Cristaux d'espaces de Fock et applications

Thomas Gerber

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Journées du GT Combinatoire Algébrique
ICJ, Lyon

5 Septembre 2016

Plan

1. Cristaux d'espaces de Fock
   - Espaces de Fock
   - Cristaux
2. Caractérisations combinatoires de sommets particuliers
   - Dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal
   - Dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal et le H-cristal
3. Applications via catégorification
   - Algèbres de Hecke doublement affines
   - Groupes unitaires finis

Section 1

Cristaux d'espaces de Fock

Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.

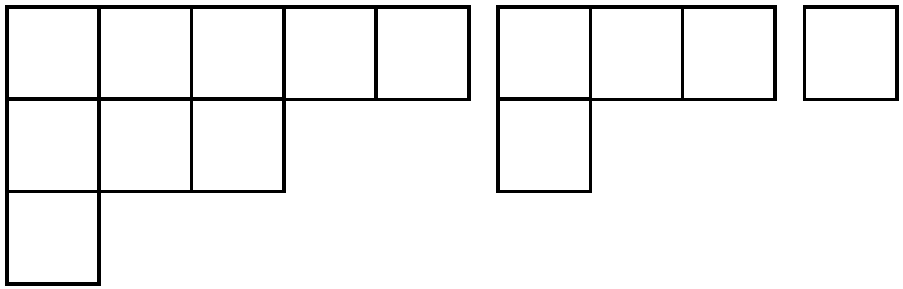
Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.
Exemple : $\ell = 3$, $\mathbf{s} = (0, -1, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (5.3.1, 3.1, 1)$.

Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.
Exemple : $\ell = 3$, $\mathbf{s} = (0, -1, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (5.3.1, 3.1, 1)$.

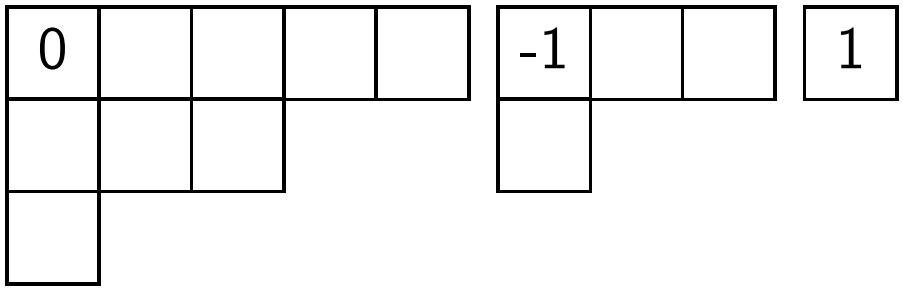
$\boldsymbol{\lambda}$ $=$



Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.
Exemple : $\ell = 3$, $\mathbf{s} = (0, -1, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (5.3.1, 3.1, 1)$.

$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle =$



Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.
Exemple : $\ell = 3$, $\mathbf{s} = (0, -1, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (5.3.1, 3.1, 1)$.

$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle =$

0	1	2	3	4
-1	0	1		
-2				

-1	0	1
0		

1

Multipartitions chargées

Soit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition.
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle :=$ *multipartition chargée*, représentée par son diagramme de Young avec contenus.
Exemple : $\ell = 3$, $\mathbf{s} = (0, -1, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (5.3.1, 3.1, 1)$.

$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle =$

0	1	2	3	4
-1	0	1		
-2				

-1	0	1	1
0			

Soit v une indéterminée.

Définition

L'*espace de Fock* associé à $\mathbf{s}$ est le $\mathbb{C}(v)$-espace vectoriel de base $\{|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle \ ; \ \boldsymbol{\lambda}$ est une ℓ-partition$\}$. On le note $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$.

Structures de module sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Fixons $e \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

$\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e}) =$ algèbre affine quantique de type A.
$H =$ algèbre de Heisenberg.

Structures de module sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Fixons $e \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

$\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ = algèbre affine quantique de type A.
H = algèbre de Heisenberg.

Théorème (Jimbo-Misra-Miwa-Okado 1991 + Uglov 1999)

- $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ est un $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$-module.
- $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ est un H-module.

Les actions correspondantes sont explicites et dépendent de $\mathbf{s}$ et e:

- action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ = "ajouter/enlever des boîtes"
- action de H = "ajouter/enlever des e-périodes".

Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Théorème (Kashiwara 1991)

L'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ induit une structure de cristal ("$\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal").

$\rightsquigarrow$ Graphe avec :

- sommets : toutes les ℓ-partitions chargées par $\mathbf{s}$,
- flèches : action de certains opérateurs de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ (ajouter/enlever une "bonne boîte").

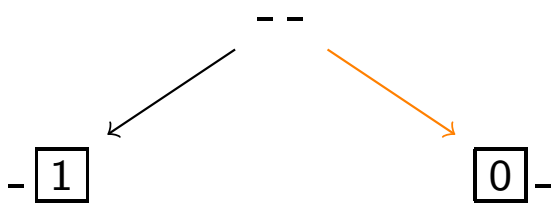
Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal pour $\ell = 2$, $e = 3$, $\mathbf{s} = (0, 1)$.

