Polyominos Parallélogrammes Périodiques

Patxi Laborde-Zubieta

en collaboration avec

Jean-Christophe Aval et Adrien Boussicault

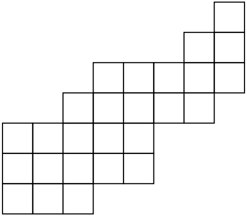
LaBRI - Université de Bordeaux

Journées du GT Combinatoire Algébrique - 6 Septembre

Plan

Polyominos Parallélogrammes

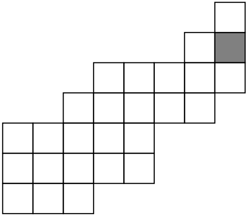
Un *polyomino parallélogramme* est un ensemble de cellules dont la frontière se décompose en deux chemins : un chemin supérieur et un chemin inférieur. Ils sont composés de pas Est et Nord, et ils se touchent uniquement au départ et à l'arrivée.



Polyominos Parallélogrammes Périodiques

(Biagioli, Bousquet-Mélou, Jouhet, Nadeau)

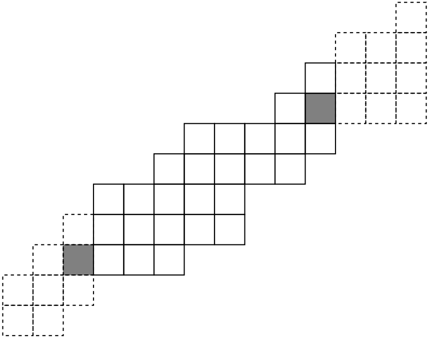
Un *polyomino parallélogramme périodique* (PPP) est un polyomino parallélogramme dont on marque une cellule de la colonne la plus à droite.



Polyominos Parallélogrammes Périodiques

(Biagioli, Bousquet-Mélou, Jouhet, Nadeau)

Un *polyomino parallélogramme périodique* (PPP) est un polyomino parallélogramme dont on marque une cellule de la colonne la plus à droite.

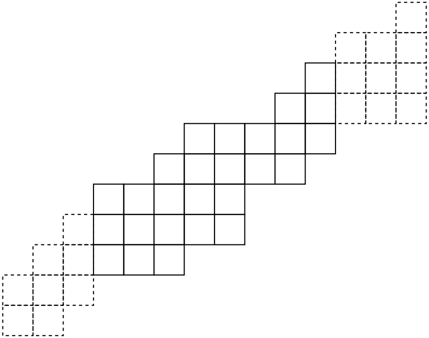


Le marquage correspond à l'endroit où on recolle les deux colonnes extrémales.

Polyominos Parallélogrammes Périodiques

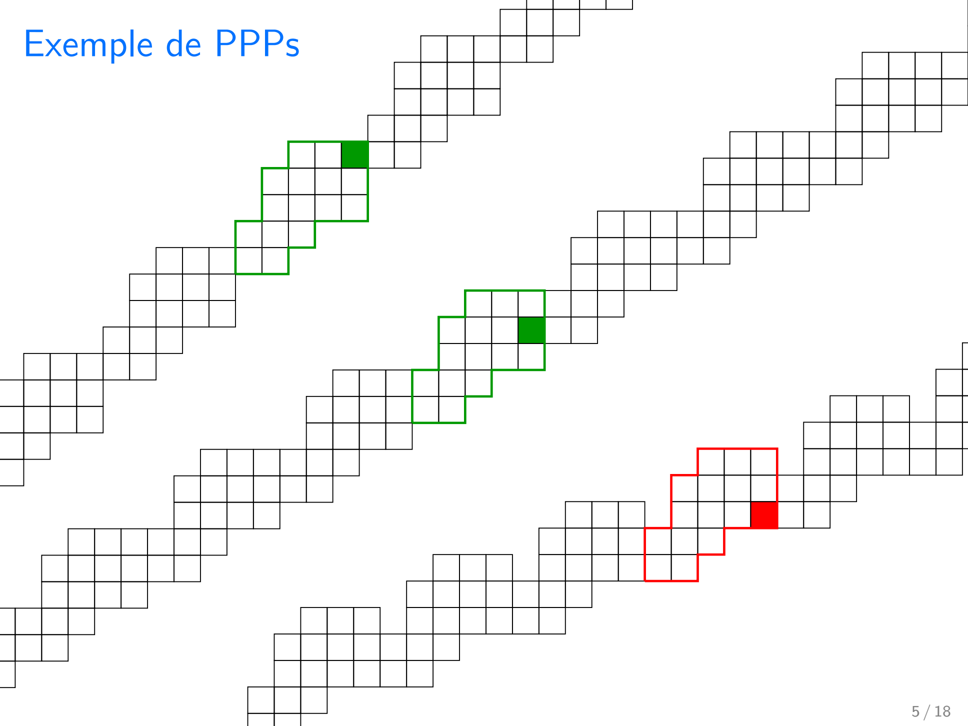
(Biagioli, Bousquet-Mélou, Jouhet, Nadeau)

Un *polyomino parallélogramme périodique* (PPP) est un polyomino parallélogramme dont on marque une cellule de la colonne la plus à droite.



