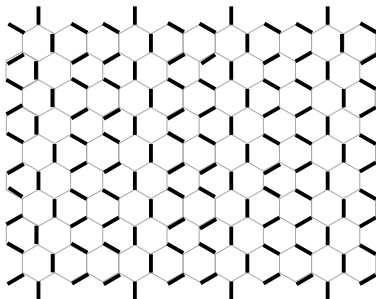
$$1. K_{w_1 b_3} K_{w_2 b_1} K_{w_3 b_2}.$$

FONCTION DE PARTITION

- Un terme typique dans le développement de $\det K$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma) K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \cdots K_{w_n, b_{\sigma(n)}} = \pm \operatorname{sgn}(\sigma) v_{w_1 b_{\sigma(1)}} \cdots v_{w_n b_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est **Kasteleyn**, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ se compensent.



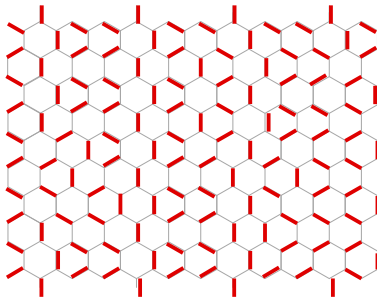
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det K$.

FONCTION DE PARTITION

- Un terme typique dans le développement de $\det K$ est

$$\text{sgn}(\sigma) K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \dots K_{w_n, b_{\sigma(n)}} = \pm \text{sgn}(\sigma) \nu_{w_1 b_{\sigma(1)}} \dots \nu_{w_n b_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est **Kasteleyn**, $\pm$ et $\text{sgn}(\sigma)$ se compensent.



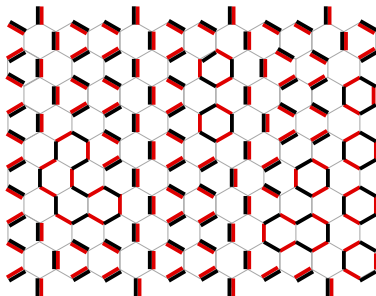
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det K$.

FONCTION DE PARTITION

- Un terme typique dans le développement de $\det K$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma) K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \dots K_{w_n, b_{\sigma(n)}} = \pm \operatorname{sgn}(\sigma) \nu_{w_1 b_{\sigma(1)}} \dots \nu_{w_n b_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est **Kasteleyn**, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ se compensent.



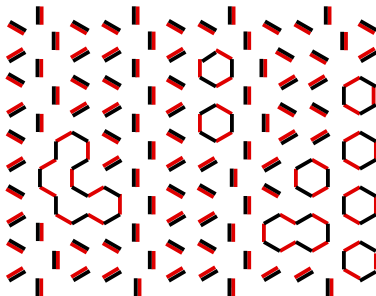
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det K$.

FONCTION DE PARTITION

- Un terme typique dans le développement de $\det K$ est

$$\text{sgn}(\sigma) K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \dots K_{w_n, b_{\sigma(n)}} = \pm \text{sgn}(\sigma) \nu_{w_1 b_{\sigma(1)}} \dots \nu_{w_n b_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est **Kasteleyn**, $\pm$ et $\text{sgn}(\sigma)$ se compensent.



Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det K$.

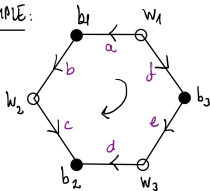
FONCTION DE PARTITION

THÉORÈME (KASTELEYN, TEMPERLEY-FISHER '61)

Supposons que le graphe G est muni d'une *orientation de Kasteleyn*. Alors,

$$Z_{\dim}(G, \nu) = |\det K|.$$

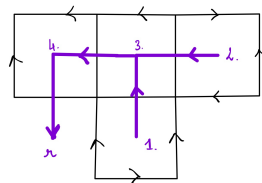
EXEMPLE:



$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & 0 & f \\ -b & c & 0 \\ 0 & d & -e \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\det K = -ace - bdf = -Z_{\dim}(G, \nu).$$

► Construction d'une telle orientation



MESURE DE BOLTZMANN

THÉORÈME (KENYON'97)

Soit $\{e_1 = w_1 b_1, \dots, e_k = w_k b_k\}$ un ss-ens. d'arêtes de G . La probabilité des config. de dimères contenant ce ss-ens. d'arêtes est égale à :