--

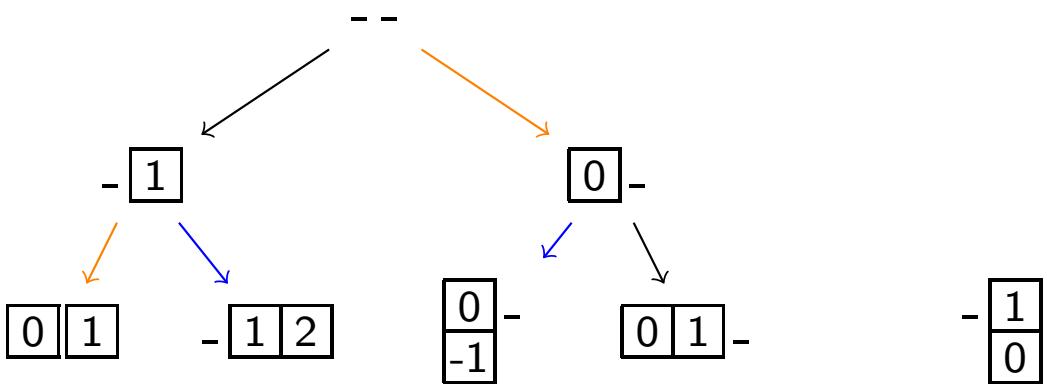
Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal pour $\ell = 2$, $e = 3$, $\mathbf{s} = (0, 1)$.



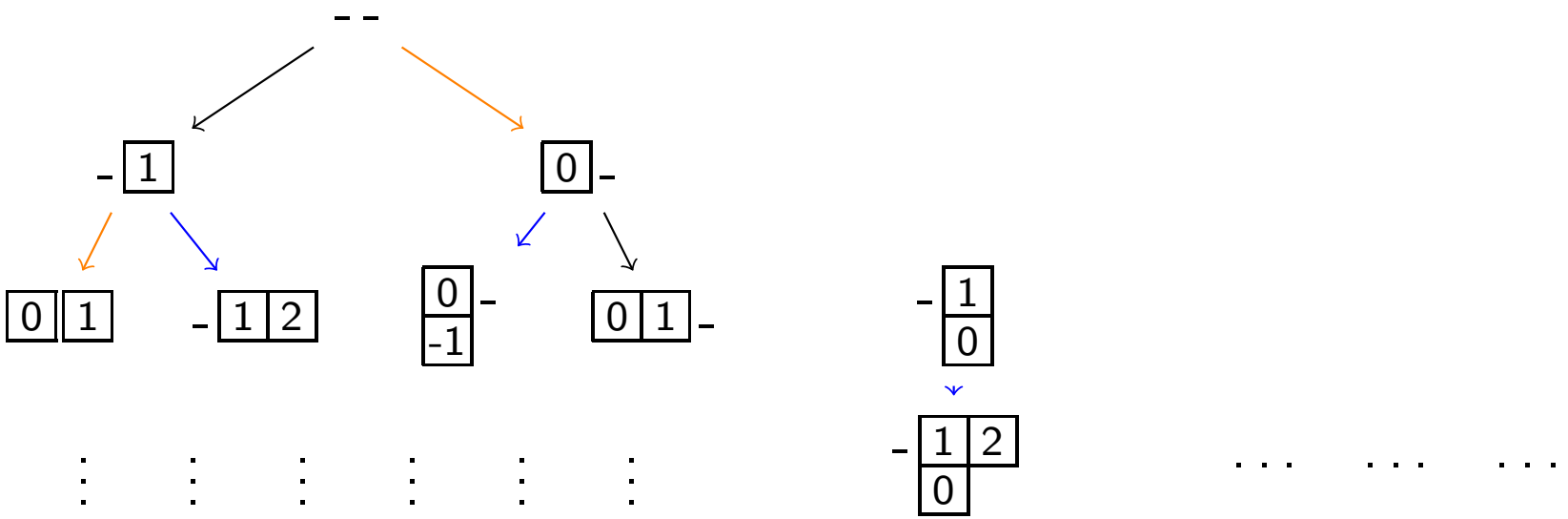
Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal pour $\ell = 2$, $e = 3$, $\mathbf{s} = (0, 1)$.