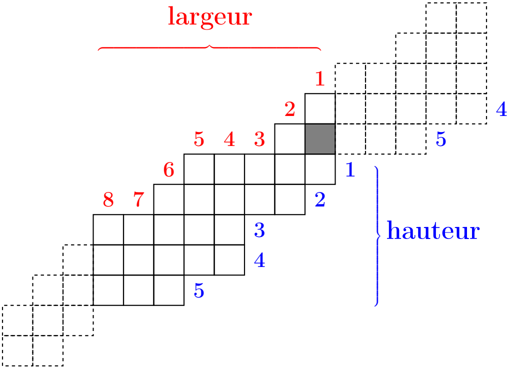
Le marquage correspond à l'endroit où on recolle les deux colonnes extrémales.

Exemple de PPPs



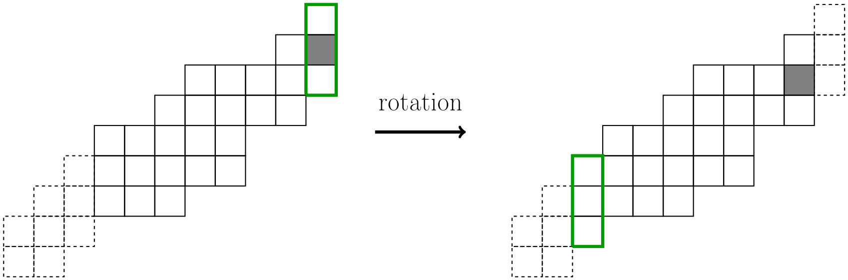
Hauteur, largeur, demi-périmètre

- *hauteur* : le nombre de lignes sous la ligne marquée
- *largeur* : le nombre de colonnes
- *demi-perimètre* : la hauteur + la largeur

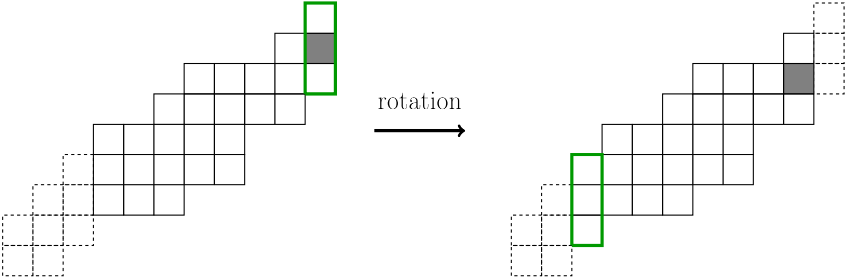


Dans cet exemple, largeur = 8 et hauteur = 5.

Rotation et bandes

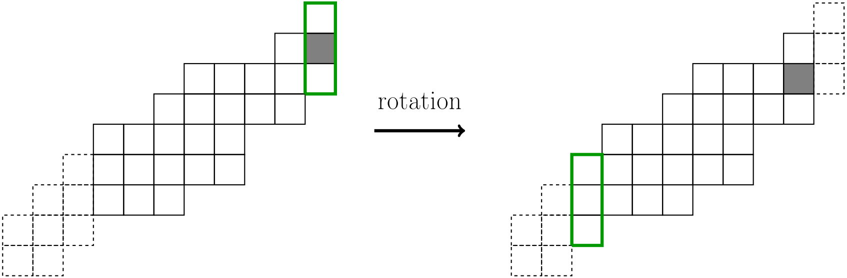


Rotation et bandes



Bandes : classes d'équivalences induites par la rotation.