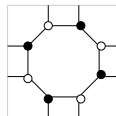
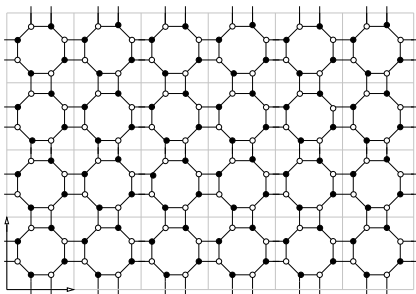
$$\mathbb{P}_{\dim}(e_1, \dots, e_k) = \left| \left(\prod_{j=1}^k K_{w_j, b_j} \right) \det_{1 \leq i, j \leq k} K_{b_i, w_j}^{-1} \right|.$$

PREUVE (IDÉE).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\dim}(e_1, \dots, e_k) &= \frac{Z_{\dim}(G, \nu) |_{\{M \in \mathcal{M}(G) : \{e_1, \dots, e_k\} \in M\}}}{Z_{\dim}(G, \nu)} \\ &= \frac{\left| \left(\prod_{j=1}^k K_{w_j, b_j} \right) \det(K_{\{w_1, \dots, w_k\}}^{\{b_1, \dots, b_k\}}) \right|}{|\det K|} \\ &= \left| \left(\prod_{j=1}^k K_{w_j, b_j} \right) \det(K^{-1}_{\{w_1, \dots, w_k\}}^{\{b_1, \dots, b_k\}^c}) \right| \quad (\text{identité de Jacobi}). \quad \square \end{aligned}$$

MODÈLE DE DIMÈRES SUR GRAPHES BIPARTIS $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUES

- ▶ Fonction de poids périodiques ν sur G , biparti, $\mathbb{Z}^2$ -périodique.
- ▶ Exhaustion de G par des graphes toriques : $(G_n) = (G/n\mathbb{Z}^2)$.



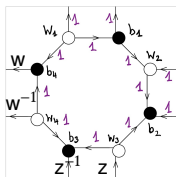
Domaine fondamental G_1

- ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, modèle de dimères sur G_n :

$$\forall M \in \mathcal{M}(G_n), \quad \mathbb{P}_{\text{dim}}^n(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dim}}(G_n, \nu)},$$

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

- **Domaine fondamental** : G_1



$$K_1(z, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -w \\ -z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & w^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit K_1 la matrice de Kasteleyn du **domaine fondamental** G_1 .
- Multiplier le poids des arêtes par $z, z^{-1}, w, w^{-1} \rightarrow K_1(z, w)$.
- Le **polynôme caractéristique** est :

$$P(z, w) = \det K_1(z, w).$$

Exemple : $P(z, w) = 5 - z - \frac{1}{z} - w - \frac{1}{w}$.

PRENDRE LA “LIMITE” : ÉNERGIE LIBRE

- **Energie libre** du modèle.

$$f = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{\dim}(\mathbf{G}_n, \nu)$$

THÉORÈME (COHN-KENYON-PROPP'01, K.-OKOUNKOV-SHEFFIELD'06)

L'énergie libre du modèle de dimères est explicitement donnée par

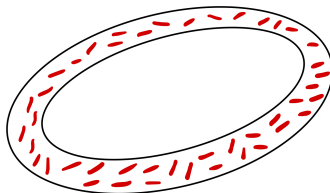
$$f = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log |P(z, w)| \frac{dz}{z} \frac{dw}{w},$$

où $\mathbb{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1\}$.

Exemple : $f = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log |5 - z - z^{-1} - w - w^{-1}| \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$

PRENDRE LA “LIMITE” : MESURE DE GIBBS

- **Mesure de Gibbs** est une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(G)$ satisfaisant aux conditions de Dobrushin-Lanford-Ruelle (**DLR**) :
- si on fixe un couplage parfait dans une région annulaire, les couplages parfaits à l'intérieur et extérieur sont indépendants,
 - la probabilité d'un couplage parfait intérieur M est $\propto \prod_{e \in M} \nu_e$.