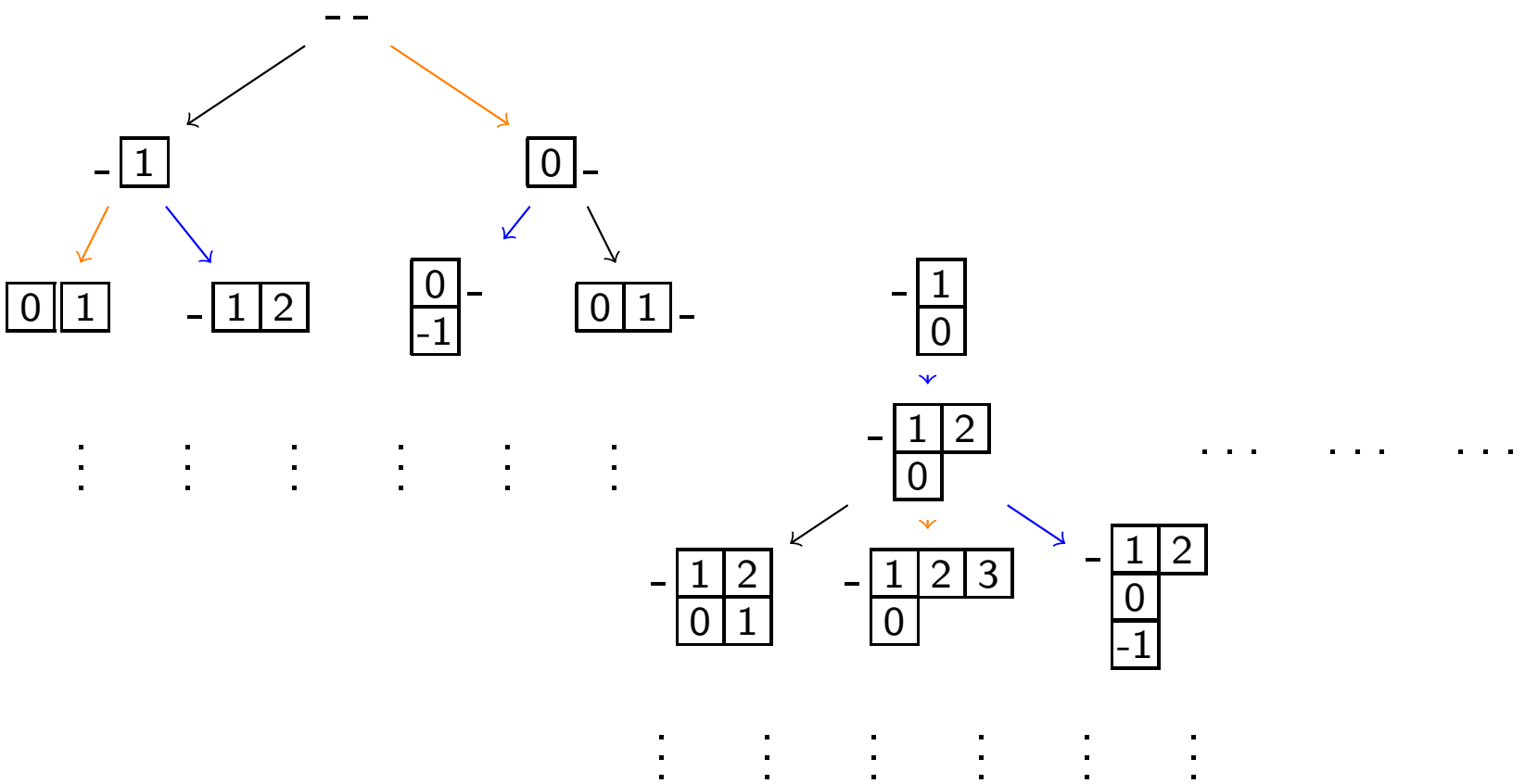
Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal pour $\ell = 2$, $e = 3$, $\mathbf{s} = (0, 1)$.



Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal pour $\ell = 2$, $e = 3$, $\mathbf{s} = (0, 1)$.



Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Théorème (Kashiwara 1991)

L'action de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ induit une structure de cristal ("$\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal").

$\rightsquigarrow$ Graphe avec :

- sommets : toutes les ℓ-partitions chargées par $\mathbf{s}$,
- flèches : action de certains opérateurs de $\mathcal{U}_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ (ajouter/enlever une "bonne boîte").

Théorème (G. 2016)

L'action de H induit une structure de cristal ("H-cristal") qui commute avec le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal.

$\rightsquigarrow$ Graphe avec :

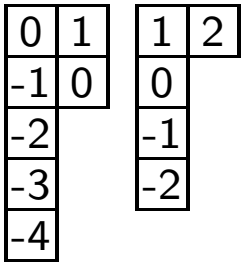
- sommets : toutes les ℓ-partitions chargées par $\mathbf{s}$,
- flèches : procédure combinatoire simple (ajouter/enlever une "bonne e-période").

Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\ell = 2$, $\mathbf{s} = (0, 1)$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^3, 2.1^3)$ et $e = 3$. La flèche colorée par c ajoute e boîtes de contenus consécutifs $c, c-1, ..., c-e+1$ dans la même colonne.

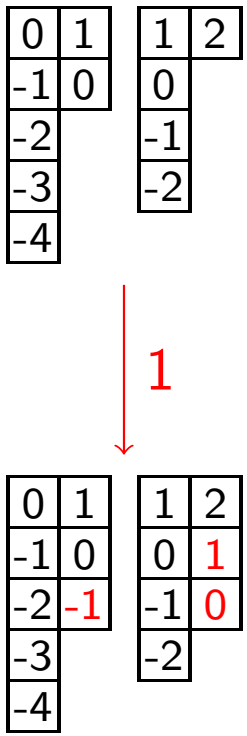
Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\ell = 2$, $\mathbf{s} = (0, 1)$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^3, 2.1^3)$ et $e = 3$. La flèche colorée par c ajoute e boîtes de contenus consécutifs $c, c-1, ..., c-e+1$ dans la même colonne.



Structures de cristal sur $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$

Exemple: $\ell = 2$, $\mathbf{s} = (0, 1)$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^3, 2.1^3)$ et $e = 3$. La flèche colorée par c ajoute e boîtes de contenus consécutifs $c, c-1, ..., c-e+1$ dans la même colonne.