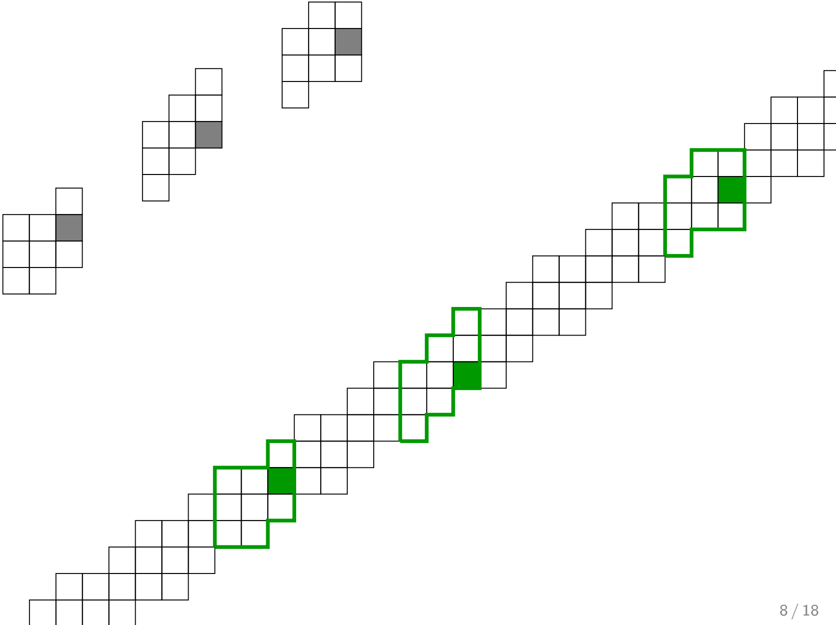
Rotation et bandes



Bandes : classes d'équivalences induites par la rotation.

On étend les notions *largeur*, *hauteur* et *demi-périmètre* aux bandes.

Exemple de bande

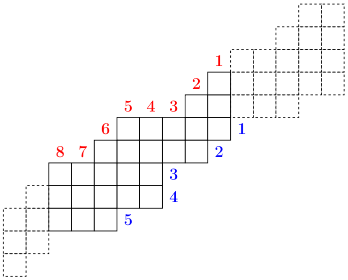


Plan

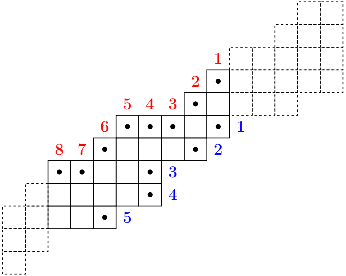
Définitions

Décomposition des PPPs en arbres ordonnées

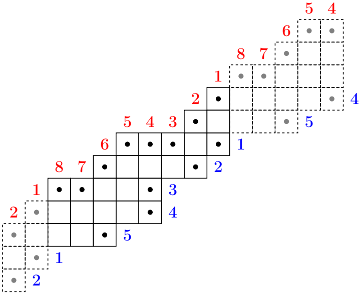
Le graphe sous-jacent d'un PPP



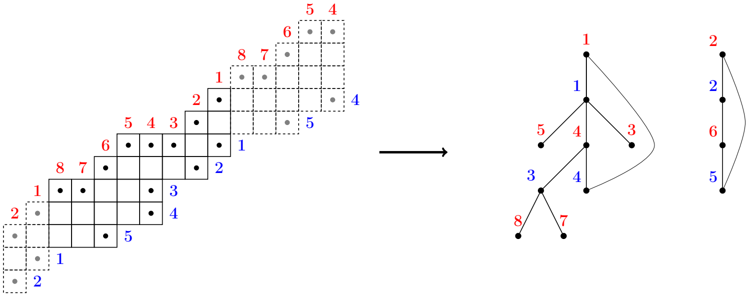
Le graphe sous-jacent d'un PPP



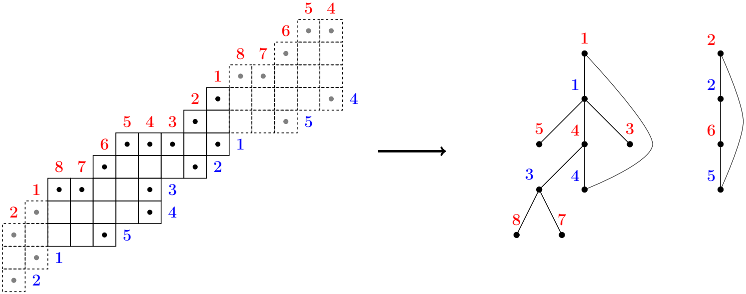
Le graphe sous-jacent d'un PPP



Le graphe sous-jacent d'un PPP

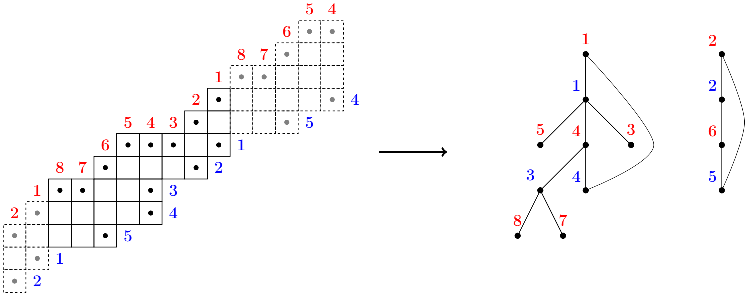


Le graphe sous-jacent d'un PPP



On conserve l'ordre des fils.

