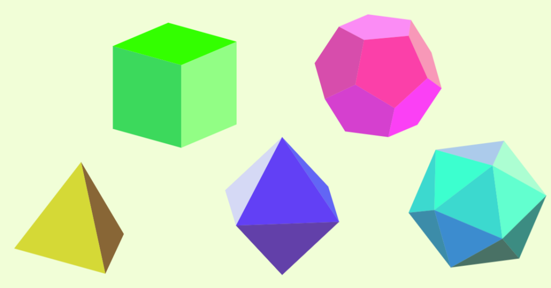
Pourquoi j'aime les mathématiques ?

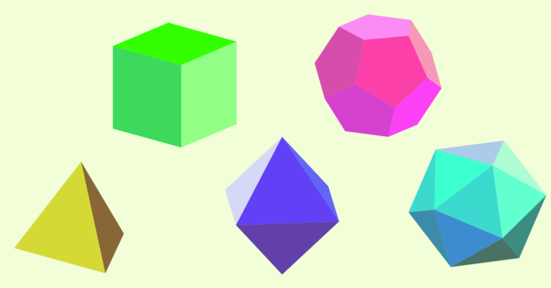
Marine Rougnant

Université Marie & Louis Pasteur (Besançon, France)

π-Day 2025
Top Sciences, Libreville, Gabon
15/03/25

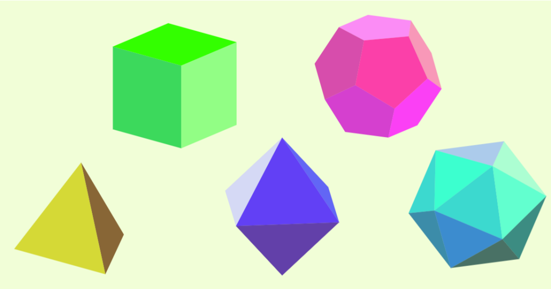


décrits dans *Le Timee* de Platon (358 av. JC)



décrits dans *Le Timee* de Platon (358 av. JC)

Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Icosaèdre	Dodécaèdre
4	6	8	20	12
Triangle	Carré	Triangle	Triangle	Pentagone



décrits dans *Le Timee* de Platon (358 av. JC)

Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Icosaèdre	Dodécaèdre
4	6	8	20	12
Triangle	Carré	Triangle	Triangle	Pentagone
Feu	Terre	Air	Eau	Univers, Ether

Comment caractériser les solides de Platon ?

Comment caractériser les solides de Platon ?

Définition : polyèdre régulier

Un polyèdre est dit régulier lorsque :

- toutes ses faces sont identiques et régulières (équiltérales et équiangles)
- le même nombre d'arrêtes arrive à chaque sommet.

Comment caractériser les solides de Platon ?

Définition : polyèdre régulier

Un polyèdre est dit régulier lorsque :

- toutes ses faces sont identiques et régulières (équiltérales et équiangles)
- le même nombre d'arrêtes arrive à chaque sommet.

Définition : polyèdre convexe

Un polyèdre est dit convexe si les segments joignant deux de ses points quelconques sont entièrement inclus dans la portion d'espace qu'il délimite.

Comment caractériser les solides de Platon ?

Définition : polyèdre régulier

Un polyèdre est dit régulier lorsque :

- toutes ses faces sont identiques et régulières (équiltérales et équiangles)
- le même nombre d'arrêtes arrive à chaque sommet.

Définition : polyèdre convexe

Un polyèdre est dit convexe si les segments joignant deux de ses points quelconques sont entièrement inclus dans la portion d'espace qu'il délimite.

$\rightsquigarrow$ Les solides de Platons sont des polyèdres réguliers et convexes !

Les solides de Platon

Théorème :

Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes : ce sont les solides de Platon.

Théorème :

Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes : ce sont les solides de Platon.

Preuve : (Eléments d'Euclide, Livre XIII, Prob.2.Prop.XIII)
IIIème sicècle avant JC, traduction de 1632

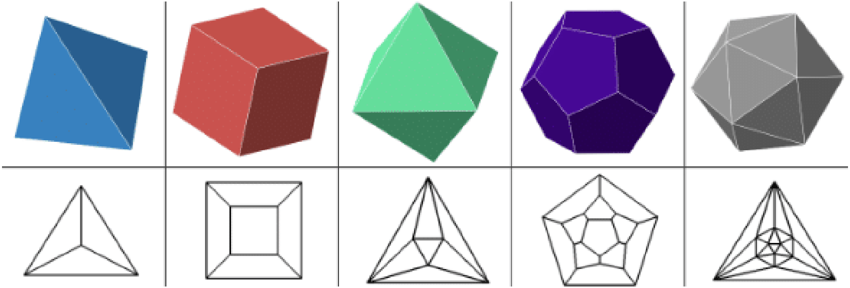
SCHOLIE.