Section 2

Caractérisations combinatoires de sommets particuliers

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

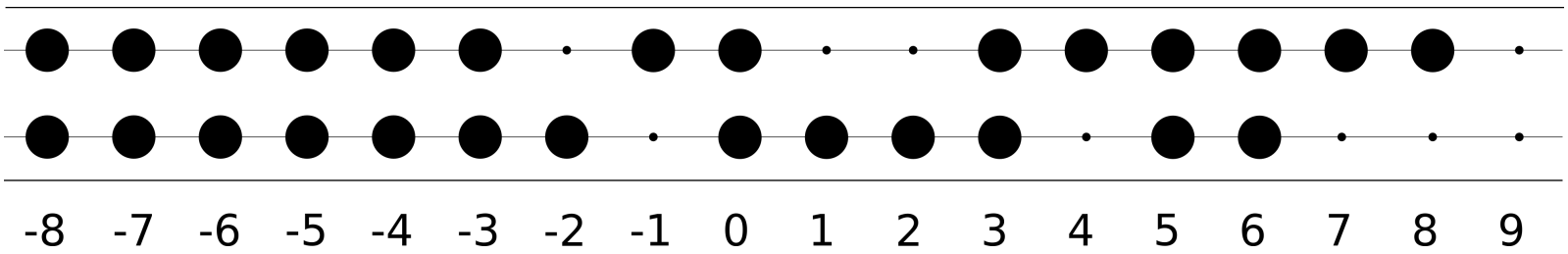
Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