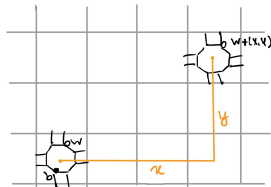
MESURE DE GIBBS

THÉORÈME (COHN-KENYON-PROPP'01, K.-OKOUNKOV-SHEFFIELD'06)

La limite faible des mesures de Boltzmann $\mathbb{P}_{\text{dim}}^n$ définit une mesure de Gibbs ergodique $\mathbb{P}_{\text{dim}}$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{G})$, t.q. la probabilité des config. de dimères contenant le ss-ens. d'arêtes $\{e_1 = w_1 b_1, \dots, e_k = w_k b_k\}$ est égal à :

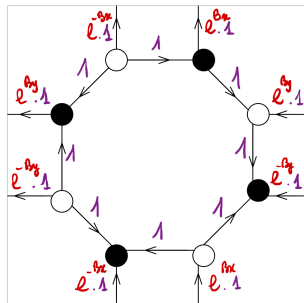
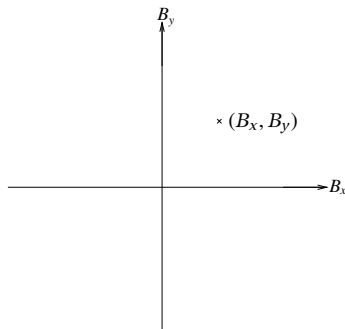
$$\mathbb{P}_{\text{dim}}(e_1, \dots, e_k) = \left| \left(\prod_{j=1}^k K_{w_j, b_j} \right) \det_{1 \leq i, j \leq k} (K_{b_i, w_j}^{-1}) \right|,$$

$$K_{b, w+(x,y)}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\text{cof}(K_1(z, w))_{b,w}^t}{P(z, w)} z^{-y} w^x \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}$$



ENSEMBLE DES MESURES DE GIBBS ERGODIQUES [KOS'06]

► Coordonnées “champ magnétique”



$\rightsquigarrow$ Fonction de poids $\nu^{(B_x, B_y)}$, matrice de Kasteleyn $K^{(B_x, B_y)}$

► Remarques :

- localement, la mesure de Boltzmann est la même
- à comprendre comme un **changement de conditions au bord**.

ENSEMBLE DES MESURES DE GIBBS ERGODIQUES [KOS'06]

THÉORÈME (KENYON-OKOUNKOV-SHEFFIELD '06)

- Le modèle de dimères sur un graphe planaire, $\mathbb{Z}^2$ -périodique, biparti a un ensemble à *deux paramètres* de mesures de Gibbs ergodiques $\mathbb{P}_{\text{dim}}^{(B_x, B_y)}$ indexées par les coordonnées “champ magnétique”.
- Elles sont explicitement obtenues comme limite faible des mesures de Boltzmann $\mathbb{P}_{\text{dim}}^{n, (B_x, B_y)}$ avec “*champ magnétique*” (B_x, B_y) .
- La mesure $\mathbb{P}_{\text{dim}}^{(B_x, B_y)}$ est explicitement donnée par :

$$\mathbb{P}_{\text{dim}}^{(B_x, B_y)}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \left| \left(\prod_{j=1}^k \mathbf{K}_{\mathbf{w}_j, \mathbf{b}_j}^{(B_x, B_y)} \right) \det_{1 \leq i, j \leq k} [(\mathbf{K}^{(B_x, B_y)})_{\mathbf{b}_i, \mathbf{w}_j}^{-1}] \right|,$$

où

$$(\mathbf{K}^{(B_x, B_y)})_{\mathbf{b}, \mathbf{w} + (x, y)}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\text{cof}(\mathbf{K}_1^{(B_x, B_y)}(z, w))_{\mathbf{b}, \mathbf{w}}^t}{P^{(B_x, B_y)}(z, w)} z^{-y} w^x \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

DIAGRAMME DE PHASES [KOS '06]

Les phases du modèle sont caractérisées par

- ▶ la décroissance des corrélations :

polynomiale (**liquide**), exponentielle (**gaz**), zéro (**solide**)

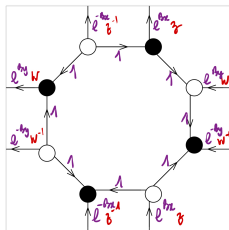
- ▶ *i.e.*, taux de décroissance de

$$(K^{(B_x, B_y)})_{\mathbf{b}, \mathbf{w} + (\mathbf{x}, \mathbf{y})}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\text{cof}(K_1^{(B_x, B_y)}(z, w))_{\mathbf{b}, \mathbf{w}}^t}{P^{(B_x, B_y)}(z, w)} z^{-y} w^x \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

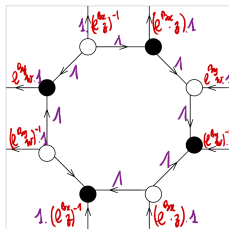
- ▶ *i.e.*, position des zéros de $P^{(B_x, B_y)}(z, w)$ sur $\mathbb{T}^2$.