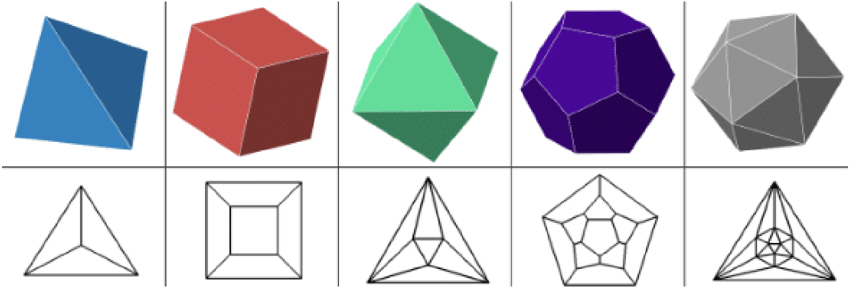
Or outre les cinq figures ſolides cy-deſſus declarees, on n'en peut pas trouuer d'autres compriſes de ſuperficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou de deux autres ſuperficies planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouuant iceux conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide : de quatre, l'angle de l'octaedre : de cinq, l'angle de l'icoſaedre : de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide : car iceux ſont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle ſolide, doiuent eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. pr. 11. Par meſme raiſon on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube : de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide : car ce ſeroit touſiours contreuenir à la 21. prop. 11. L'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangles : De quatre pentagones il ſera impoßible, eſtans iceux plus grans que quatre droicts, puis que chacun vaut les ſix quints d'vn droict par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuiuroit touſiours la meſme abſurdité. Partant il eſt euident qu'outre les cinq figures regulieres cy-deſſus declarees, on n'en trouuera point d'autres equilateres & equiangles.

Caractéristique d'Euler (René Descartes (1596 ; 1650) ; Euler (1752))
Dans un polyèdre convexe :

$$V - E + F = 2$$

où :
V est le nombre de sommets,
E est le nombre d'arêtes,
F est le nombre de faces.

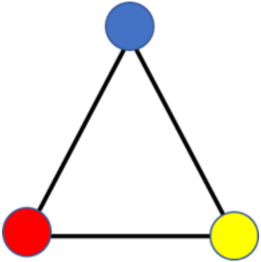




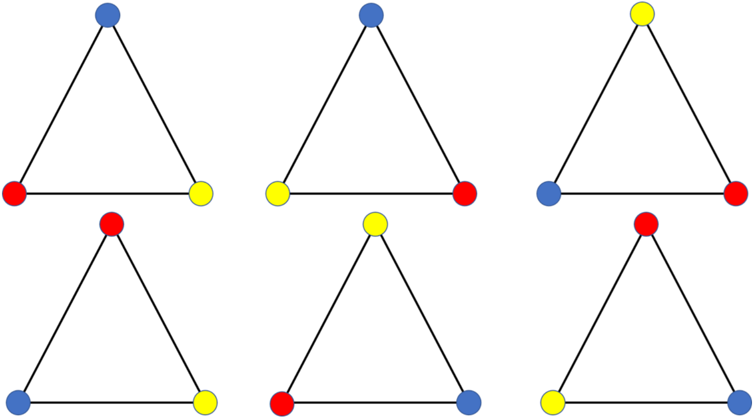
Théorème :

La caractéristique d'Euler reste vraie pour les graphes.

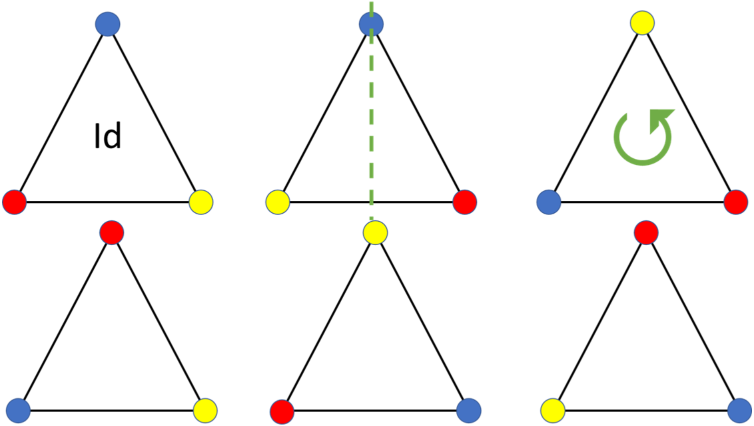
Les groupes d'isométries des polyèdres sont les ensembles de transformations (rotations, réflexions) qui préservent leur forme.



