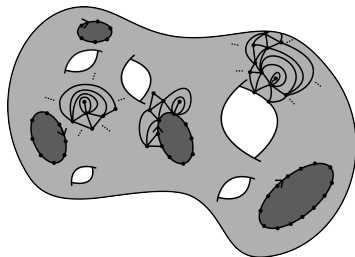


# Limites locales de cartes aléatoires

Tanguy Lions

Doctorant à l'ENS Lyon sous la direction de Thomas Budzinski et Grégory Miermont.

08 octobre 2025



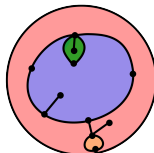
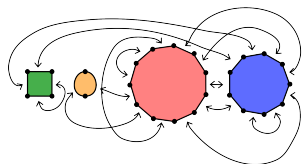
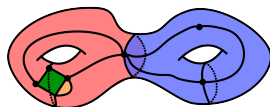
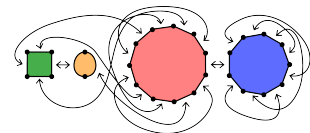
- Cartes aléatoires : modèles discrets de gravité quantique (2d).
- Le cas planaire a été largement étudié dans les vingt dernières années.
- En grand genre : il reste beaucoup de questions ouvertes. La combinatoire de ces objets est beaucoup plus compliquée que le cas planaire.

## Définition

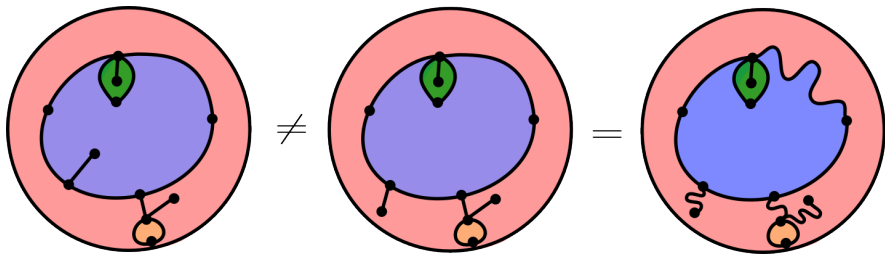
Une **carte** est donnée par :

- Une famille de polygones orientés.
- Un recollement entre les bords des polygones qui préserve l'orientation.

On obtient une surface connexe  $S$  et un graphe  $G$  dessiné sur cette surface.  
On dit que la carte est **planaire** si  $S$  est de genre 0 (une sphère).



# Definitions



# Triangulations

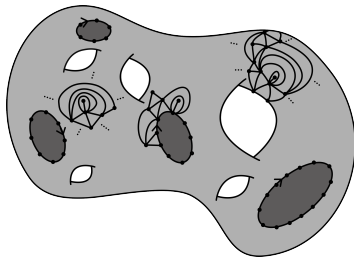
## Définition

Une **triangulation** est une carte telle que

- Il existe  $\ell \geq 0$  faces simples, distinguées appelées les **bords**.
- Les faces qui ne sont pas des bords sont de degré 3 (triangles).

Pour  $n, g, \ell \geq 0$  et  $p_1, \dots, p_\ell \geq 1$ , on note  $\mathcal{T}(n, g; p_1, \dots, p_\ell)$  l'ensemble des triangulations de genre  $g$  (tore à  $g$  trous), avec  $\ell$  bords de périmètres  $p_1, \dots, p_\ell$  et  $2n - \sum_{i=1}^{\ell} (p_i - 2)$  triangles.

On se concentrera sur le cas  $\ell \in \{0, 1\}$ .



- Notons  $\tau_p(n, g) = \#\mathcal{T}(n, g; p)$  et  $\tau(n, g) = \#\mathcal{T}(n, g)$ .
- Dans le cas planaire ( $g = 0$ ), il y a une formule exacte (Tutte, 60s) :

$$\tau(n, 0) = 2 \frac{4^n (3n)!!}{(n+1)! (n+2)!!} \sim \sqrt{\frac{6}{\pi}} (12\sqrt{3})^n n^{-\frac{5}{2}}.$$

Il y a aussi une formule pour  $\tau_p(n, 0)$ .

