Algorithmes d'insertion pour tableaux de dominos décalés

Zakaria Chemli, Mathias Pétréolle

Journées du GT CombAlg,
3-4 Septembre 2016

Plan

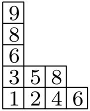
1. Tableaux de dominos décalés
2. Algorithmes d'insertion

Plan

Introduction

Tableaux de Young : (Young)

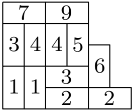
- Fonctions de Schur
- Monoïde plaxique (Lascoux, Schützenberger)



→

Tableaux de dominos : (Young)

- Produit de deux fonctions de Schur
- Super monoïde plaxique (Carré, Leclerc)

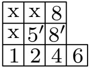


↓

↓

Tableaux de Young décalés : (Sagan, Worley)

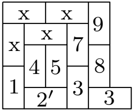
- Fonctions P et Q-Schur
- Monoïde plaxique décalé (Serrano)



→

Tableaux de dominos décalés : (Chemli)

- Produit de deux fonctions P et Q-Schur
- Super monoïde plaxique décalé



Tableaux de Young

Une partition λ de n est une suite décroissante $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. On représente une partition par son diagramme de Ferrers.

Tableaux de Young

Une partition λ de n est une suite décroissante $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. On représente une partition par son diagramme de Ferrers.

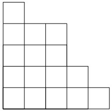


FIGURE: Le diagramme de Ferrers de λ=(5,4,3,3,1)

Tableaux de Young

Une partition λ de n est une suite décroissante $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. On représente une partition par son diagramme de Ferrers.

9				
5	7	9		
4	5	5		
2	3	4	6	
1	1	3	4	7

FIGURE: Un tableau de Young de forme λ=(5,4,3,3,1)

Un tableau de Young est un remplissage d'un diagramme de Ferrers par des entiers strictement positifs tel que les lignes soient croissantes de gauche à droite, et les colonnes soient strictement croissantes de bas en haut.

Pavage par dominos

Deux cases adjacentes d'un diagramme forment un domino :

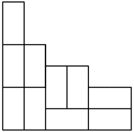
 ou 

Pavage par dominos

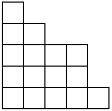
Deux cases adjacentes d'un diagramme forment un domino :

 ou 

Un diagramme est pavable si il peut être entièrement recouvert par des dominos non-intersectant.



pavable



non pavable

Tableau de domino

Étant donné une partition pavée λ, un tableau de domino est :

- un remplissage des dominos par des entiers strictement positifs
- les lignes soient croissantes de gauche à droite
- les colonnes soient strictement croissantes de bas en haut

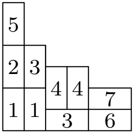
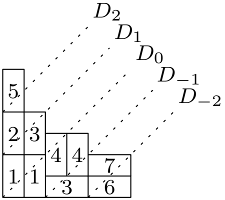


Tableau de domino

Étant donné une partition pavée λ, un tableau de domino est :

- un remplissage des dominos par des entiers strictement positifs
- les lignes soient croissantes de gauche à droite
- les colonnes soient strictement croissantes de bas en haut

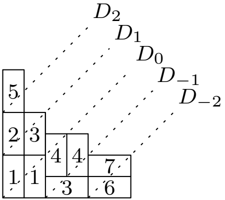


$D_k : y = x + 2k$

Tableau de domino

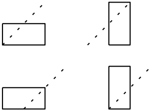
Étant donné une partition pavée λ, un tableau de domino est :

- un remplissage des dominos par des entiers strictement positifs
- les lignes soient croissantes de gauche à droite
- les colonnes soient strictement croissantes de bas en haut



$D_k : y = x + 2k$

2 types de dominos :



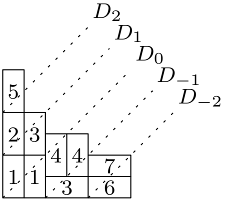
gauche

droit

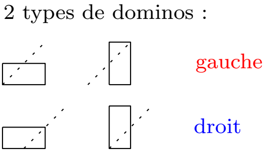
Tableau de domino

Étant donné une partition pavée λ, un tableau de domino est :

- un remplissage des dominos par des entiers strictement positifs
- les lignes soient croissantes de gauche à droite
- les colonnes soient strictement croissantes de bas en haut



$D_k : y = x + 2k$



Remarque

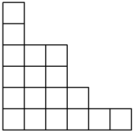
Si un tableau de domino ne contient qu'un seul type de domino, alors on peut le transformer en un tableau de Young.