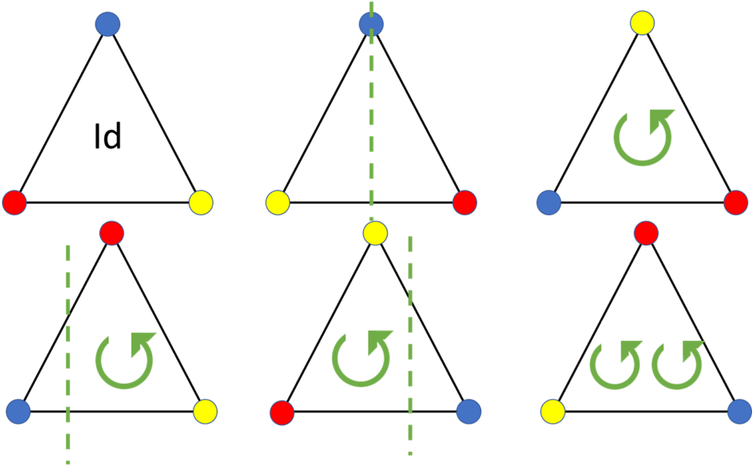
Les groupes d'isométries des polyèdres sont les ensembles de transformations (rotations, réflexions) qui préservent leur forme.

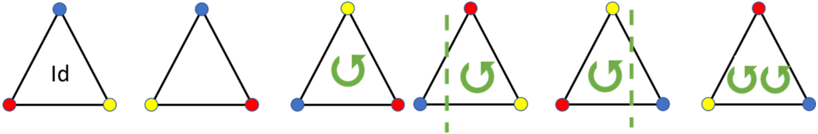


Les groupes d'isométries des polyèdres sont les ensembles de transformations (rotations, réflexions) qui préservent leur forme.

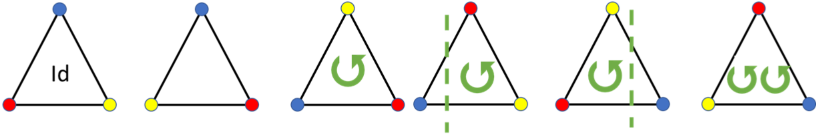


Les groupes d'isométries des polyèdres sont les ensembles de transformations (rotations, réflexions) qui préservent leur forme.





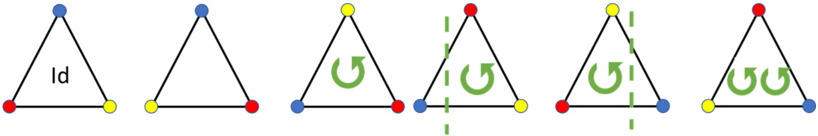
L'ensemble des isométries du triangle équilatéral est :



L'ensemble des isométries du triangle équilatéral est :

- une collection de 6 éléments :

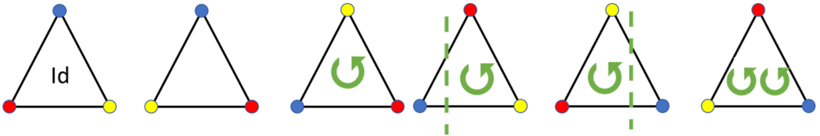
Groupe d'isométries



L'ensemble des isométries du triangle équilatéral est :

- une collection de 6 éléments :

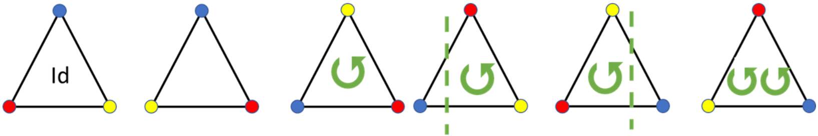
- engendrée par deux éléments : et



L'ensemble des isométries du triangle équilatéral est :

- une collection de 6 éléments :

- engendrée par deux éléments : et
- que l'on peut associer suivant *une loi de composition*



L'ensemble des isométries du triangle équilatéral est :

- une collection de 6 éléments :

- engendrée par deux éléments : et
- que l'on peut associer suivant *une loi de composition*

C'est ce qu'on appelle un groupe !

$$x-1$$

$$1$$

$$id$$

$$x - 1$$

$$1$$

$$id$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

1 et 2

$$(1,2), (2,1)$$

Groupe de permutations

$$x-1$$

$$1$$

$$id$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

1 et 2

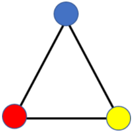
$$(1,2),(2,1)$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

1 et 2 et 3

$$(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),$$

$$(3,2,1),(1,3,2),(2,3,1)$$



L'ensemble formé des permutations d'un ensemble de n éléments est appelé *groupe symétrique*.

L'ensemble formé des permutations d'un ensemble de n éléments est appelé *groupe symétrique*.

Théorème de Cayley

Tout groupe est sous-groupe d'un groupe symétrique.

Merci de votre attention !