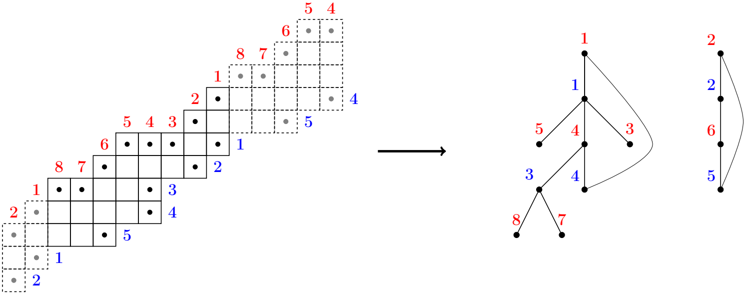
Le graphe sous-jacent d'un PPP



On conserve l'ordre des fils.

Le graphe est biparti, donc chaque cycle est de taille paire.

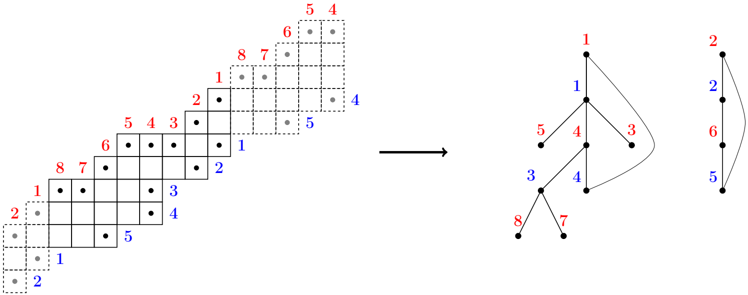
Le graphe sous-jacent d'un PPP



On conserve l'ordre des fils.

Le graphe est biparti, donc chaque cycle est de taille paire.
Demi-périmètre = nombre de sommets.

Le graphe sous-jacent d'un PPP

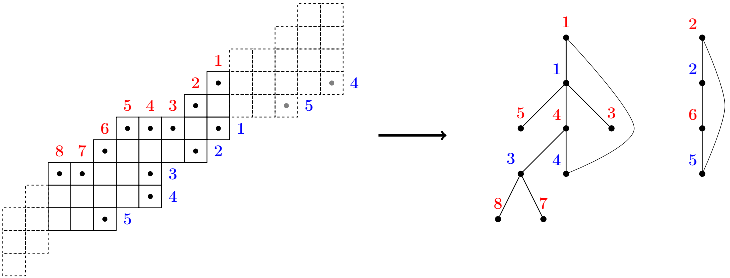


On conserve l'ordre des fils.

Le graphe est biparti, donc chaque cycle est de taille paire.
Demi-périmètre = nombre de sommets.
Le graphe est stable par rotation.

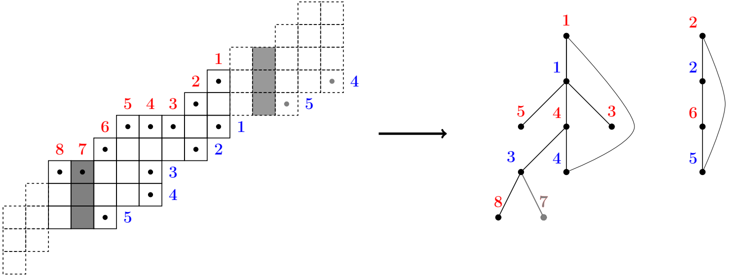
Élagage

Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



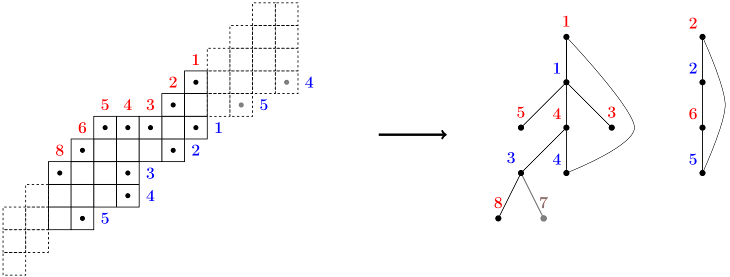
Élagage

Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



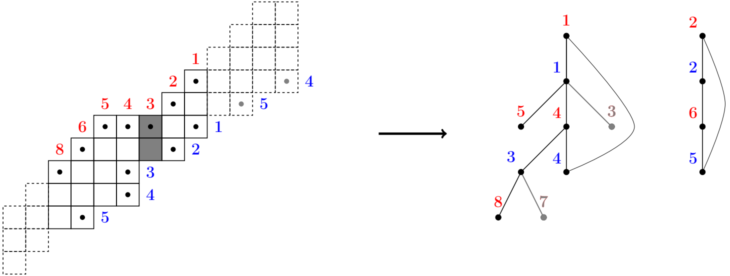
Élagage

Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



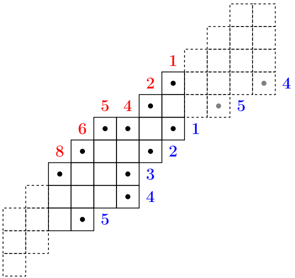
Élagage

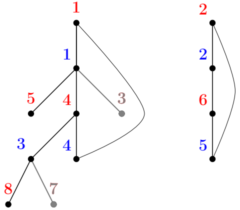
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Élagage

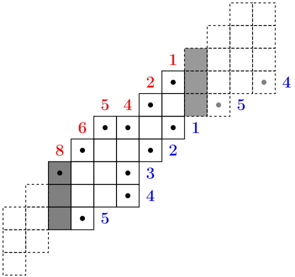
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.