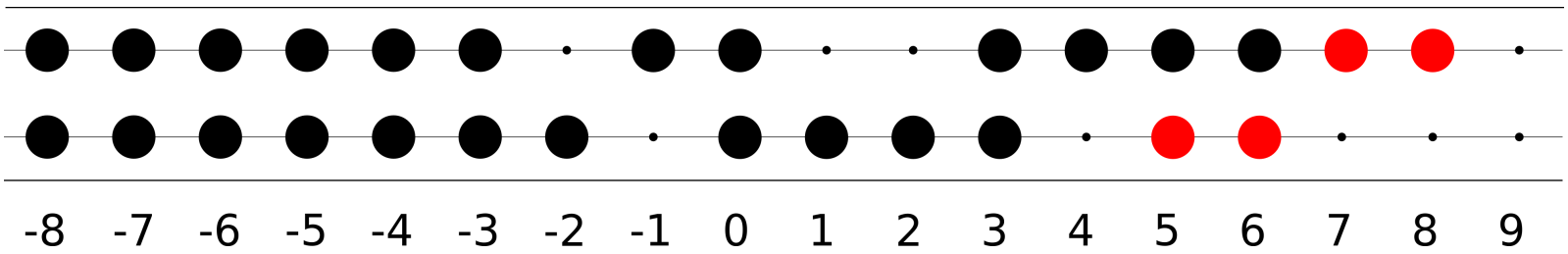


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

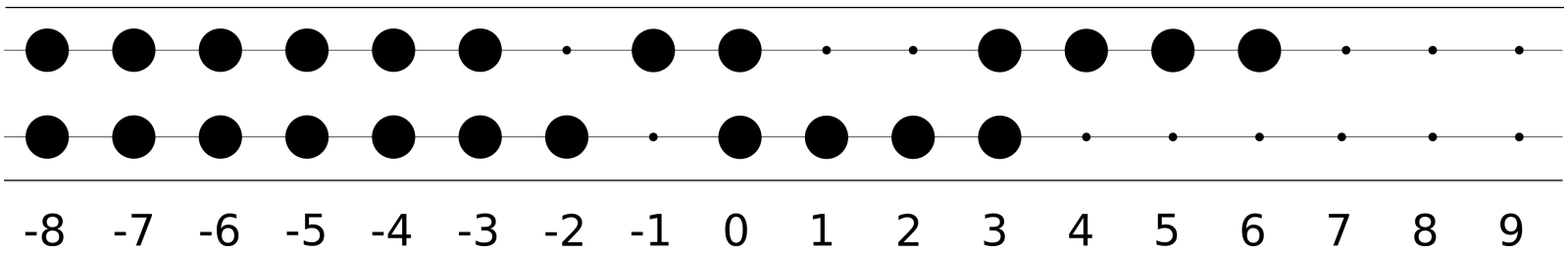


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

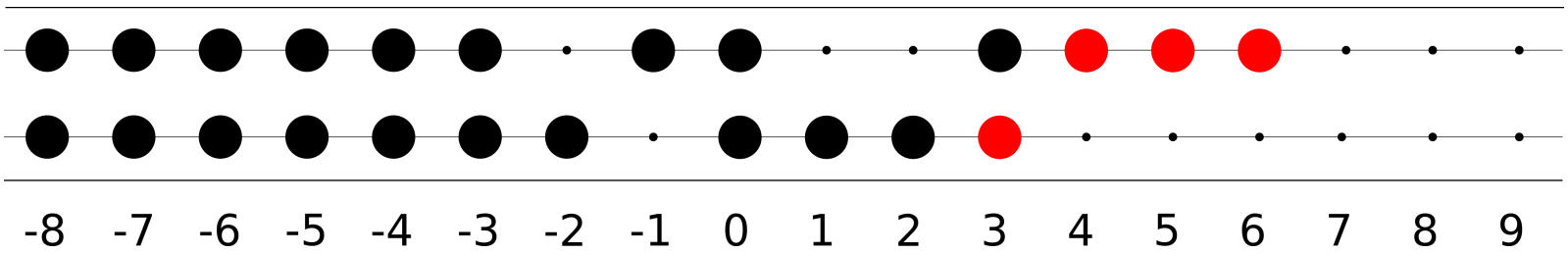


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

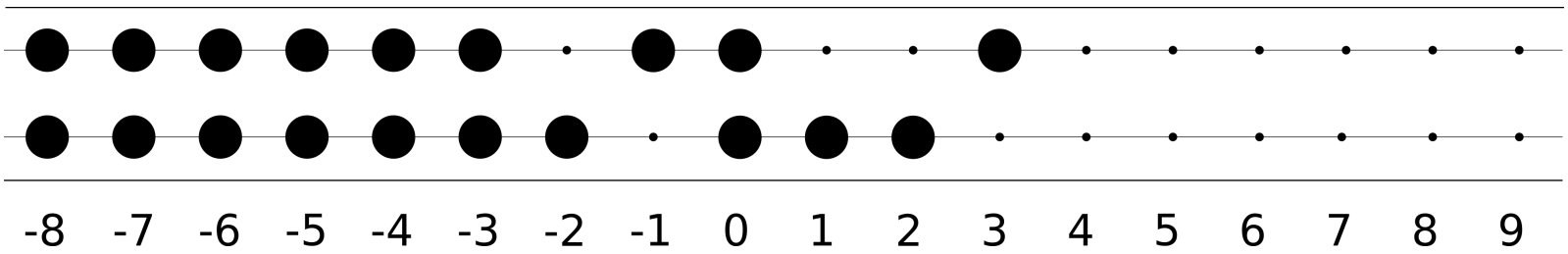


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

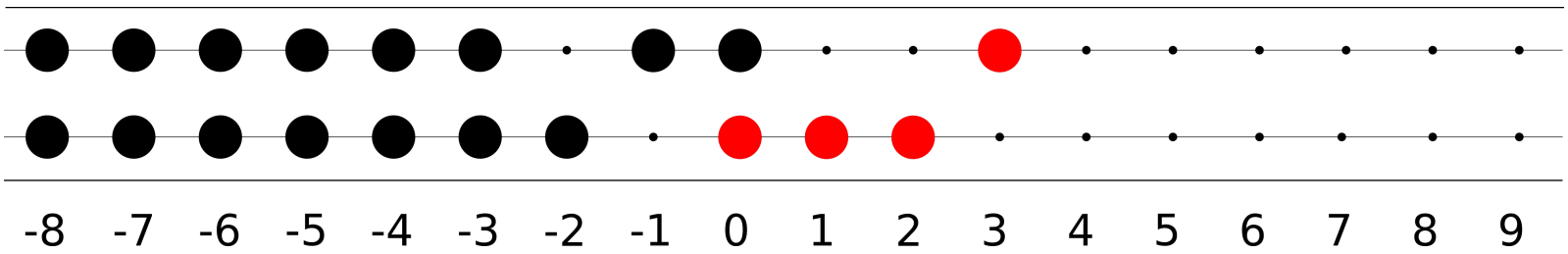


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

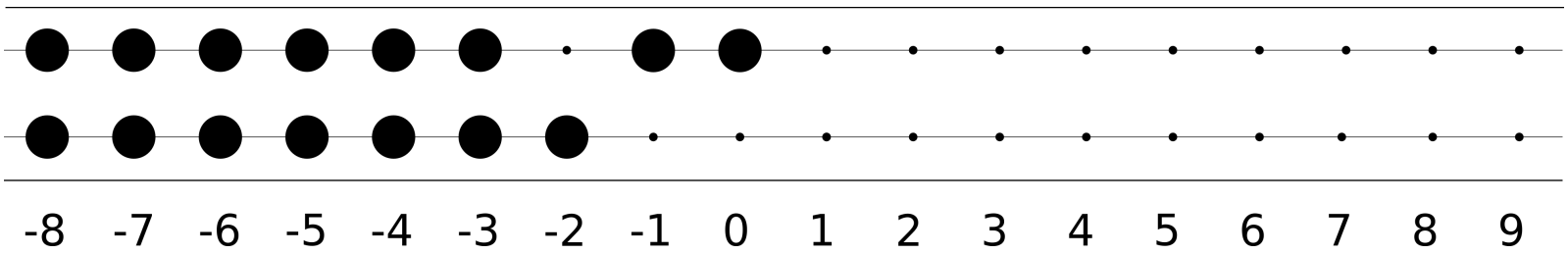


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

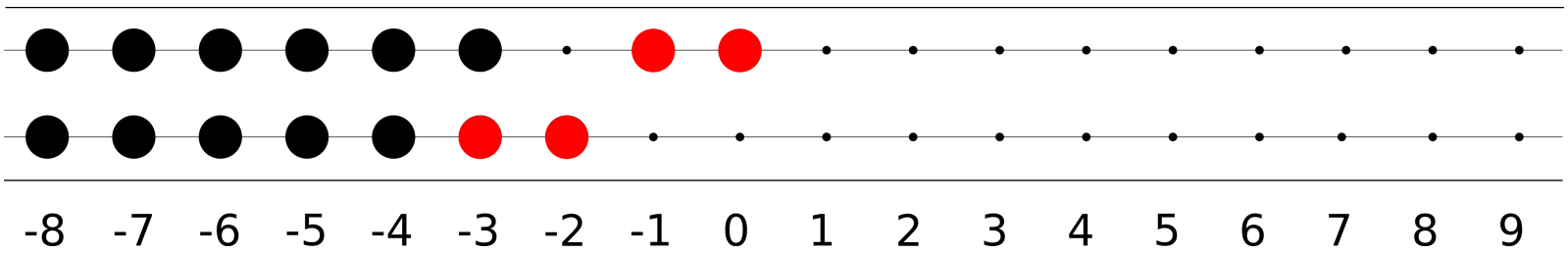


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.

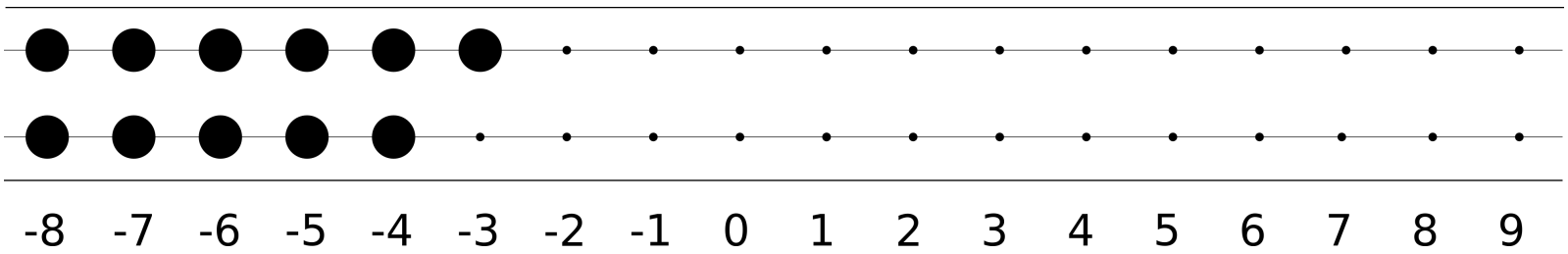


Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal

Théorème (Jacon-Lecouvey 2012)