DIAGRAMME DE PHASES [KOS '06]

$$P^{(B_x, B_y)}(z, w) = P(e^{B_x} z, e^{B_y} w)$$



$$K_1^{(B_x, B_y)}(z, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-B_x} z^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -e^{B_y} w \\ -e^{B_x} z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-B_y} w^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



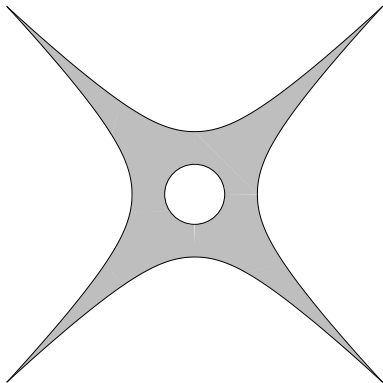
$$K_1(e^{B_x} z, e^{B_y} w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (e^{B_x} z)^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -e^{B_y} w \\ -e^{B_x} z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (e^{B_y} w)^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

DIAGRAMME DE PHASES [KOS '06]

- La **courbe spectrale** :

$$\mathcal{C} = \{(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 : P(z, w) = 0\}.$$

- **Amoebe** : image de $\mathcal{C}$ par l'application $(z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|)$.



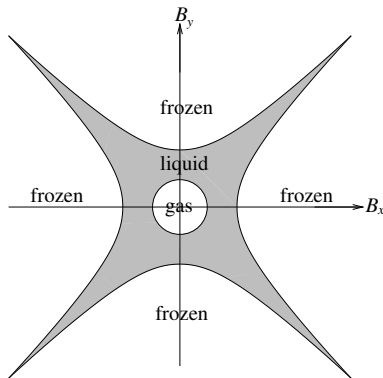
Amoebe du graphe carré-octogone

DIAGRAMME DE PHASES [KOS '06]

- La courbe spectrale :

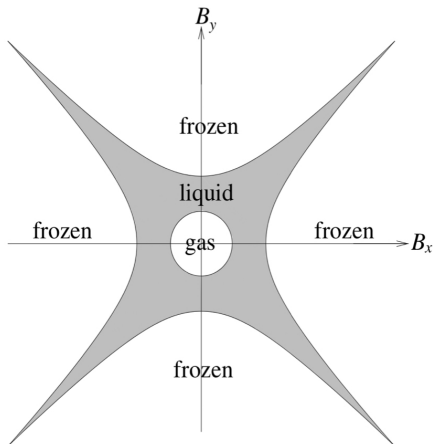
$$\mathcal{C} = \{(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 : P(z, w) = 0\}.$$

- Amoebe : image de $\mathcal{C}$ par l'application $(z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|)$.



$$P^{(B_x, B_y)}(z, w) = P(e^{B_x} z, e^{B_y} w)$$

DIAGRAMME DE PHASES [KOS '06]



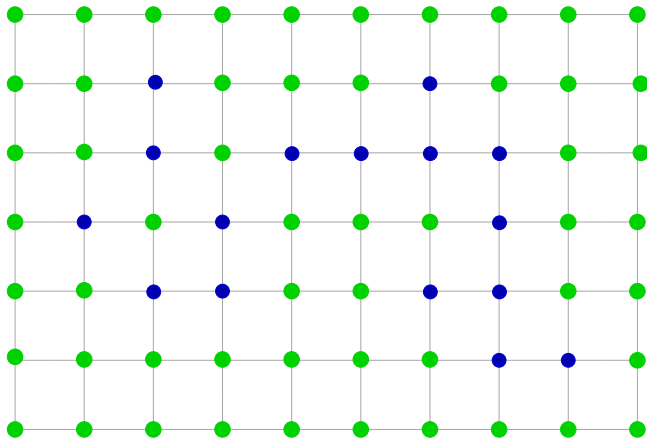
- Point $(z, w) \in \mathbb{T}^2$: $P(z, w) = 0$
 $\Leftrightarrow |z| = |w| = 1$ and $P(z, w) = 0$
 $\downarrow (\log|z|, \log|w|)$
 $(0, 0)$ and $P(z, w) = 0$.

