Massimo Pippi

Chargé de recherche au CNRS affecté au LAREMA

Titre : **Grothendieck et les conjectures de Weil. La topologie étale des schémas.**

Résumé : La géométrie algébrique est une branche de la mathématique qui étudie les formes géométriques définies par les solutions des systèmes de polynômes. Classiquement, ça signifie qu'on regarde les ensembles des solutions dans les corps des nombres réelles ou complexes. Toutefois, dans le cas d'un système de polynômes à coefficients entiers, on peut regarder les solutions dans d'autres corps tels que les corps finis (j'expliquerai ce que cela signifie)**.**

Donc, en partant d'un système de polynômes à coefficients entiers on peut produire des ensembles de nature apparemment très différente. D'une part, on a l'ensemble des solutions complexes, qui appartient au monde du continu. D'autre part, on a les ensembles des solutions dans les corps finis, qui par contre sont de nature discrète (il s'agit d'ensembles finis).

À la fin des années 1940 André Weil propose une série de conjectures spectaculaires qui mettent en évidence une relation profonde entre ces deux types d'objets différents. Il était motivé par sa preuve de ces conjectures dans le "cas des courbes".
Il est clair depuis le début que la clef pour expliquer ce lien découvert par Weil aurait été de disposer d'une "théorie cohomologique pour les ensembles de solutions d'un polynôme dans un corps fini".
On savait définir une telle théorie pour les ensembles de solutions dans le corps des nombres complexes, en utilisant de façon essentielle leur "nature continue".
D'autre part, l'existence d'une telle théorie pour des objets de nature discrète est restée conjecturale jusqu'au moment où Alexander Grothendieck a introduit ce qu'aujourd'hui on appelle "topologies de Grothendieck". Il s'agit d'une vraie révolution : cette notion est aujourd'hui à la base de beaucoup de concepts et de techniques en géométrie algébrique, géométrie analytique, théorie des nombres, logique...

Dans cet exposé, j'introduirai le concept de topologie de Grothendieck. Plus précisément je parlerai de la topologie étale des schémas, en expliquant le rôle crucial qu'elle a joué dans la résolution des conjectures de Weil.

Geoffrey Powell

Directeur de recherche au CNRS affecté au LAREMA,

Titre : **Motifs**

Résumé : Grothendieck a conçu l'idée des `motifs' pendant les années 1960 afin de pouvoir comparer les différentes théories de cohomologie dont on disposait en géométrie algébrique à l'époque. Plus tard, il a considéré que son `yoga des motifs' était « au cœur même de l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique ».

Le but de cet exposé est d'esquisser une réponse à la question suivante : qu'est-ce que c'est un motif ?

On introduira d'abord la cohomologie en topologie algébrique, un outil important qui fournit des invariants algébriques afin de pouvoir distinguer des espaces topologiques. Ensuite on considéra la notion appropriée de cohomologie en géométrie algébrique. Cela nous mènera aux « motifs purs » conçus par Grothendieck.

Bien qu'une partie de la théorie envisagée par Grothendieck reste conjecturale, ses Conjectures Standard sur les cycles algébriques ont été une grande source d'inspiration et forment une partie intégrale du `yoga des motifs'.

Si temps le permet, je donnerai quelques aperçus des progrès importants obtenus plus récemment à l'aide des « motifs mixtes » et leurs généralisations.