Un sommet est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal si et seulement si son abaque est *totalement e-périodique*.

Exemple : $\ell = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = (2^2.1^4, 3^6.2^1)$, $\mathbf{s} = (4, 5)$, $e = 4$.



L'abaque obtenue en supprimant toutes les e-périodes est celui de la ℓ-partition vide.

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-crystal et dans le H-cristal

Il existe une correspondance bijective entre ℓ-partitions chargées et e-partitions chargées:

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-crystal et dans le H-cristal

Il existe une correspondance bijective entre ℓ-partitions chargées et e-partitions chargées:

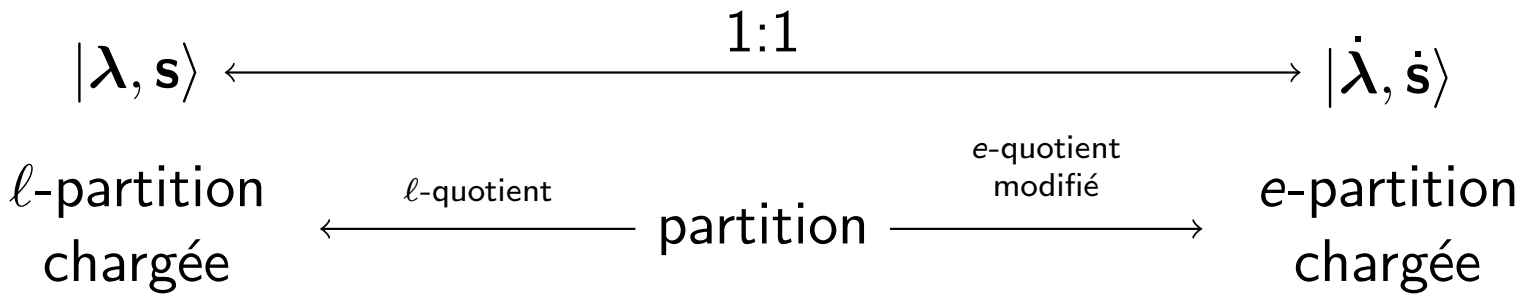
$$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle \xleftrightarrow{\text{1:1}} |\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\mathbf{s}}\rangle$$