- Point $(z, w) \in \mathbb{T}^2$: $P^{(B_x, B_y)}(z, w) = 0$
 $\Leftrightarrow$ Point (z', w') : $|z'| = e^{B_x}$, $|w'| = e^{B_y}$
and $P(z', w') = 0$.
 $\downarrow (\log|z|, \log|w|)$
 (B_x, B_y) and $P(z', w') = 0$.

$$P^{(B_x, B_y)}(z, w) = P(e^{B_x} z, e^{B_y} w)$$

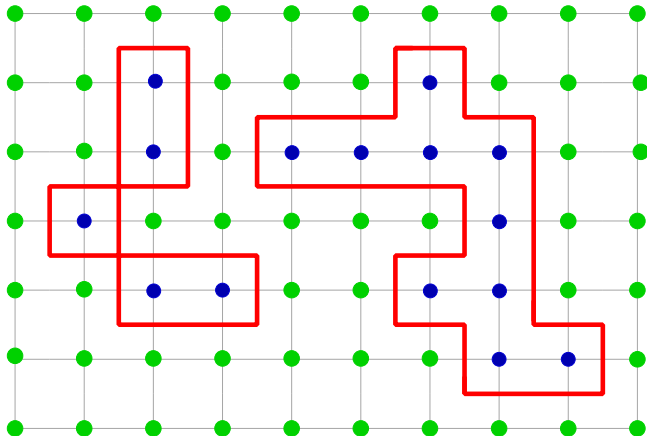
RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- Modèle d'Ising sur G .



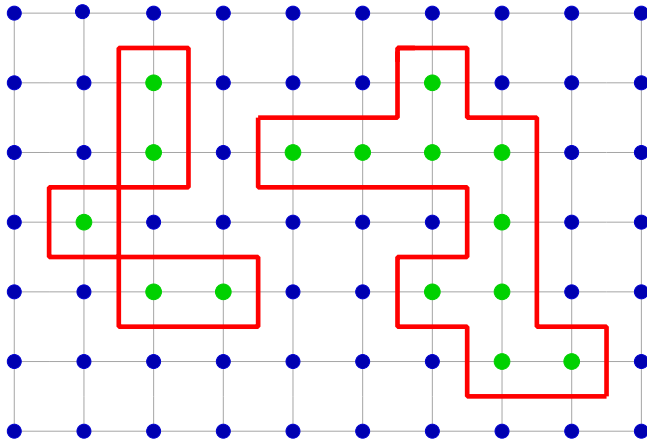
RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- Développement basse température [Kramers-Wannier].



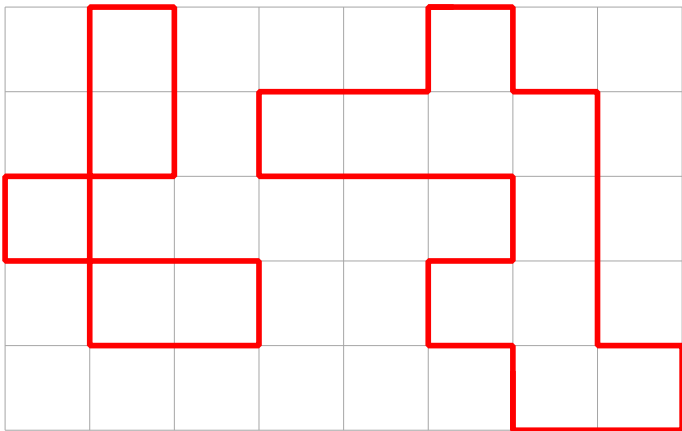
RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- Développement basse température [Kramers-Wannier].



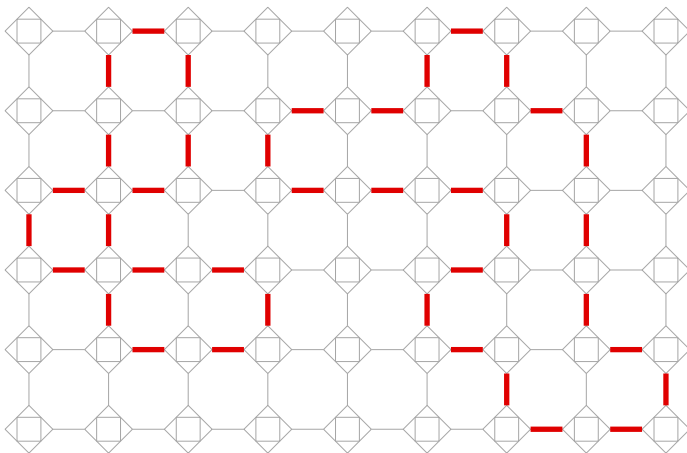
RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- ▶ Contours polygonaux sur G^* .



RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- Correspondance de Fisher : garder les arêtes des contours polygonaux.



RELATION ENTRE LES MODÈLES : ISING - DIMÈRES [FISHER'66]

- Remplir les décorations : $2^{|V^*|}$ possibilités.