2-quotient d'une partition

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :

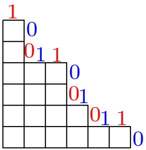
2-quotient d'une partition

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :



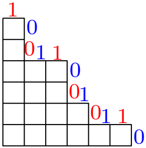
2-quotient d'une partition

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :



$w_\lambda = 100110010110$

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :

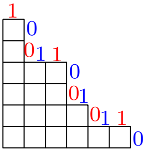


$$w_\lambda = 100110010110$$

$$w_\mu = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

2-quotient d'une partition

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :

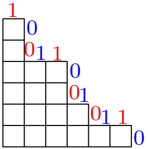


$$w_\lambda = 100110010110$$

$$w_\mu = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

$$w_\nu = \ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$$

Le 2-quotient d'une partition λ est une paire de partition (μ, ν) obtenue de la manière suivante :



$$w_\lambda = 100110010110$$

$$w_\mu = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

$$w_\nu = 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$$

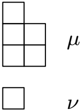
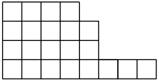


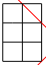
Diagramme décalé pavable

Une partition λ de 2-quotient (μ, ν) est une partition décalée pavable si les dernières parts de μ et ν sont supérieures ou égales à leurs longueurs.



$\mu = (2, 2)$

$\nu = (4, 3)$

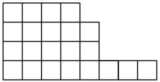


$\mu = (1, 1)$

$\nu = (1)$

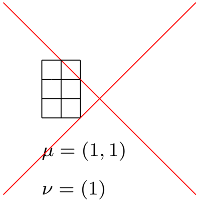
Diagramme décalé pavable

Une partition λ de 2-quotient (μ, ν) est une partition décalée pavable si les dernières parts de μ et ν sont supérieures ou égales à leurs longueurs.



$\mu = (2, 2)$

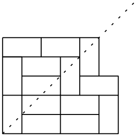
$\nu = (4, 3)$



$\mu = (1, 1)$

$\nu = (1)$

Un pavage d'une telle partition est admissible ssi il n'y a pas de domino vertical d sur D_0 tel que d ait pour seul domino adjacent à gauche un domino strictement au dessus de D_0.

admissible 

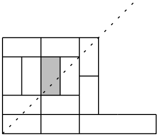
 non admissible

Tableau de domino décalé

Étant donné un pavage admissible d'une partition décalée, un tableau de domino décalé est :

- un remplissage des domino au dessus de D_0 par x

Tableau de domino décalé

Étant donné un pavage admissible d'une partition décalée, un tableau de domino décalé est :

- un remplissage des domino au dessus de D_0 par x
- un remplissage des autres dominos par des chiffres dans $\{1' < 1 < 2' < 2 < \cdots\}$

Tableau de domino décalé

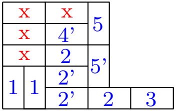
Étant donné un pavage admissible d'une partition décalée, un tableau de domino décalé est :

- un remplissage des domino au dessus de D_0 par x
- un remplissage des autres dominos par des chiffres dans $\{1' < 1 < 2' < 2 < \cdots\}$
- les lignes et les colonnes sont croissantes
- un chiffre sans ' apparait au plus une fois par colonne
- un chiffre avec ' apparait au plus une fois par ligne

Tableau de domino décalé

Étant donné un pavage admissible d'une partition décalée, un tableau de domino décalé est :

- un remplissage des domino au dessus de D_0 par x
- un remplissage des autres dominos par des chiffres dans $\{1' < 1 < 2' < 2 < \cdots\}$
- les lignes et les colonnes sont croissantes
- un chiffre sans ' apparait au plus une fois par colonne
- un chiffre avec ' apparait au plus une fois par ligne