ℓ-partition chargée

e-partition chargée

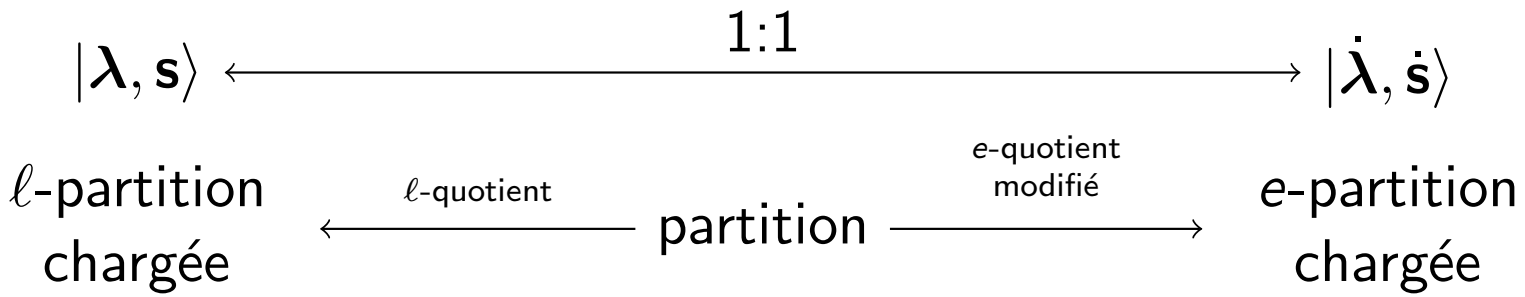
Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-crystal et dans le H-cristal

Il existe une correspondance bijective entre ℓ-partitions chargées et e-partitions chargées:



Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-crystal et dans le H-cristal

Il existe une correspondance bijective entre ℓ-partitions chargées et e-partitions chargées:



Théorème (G. 2016)

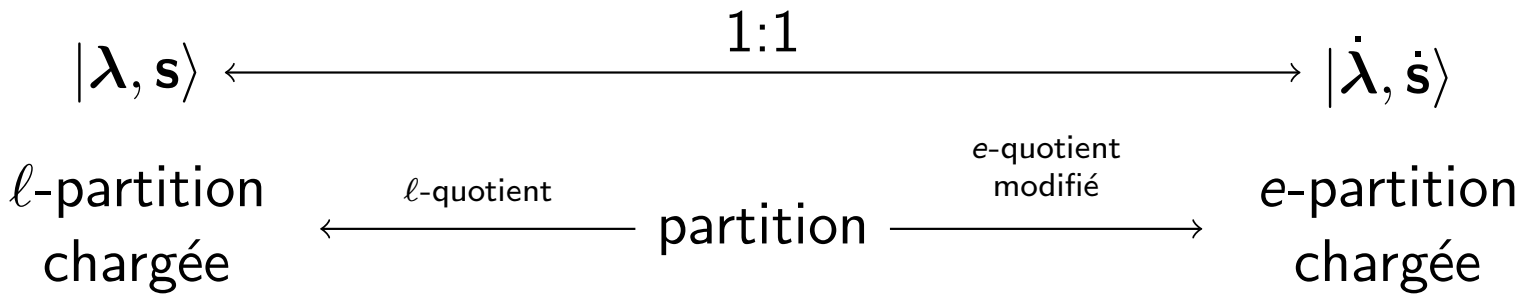
$|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans les deux cristaux si et seulement si $|\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\mathbf{s}}\rangle$ est ℓ-régulière, c-à-d :

- $\dot{s}_1 \leq \dot{s}_2 \leq \cdots \leq \dot{s}_e \leq \dot{s}_1 + \ell$,
- - $\forall 1 \leq d \leq e-1$, $\lambda^d_k \geq \lambda^{d+1}_{k+\dot{s}_{d+1}-\dot{s}_d}$ $\forall k \geq 1$ et $\lambda^d_k \geq \lambda^1_{k+\ell+\dot{s}_1-\dot{s}_e}$ $\forall k \geq 1$,
  - $\forall \alpha > 0, \left\{(\lambda^d_k - k + \dot{s}_d) \mod \ell \,|\, 1 \leq d \leq e-1, \lambda^d_k = \alpha\right\} \neq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

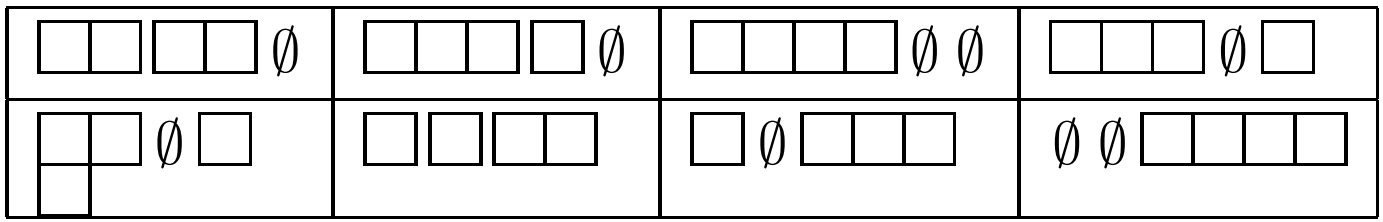
$\rightsquigarrow \ell = 1 \Rightarrow$ notion habituelle de partition e-régulière.

Sources dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-crystal et dans le H-cristal

Il existe une correspondance bijective entre ℓ-partitions chargées et e-partitions chargées:



Exemple : Les 3-partitions 2-régulières de rang 4 pour la charge $(0, 0, 1)$ sont :



Section 3

Applications via catégorification

Algèbres de Hecke doublement affines

Soit W_n le groupe de réflexions complexes $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.
$\rightsquigarrow \ell = 1 \Rightarrow$ groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Algèbres de Hecke doublement affines

Soit W_n le groupe de réflexions complexes $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.
$\rightsquigarrow \ell = 1 \Rightarrow$ groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

$\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$ = *algèbre de Hecke doublement affine*, où $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $e \geq 2$ sont des paramètres.