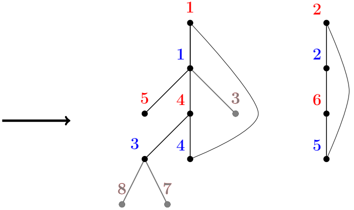




Élagage

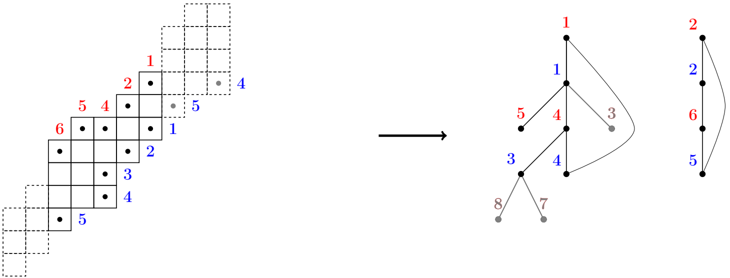
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.





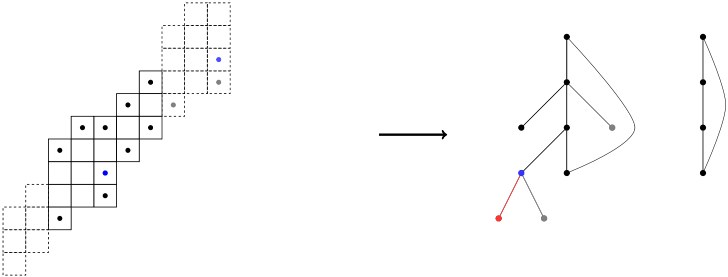
Élagage

Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Élagage

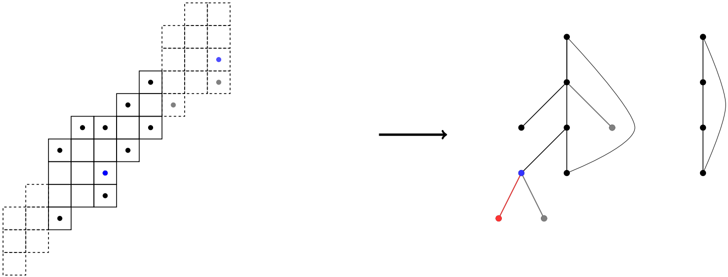
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Comment reconstruit-on la colonne correspondant à la feuille ?

Élagage

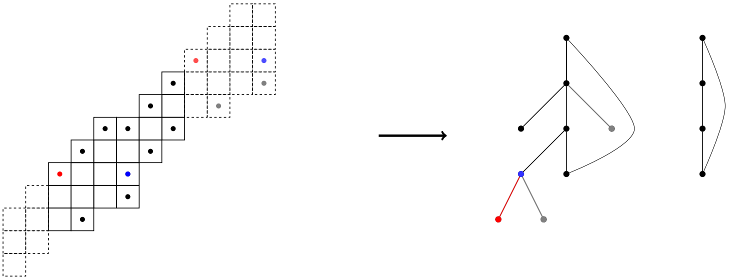
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Comment reconstruit-on la colonne correspondant à la feuille ?
Il y a deux possibilités.

Élagage

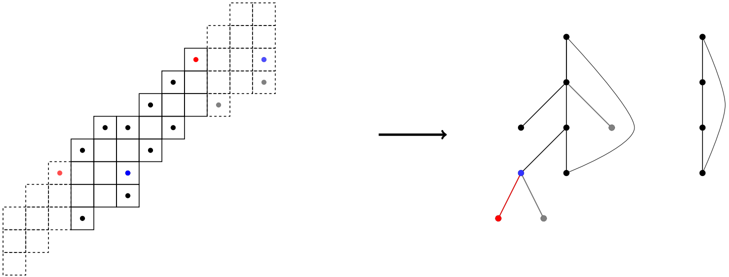
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Comment reconstruit-on la colonne correspondant à la feuille ?
Il y a deux possibilités.