Plan

Colonne et ligne

Si un domino est composé des cases (a, b) et (c, d), on définit sa

- ligne par $a + c - 1$

Colonne et ligne

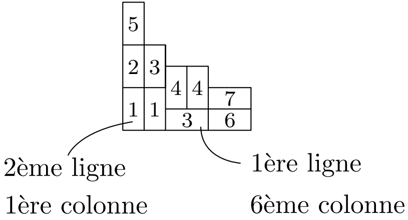
Si un domino est composé des cases (a, b) et (c, d), on définit sa

- ligne par $a + c - 1$
- colonne par $b + d - 1$

Colonne et ligne

Si un domino est composé des cases (a, b) et (c, d), on définit sa

- ligne par $a + c - 1$
- colonne par $b + d - 1$



Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme f bijectif qui prend en argument un mot bicolore et qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,

Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme f bijectif qui prend en argument un mot bicolore et qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*

Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme f bijectif qui prend en argument un mot bicolore et qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*
- *P est sans ' sur la diagonale*

Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme f bijectif qui prend en argument un mot bicolore et qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*
- *P est sans ' sur la diagonale*
- *Q est standard*

Algorithme d'insertion

On considère des mots bicolores d'entiers strictement positifs, c'est à dire des éléments de $(\mathbb{N}^* \times \{G, D\})^*$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme f bijectif qui prend en argument un mot bicolore et qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*
- *P est sans ' sur la diagonale*
- *Q est standard*

C'est un algorithme d'insertion : on insère lettre par lettre

Fonctionnement de l'algorithme

Si on veut insérer une lettre a_* avec $* \in \{G, D\}$:

Fonctionnement de l'algorithme

Si on veut insérer une lettre a_* avec $* \in \{G, D\}$:
On insère initialement en ligne, en autorisant à choquer :

- un domino $> a$
- un domino a horizontal de couleur différente si a est sans '
- un domino a vertical de couleur différente si a est avec '

Fonctionnement de l'algorithme

Si on veut insérer une lettre a_* avec $* \in \{G, D\}$:
On insère initialement en ligne, en autorisant à choquer :

- un domino $> a$
- un domino a horizontal de couleur différente si a est sans '
- un domino a vertical de couleur différente si a est avec '

Si on ne peut ni insérer ni choquer sur une ligne, on passe à celle au dessus.

Fonctionnement de l'algorithme

Si on veut insérer une lettre a_* avec $* \in \{G, D\}$:
On insère initialement en ligne, en autorisant à choquer :

- un domino $> a$
- un domino a horizontal de couleur différente si a est sans '
- un domino a vertical de couleur différente si a est avec '

Si on ne peut ni insérer ni choquer sur une ligne, on passe à celle au dessus.

Si on choque une case :

- qui est sur D_0 et de la même couleur que a_*, on insère son contenu en colonne avec un '
- qui n'est pas sur D_0, a un ', et est de la même couleur que a_*, on insère en colonne
- dans tous les autres cas, on insère en ligne

On complète le Q-symbole pour qu'il ait la même forme que le P-symbole

Propriétés de l'algorithme

Propriétés

- Le nombre de domino gauche ne dépend pas du pavage choisi, seulement de la forme du tableau

Propriétés de l'algorithme

Propriétés

- Le nombre de domino gauche ne dépend pas du pavage choisi, seulement de la forme du tableau
- Dans le Q-symbole, le caractère gauche ou droit de la case nous dit la couleur de la lettre insérée

Propriétés de l'algorithme

Propriétés

- Le nombre de domino gauche ne dépend pas du pavage choisi, seulement de la forme du tableau
- Dans le Q-symbole, le caractère gauche ou droit de la case nous dit la couleur de la lettre insérée
- L'insertion d'une lettre ne change pas les diagonales auxquelles appartiennent les dominos de l'autre couleur.