Algèbres de Hecke doublement affines

Soit W_n le groupe de réflexions complexes $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.
$\rightsquigarrow \ell = 1 \Rightarrow$ groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

$\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$ = *algèbre de Hecke doublement affine*, où $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $e \geq 2$ sont des paramètres.

Théorie des représentations de $\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$:

- Représentations irréductibles indexées par les ℓ-partitions ($\boldsymbol{\lambda} \leftrightarrow L_{\boldsymbol{\lambda}}$).
- Règle de branchement (en faisant varier n) définie à l'aide d'un foncteur d'induction (Bezrukavnikov-Etingof 2008).

Algèbres de Hecke doublement affines

Soit W_n le groupe de réflexions complexes $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.
$\rightsquigarrow \ell = 1 \Rightarrow$ groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

$\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$ = *algèbre de Hecke doublement affine*, où $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ et $e \geq 2$ sont des paramètres.

Théorie des représentations de $\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$:

- Représentations irréductibles indexées par les ℓ-partitions ($\boldsymbol{\lambda} \leftrightarrow L_{\boldsymbol{\lambda}}$).
- Règle de branchement (en faisant varier n) définie à l'aide d'un foncteur d'induction (Bezrukavnikov-Etingof 2008).

Théorème (Shan 2011)

La règle de branchement des $\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$ est donnée par le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal de $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$.

Caractérisations de certaines représentations de $\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$

L'action de H s'interprète aussi dans ce contexte.

Théorème (Shan 2011 + Shan-Vasserot 2012)

- $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ a un **support minimal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal.
- $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **de dimension finie** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal et dans le H-cristal.

Caractérisations de certaines représentations de $\mathcal{C}_n^{\mathbf{s},e}$

L'action de H s'interprète aussi dans ce contexte.

Théorème (Shan 2011 + Shan-Vasserot 2012)

- $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ a un **support minimal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal.
- $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **de dimension finie** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal et dans le H-cristal.

$\rightsquigarrow$ Grâce aux caractérisations combinatoire de ces sommets (Jacon-Lecouvey + G. ci-avant), on sait identifier ces représentations de manière explicite !

Groupes unitaires finis

$G_n = GU_n(q)$= groupe unitaire fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier.

Groupes unitaires finis

$G_n = GU_n(q)$= groupe unitaire fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier.

Théorie des représentations de G_n

Groupes unitaires finis

$G_n = GU_n(q)$= groupe unitaire fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier.

Théorie des représentations de G_n sur un corps de caractéristique positive m :
On pose $e =$ ordre de $-q$ modulo m.

Groupes unitaires finis

$G_n = GU_n(q)$= groupe unitaire fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier.

Théorie des représentations de G_n sur un corps de caractéristique positive m :
On pose $e =$ ordre de $-q$ modulo m.

- Représentations irréductibles de G_n indexées par toutes les 2-partitions chargées par $\mathbf{s}$, où $\mathbf{s}$ décrit les charges dont la somme des deux coordonnées est fixée ($\boldsymbol{\lambda} \leftrightarrow S_{\boldsymbol{\lambda}}$).
- Règle de branchement (en faisant varier n) définie à l'aide du foncteur d'*induction de Harish Chandra* (G.-Hiss-Jacon 2014) $\rightsquigarrow$ notion de cuspidalité.

Groupes unitaires finis

$G_n = GU_n(q)$= groupe unitaire fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier.

Théorie des représentations de G_n sur un corps de caractéristique positive m :
On pose $e =$ ordre de $-q$ modulo m.

- Représentations irréductibles de G_n indexées par toutes les 2-partitions chargées par $\mathbf{s}$, où $\mathbf{s}$ décrit les charges dont la somme des deux coordonnées est fixée ($\boldsymbol{\lambda} \leftrightarrow S_{\boldsymbol{\lambda}}$).
- Règle de branchement (en faisant varier n) définie à l'aide du foncteur d'*induction de Harish Chandra* (G.-Hiss-Jacon 2014) $\rightsquigarrow$ notion de cuspidalité.

Conjecture (G.-Hiss-Jacon), Théorème (Dudas-Varagnolo-Vasserot)

La règle de branchement des G_n est donnée par le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal de $\bigoplus_{\mathbf{s}} \mathcal{F}_{\mathbf{s}}$.

Caractérisations de certaines représentations de G_n

L'action de H s'interprète aussi dans ce contexte.

Théorème (Dudas-Varagnolo-Vasserot 2015-2016)

- $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **faiblement cuspidal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal.
- $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **cuspidal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal et dans le H-cristal.

Caractérisations de certaines représentations de G_n

L'action de H s'interprète aussi dans ce contexte.

Théorème (Dudas-Varagnolo-Vasserot 2015-2016)

- $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **faiblement cuspidal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal.
- $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ est **cuspidal** si et seulement si $|\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}\rangle$ est source dans le $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$-cristal et dans le H-cristal.

$\rightsquigarrow$ Comme dans le cas des algèbres de Hecke, on sait alors identifier ces représentations de manière combinatoire et explicite !