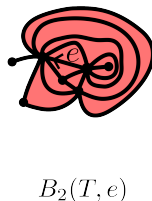
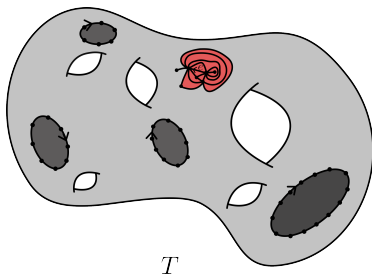
- Pour  $g \geq 0$  fixé, il existe une asymptotique pour  $\tau(n, g)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Lorsque  $n, g \rightarrow +\infty$  on a des résultats assez faibles.
- Notons  $T_{n,g,p}$  (resp.  $T_{n,g}$ ) un élément choisit uniformément dans  $\mathcal{T}_p(n, g)$  (resp.  $\mathcal{T}(n, g)$ ) .

# Distance locale

- Soit  $T \in \mathcal{T}_p(n, g)$  et  $e$  une arête orientée sur  $T$ . Notons  $x$  le point de départ de  $e$ . On définit  $B_r(T, e)$  la carte obtenue en ne gardant que les arêtes ayant un sommet à distance au plus  $r - 1$  de  $x$ . On introduit la distance

$$d_{\text{loc}}\left((T, e), (T', e')\right) = \frac{1}{1 + \sup\{r \geq 0 : B_r(T, e) = B_r(T', e')\}}.$$

- Existe-t-il une carte aléatoire enracinée  $(T_\infty, e_\infty)$  telle que  $(T_{n,g,p}, e) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(\text{loi})} (T_\infty, e_\infty)$ ? Si oui, à quoi ressemble  $(T_\infty, e_\infty)$ ?



### Théorème (Budzinski-Louf 2019)

Soit  $\theta \in [0, \frac{1}{2})$  et  $\frac{g}{n} \rightarrow \theta$ . Soit  $e$  une arête orientée choisie uniformément sur  $T_{n,g}$ . On a la convergence en loi suivante :

$$(T_{n,g}, e) \rightarrow \mathbb{T}_\theta,$$

où  $\mathbb{T}_\theta$  est une triangulation infinie du plan.

- Le cas  $g = 0$  (planaire) a été obtenue en 2003 par Angel-Schramm.
- La famille  $(\mathbb{T}_\theta)_{0 \leq \theta < \frac{1}{2}}$  a été introduite par Curien en 2014. Pour  $\theta > 0$ , la triangulation  $\mathbb{T}_\theta$  est 'hyperbolique' : la taille des boules croît exponentiellement vite, la marche aléatoire est transiente...
- La limite  $\mathbb{T}_\theta$  est planaire ! Autour d'une arête typique  $e$  de  $T_{n,g}$ , on ne 'voit' pas le genre. Pourtant  $g \approx \theta n$ ...

# La convergence en dessin

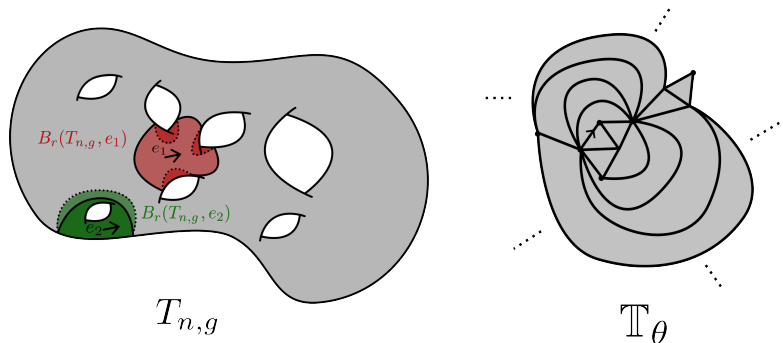


Figure – L'arête  $e_1$  est une arête choisie uniformément. L'arête  $e_2$  est très atypique : boule de rayon  $r$  (en vert) de genre 1.