Élagage

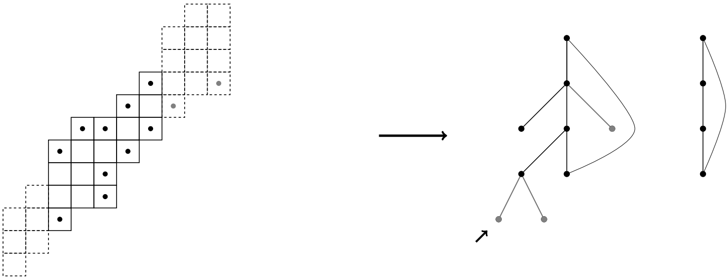
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



Comment reconstruit-on la colonne correspondant à la feuille ?
Il y a deux possibilités.

Élagage

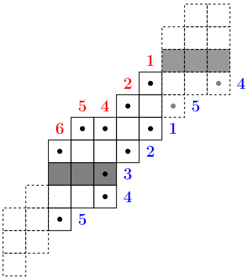
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



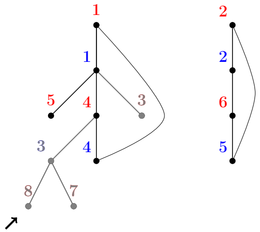
On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

Élagage

Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



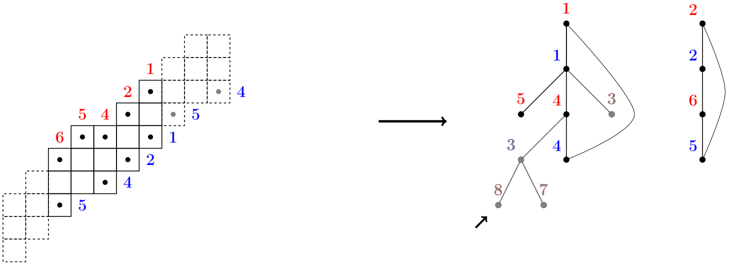
$\longrightarrow$



On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

Élagage

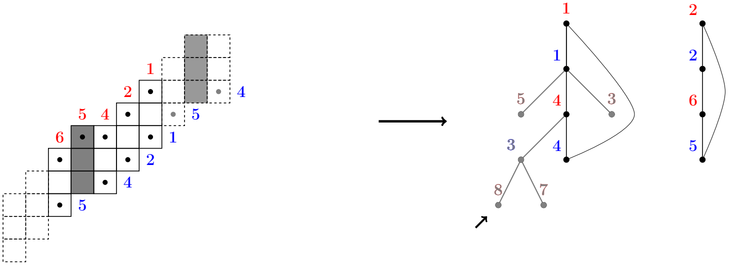
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

Élagage

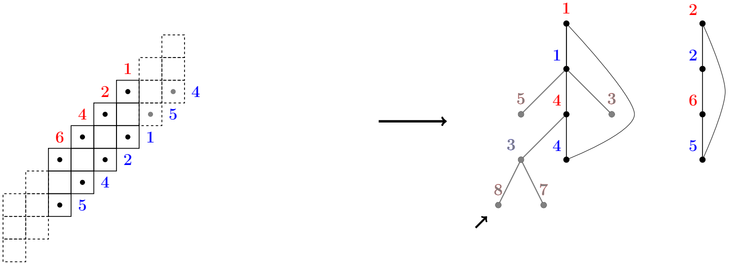
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

Élagage

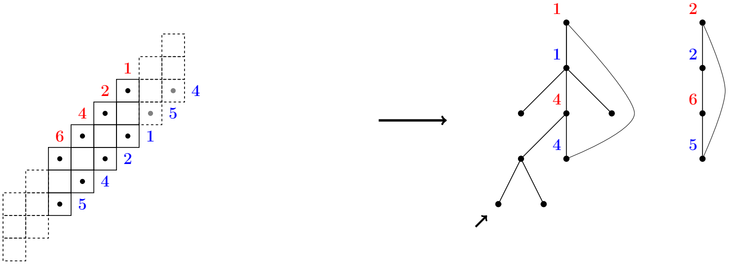
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

Élagage

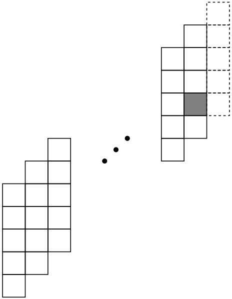
Élaguer un PPP consiste à supprimer récursivement les lignes et les colonnes correspondant aux feuilles du graphe sous-jacent.



On marque le sommet correspondant à la colonne la plus à gauche.

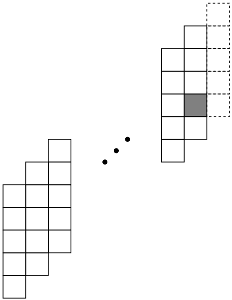
PPP tronc + épaisseur intrinsèque

L'élagage d'un PPP donne toujours un PPP de la forme,



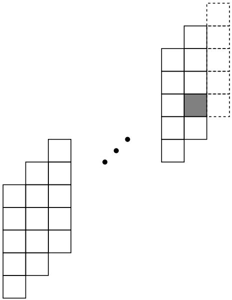
PPP tronc + épaisseur intrinsèque

L'élagage d'un PPP donne toujours un PPP de la forme, on les appelles les *PPP troncs*.