Propriétés de l'algorithme

Propriétés

- Le nombre de domino gauche ne dépend pas du pavage choisi, seulement de la forme du tableau
- Dans le Q-symbole, le caractère gauche ou droit de la case nous dit la couleur de la lettre insérée
- L'insertion d'une lettre ne change pas les diagonales auxquelles appartiennent les dominos de l'autre couleur.
- Deux mots qui diffèrent par des commutations de lettres de couleurs différentes donnent le même P-symbole.

Conséquences algébriques

Théorème (Chemli, P. (2016))

Soit w_1 un mot de couleur gauche ayant μ pour forme de P-symbole, et w_2 un mot de couleur droite ayant ν pour forme de P-symbole. Soit λ la forme P-symbole du mot $w_1 w_2$. On a :

$$\sum_{T, sh(T)=\lambda} x^T = P_\mu P_\nu$$

Conséquences algébriques

Théorème (Chemli, P. (2016))

Soit w_1 *un mot de couleur gauche ayant* μ *pour forme de P-symbole, et* w_2 *un mot de couleur droite ayant* ν *pour forme de P-symbole. Soit* λ *la forme* P*-symbole du mot* $w_1 w_2$*. On a :*

$$\sum_{T, sh(T)=\lambda} x^T = P_\mu P_\nu$$

Théorème (Chemli, P. (2016))

Deux mots sont dans la même classe du super monoïde plaxique décalé ssi ils ont même P*-symbole.*

Algorithme inverse et algorithme dual

Théorème (Chemli, P. (2016))

L'algorithme f est bijectif, d'algorithme inverse explicite

Algorithme inverse et algorithme dual

Théorème (Chemli, P. (2016))

L'algorithme f est bijectif, d'algorithme inverse explicite

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme g prenant en argument un mot bicolore standard qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,

Algorithme inverse et algorithme dual

Théorème (Chemli, P. (2016))

L'algorithme f est bijectif, d'algorithme inverse explicite

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme g prenant en argument un mot bicolore standard qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*

Théorème (Chemli, P. (2016))

L'algorithme f est bijectif, d'algorithme inverse explicite

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme g prenant en argument un mot bicolore standard qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*
- *P est standard sans '*

Algorithme inverse et algorithme dual

Théorème (Chemli, P. (2016))

L'algorithme f est bijectif, d'algorithme inverse explicite

Théorème (Chemli, P. (2016))

Il existe un algorithme g prenant en argument un mot bicolore standard qui renvoie une paire (P, Q) de tableaux de domino décalés,tels que :

- *P et Q ont même forme*
- *P est standard sans '*
- *Q est standard sans ' sur la diagonale*

Conjectures

Conjecture 1

Si σ est une permutation signée (qu'on identifie au mot bicolore correspondant) alors

$$f(\sigma) = (P, Q) \Leftrightarrow g(\sigma^{-1}) = (Q, P)$$

Conjectures

Conjecture 1

Si σ est une permutation signée (qu'on identifie au mot bicolore correspondant) alors

$$f(\sigma) = (P, Q) \Leftrightarrow g(\sigma^{-1}) = (Q, P)$$

Conjecture 2

L'algorithme f commute avec la standardisation et avec la troncature.

Ce qu'il reste à faire

- Si σ est une permutation signée, que peut-on dire de $f(\sigma^{-1})$?

Ce qu'il reste à faire

- Si σ est une permutation signée, que peut-on dire de $f(\sigma^{-1})$?
- Étendre g sur tous les mots

Ce qu'il reste à faire

- Si σ est une permutation signée, que peut-on dire de $f(\sigma^{-1})$?
- Étendre g sur tous les mots
- Conséquences énumératives

Ce qu'il reste à faire

- Si σ est une permutation signée, que peut-on dire de $f(\sigma^{-1})$?
- Étendre g sur tous les mots
- Conséquences énumératives
- Identités de Cauchy

Ce qu'il reste à faire

- Si σ est une permutation signée, que peut-on dire de $f(\sigma^{-1})$?
- Étendre g sur tous les mots
- Conséquences énumératives
- Identités de Cauchy
- Formule des équerres pour les tableaux de dominos décalés

Merci de votre attention !