- La loi de  $\mathbb{T}_\theta$  est caractérisée par les probabilités

$$\mathbb{P}\left(\text{Image} \subset \mathbb{T}_\theta\right)$$

- On cherche donc à calculer

$$\mathbb{P}\left(\text{Image} \subset (T_{n,g}, e)\right) = \mathbb{P}\left((T_{n,g}, e) = \text{Image}\right) = \frac{\tau_3(n-5, g)}{6n\tau(n, g)}$$

- Pour  $g = 0$ , c'est facile car on a des formules. Pour  $g \rightarrow +\infty$ , on est bloqué...
- La limite locale donne la convergence

$$\frac{\tau_3(n-5, g)}{6n\tau(n, g)} \rightarrow \mathbb{P}\left(\text{Image} \subset \mathbb{T}_\theta\right)$$

## Théorème (Lions, 2025+)

Soit  $\frac{g}{n} \rightarrow \theta \in [0, \frac{1}{2})$  et  $\begin{cases} p \rightarrow +\infty \\ p = o(n) \end{cases}$ . Notons  $e$  une arête distinguée choisie uniformément sur le bord  $T_{n,g,p}$ . On a la convergence en loi suivante :

$$(T_{n,g,p}, e) \rightarrow \mathbb{H}_\theta,$$

où  $\mathbb{H}_\theta$  est une triangulation infinie du demi-plan.

- La limite  $\mathbb{H}_\theta$  est la 'version' demi-plan de  $\mathbb{T}_\theta$ .
- Ce résultat est prouvé dans un cadre plus général où le nombre de bords n'est pas restreint.

# La convergence version demi-plan en dessin

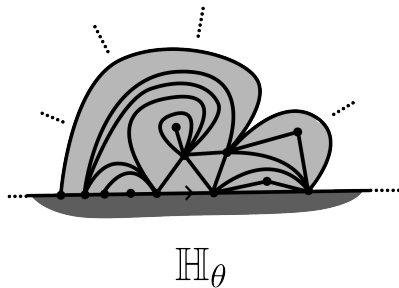
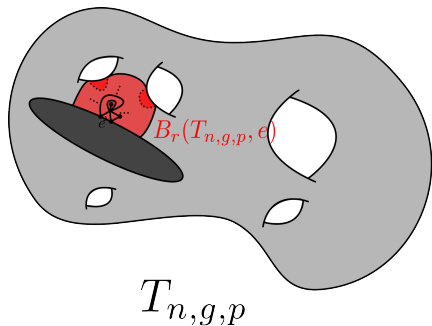


Figure – l'arête  $e$  est choisie uniformément sur le bord de  $T_{n,g,p}$ .

### Théorème (Budzinski-Chapuy-Louf, 2023)

Soit  $\frac{g}{n} \rightarrow \theta \in [0, \frac{1}{2})$ . Notons  $x_n, y_n$  deux sommets indépendants choisies uniformément sur  $T_{n,g}$ . Il existe deux constantes  $c_\theta, C_\theta > 0$ , tel que

$$\mathbb{P}(c_\theta \log(n) \leq d_{T_{n,g}}(x_n, y_n) \leq C_\theta \log(n)) \rightarrow 1.$$

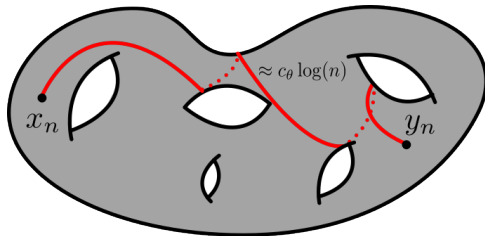
- Les constantes  $c_\theta, C_\theta > 0$  sont, a priori, non optimale.
- Un résultat similaire est obtenue pour le diamètre  $\text{diam}(T_{n,g})$ .

# Application : Distances typiques

## Théorème (Lions, 2025+)

Soit  $\frac{g}{n} \rightarrow \theta \in [0, \frac{1}{2})$ . Notons  $x_n, y_n$  deux sommets indépendants choisis uniformément sur  $T_{n,g}$ . Il existe une constante  $c_\theta > 0$  telle que

$$\frac{d_{T_{n,g}}(x_n, y_n)}{\log(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(\mathbb{P})} c_\theta.$$



# Application : Distances typique

- Conditionnellement à  $T_{n,g}$  et  $x_n$ , on peut écrire

$$\mathbb{P}(d_{T_{n,g}}(x_n, y_n) \leq r) = \frac{\#B_r(x_n)}{n+2-2g}.$$

- Il faut comprendre la croissance de  $\#B_r(x_n)$  en  $r$ .
- Conditionnellement à  $B_r(x_n)$ , la triangulation  $T_{n,g} \setminus B_r(x_n)$  suit la loi de  $T_{n-o(n), g-o(n), p_1, \dots, p_\ell}$ . On peut donc utiliser la limite locale des triangulations à bords pour passer de  $B_r(x_n)$  à  $B_{r+1}(x_n)$ .