PPP tronc + épaisseur intrinsèque

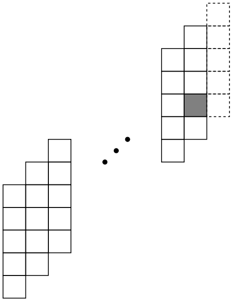
L'élagage d'un PPP donne toujours un PPP de la forme, on les appelles les *PPP troncs*.



Épaisseur intrinsèque (PPP tronc): hauteur d'une colonne moins 1.

PPP tronc + épaisseur intrinsèque

L'élagage d'un PPP donne toujours un PPP de la forme, on les appelles les *PPP troncs*.

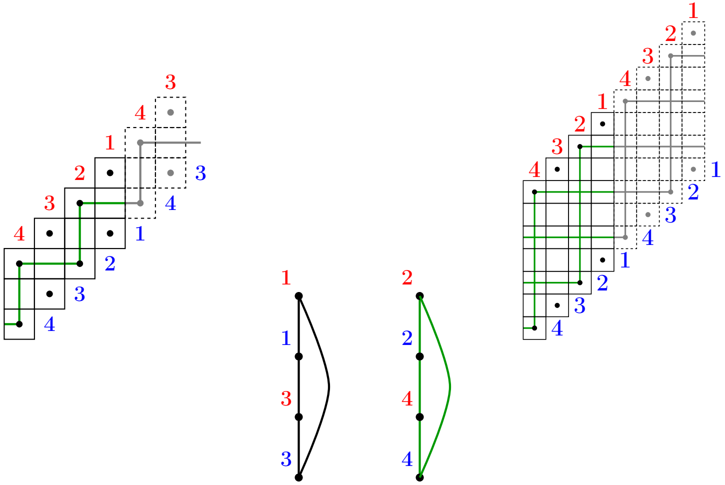


Épaisseur intrinsèque (PPP tronc): hauteur d'une colonne moins 1.

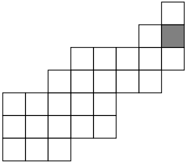
L'épaisseur intrinsèque d'un PPP quelconque, correspond à l'épaisseur intrinsèque du PPP tronc obtenu après élagage.

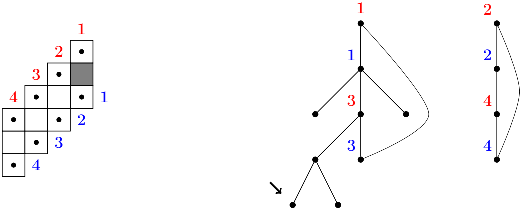
Le graphe sous-jacent d'un PPP tronc

Le graphe sous-jacent d'un PPP tronc est une union disjointe de cycles de même taille paire. Deux PPP troncs différents peuvent avoir le même graphe sous-jacent.

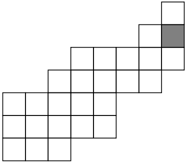


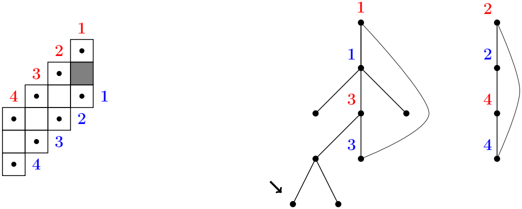
Décomposition d'un PPP en arbres



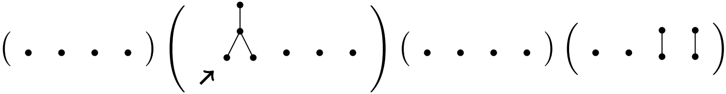


Décomposition d'un PPP en arbres

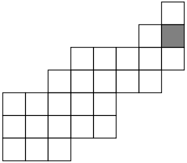


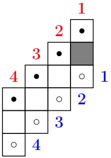


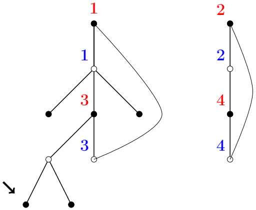
$e_{int} = 2$



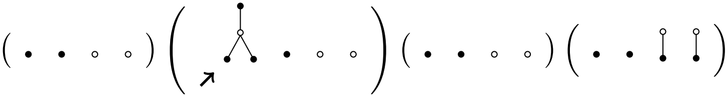
Décomposition d'un PPP en arbres



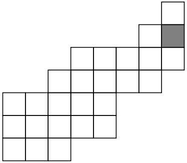


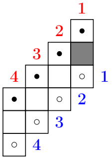


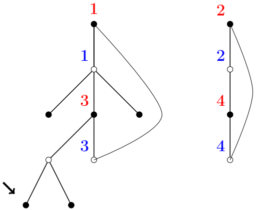
$e_{int} = 2$



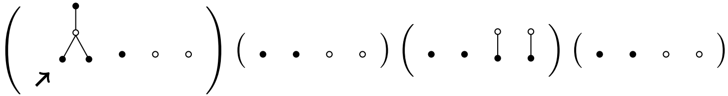
Décomposition d'un PPP en arbres







$e_{int} = 2$



PPPs : bijection et énumeration

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

PPPs : bijection et énumeration

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

La suite énumérant les PPPs selon leur demi-périmètre, à épaisseur intrinsèque fixée, correspond à $(4^{n-1} - \binom{2n-1}{n-1})_{n \geqslant 1}$ (A008549).

PPPs : bijection et énumeration

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

La suite énumérant les PPPs selon leur demi-périmètre, à épaisseur intrinsèque fixée, correspond à $(4^{n-1} - \binom{2n-1}{n-1})_{n\geqslant 1}$ (A008549). Elle compte :

- La somme des aires sous les chemins de Dyck de taille $n-1$.
- Le nombre d'inversions dans les permutations de taille n évitant 321.

PPPs: bijection, fonction génératrice.

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

PPPs: bijection, fonction génératrice.

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

$$\mathcal{A}_\bullet(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\circ \mathcal{A}_\circ} \text{ et } \mathcal{A}_\circ(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\bullet \mathcal{A}_\bullet}.$$

PPPs: bijection, fonction génératrice.

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

$$\mathcal{A}_\bullet(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\circ \mathcal{A}_\circ} \text{ et } \mathcal{A}_\circ(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\bullet \mathcal{A}_\bullet}.$$

$$PPP(z_\bullet, z_\circ) = z_\bullet \partial_{z_\bullet} z_\bullet z_\circ {\mathcal{A}_\bullet}^2 {\mathcal{A}_\circ}^2 \times \frac{1}{1 - z_\bullet z_\circ {\mathcal{A}_\bullet}^2 {\mathcal{A}_\circ}^2}.$$

PPPs: bijection, fonction génératrice.

Theorem

PPPs (de forme non rectangulaire) sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'une liste de 4-uplets d'arbres bicolorés tels que :

- *chaque 4-uplet est composé de deux arbres à racine noires et deux arbres à racine blanche.*
- *un sommet noir est marqué dans le premier 4-uplet.*

$$\mathcal{A}_\bullet(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\circ \mathcal{A}_\circ} \text{ et } \mathcal{A}_\circ(z_\bullet, z_\circ) = \frac{1}{1 - z_\bullet \mathcal{A}_\bullet}.$$

$$PPP(z_\bullet, z_\circ) = z_\bullet \partial_{z_\bullet} z_\bullet z_\circ {\mathcal{A}_\bullet}^2 {\mathcal{A}_\circ}^2 \times \frac{1}{1 - z_\bullet z_\circ {\mathcal{A}_\bullet}^2 {\mathcal{A}_\circ}^2}.$$

$$PPP(z, z) = \frac{zC(z)^2}{1 - 4z}, \text{ où } \mathcal{C}(z) = \frac{z}{1 - \mathcal{C}(z)}.$$

Bandes: bijection, fonction génératrice

Theorem

Les bandes sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'un cycle de 4-uplets d'arbres planaires.

Bandes: bijection, fonction génératrice

Theorem

Les bandes sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'un cycle de 4-uplets d'arbres planaires.

Par la théorie de Pólya, la fonction génératrice des Bandes, comptée selon le demi-périmètre, à épaisseur intrinsèque fixée est

$$B(z) = -\sum_{i \geqslant 1} \frac{\varphi(i)}{i} \log(1 - z^{2i}\mathcal{A}(z^i)^4),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler, et

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{1 - z\mathcal{A}(z)}.$$

Bandes: bijection, fonction génératrice

Theorem

Les bandes sont en bijection avec les couples composés d'un entier non nul correspondant à l'épaisseur intrinsèque et d'un cycle de 4-uplets d'arbres planaires.

Par la théorie de Pólya, la fonction génératrice des Bandes, comptée selon le demi-périmètre, à épaisseur intrinsèque fixée est

$$B(z) = -\sum_{i \geqslant 1} \frac{\varphi(i)}{i} \log(1 - z^{2i} \mathcal{A}(z^i)^4),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler, et

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{1 - z\mathcal{A}(z)}.$$

Premiers termes :

$$B(z) = z^2 + 4z^3 + 15z^4 + 52z^5 + 190z^6 + 680z^7 + \cdots$$

Merci.