

Les diagrammes ouverts au service des marches

Mathias Lepoutre
 École polytechnique
 Université Simon Fraser

En collaboration avec :

- Marni Mishna
- Éric Fusy
- Julien Courtiel

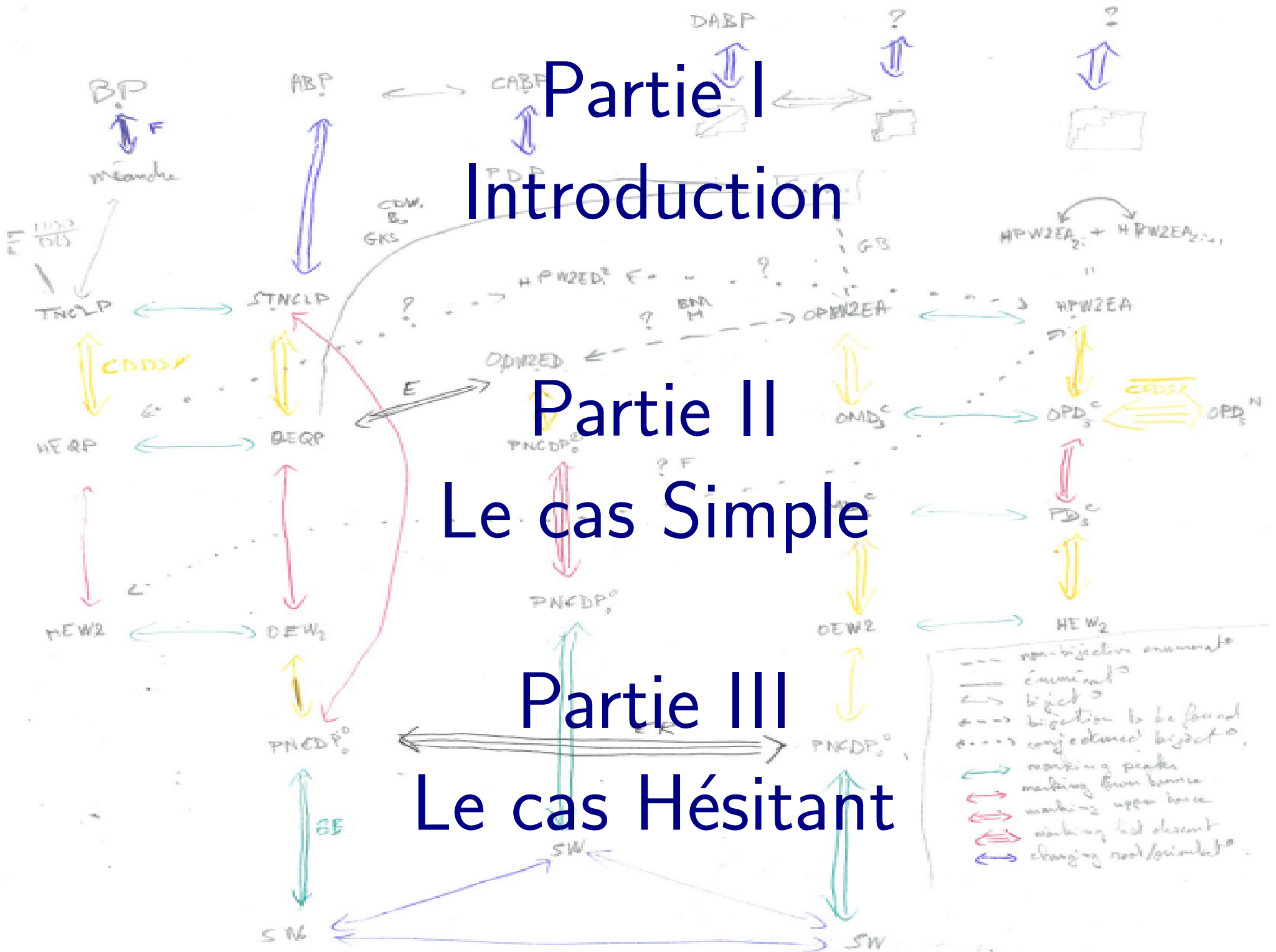
jours du GT CombAlg, 6 septembre 2016



Partie I Introduction

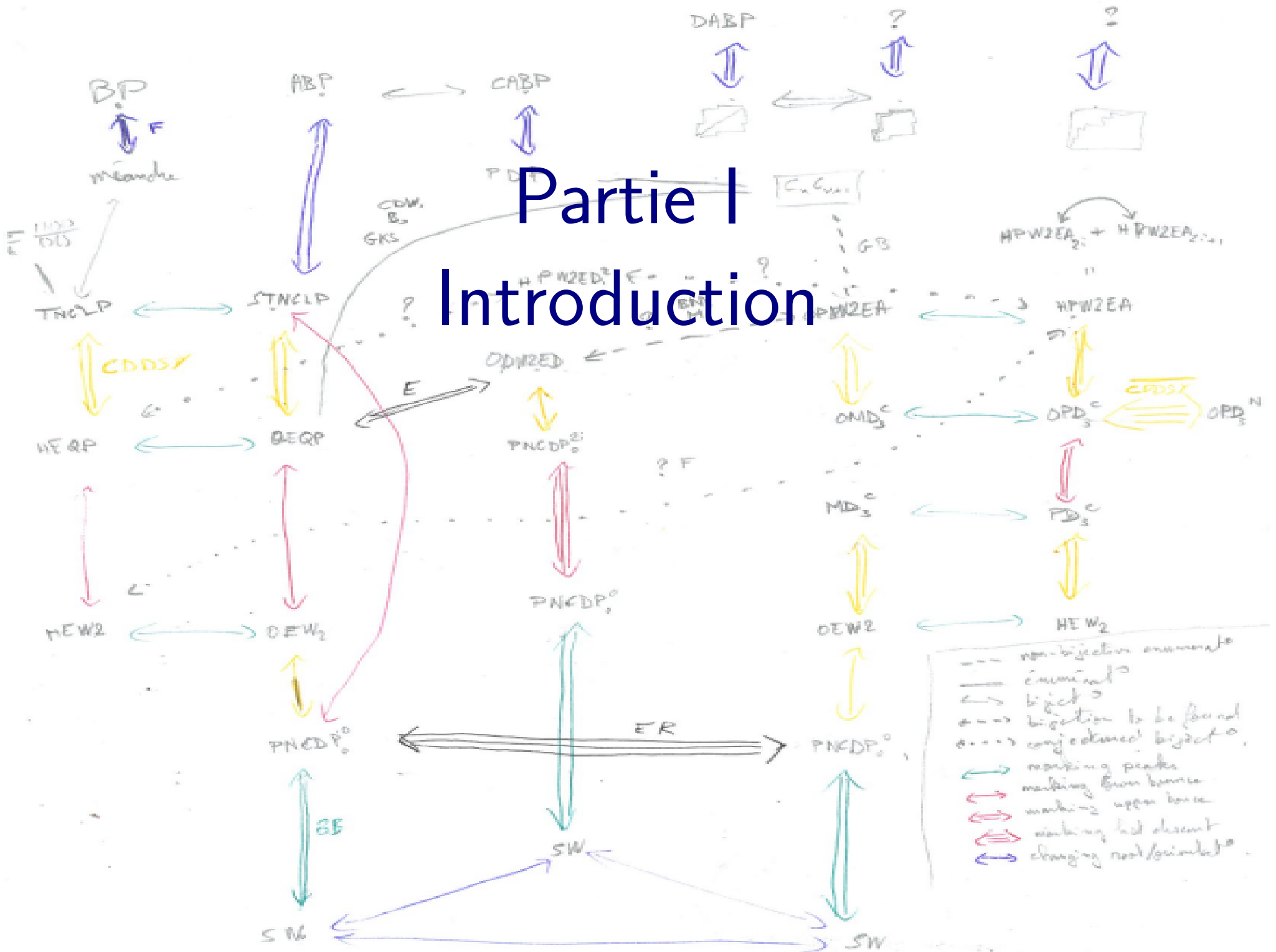
Partie II Le cas Simple

Partie III Le cas Hésitant



Partie I

Introduction

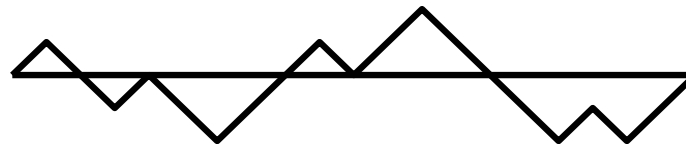


Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

chemin positif

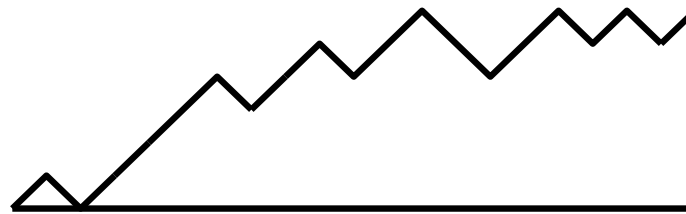


excursion



Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

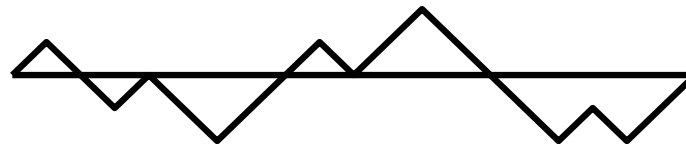
chemin positif



excursion positive avec
pas 1-0 marqués

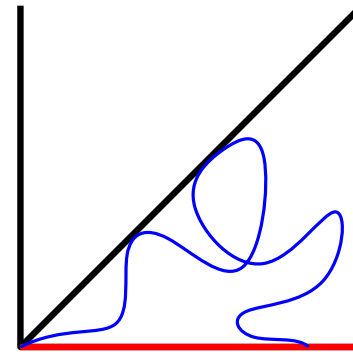


excursion

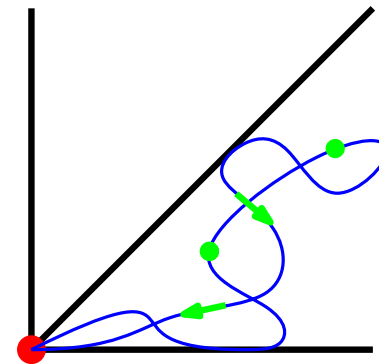


Contrainte de domaine, Marquage, Contrainte d'arrivée

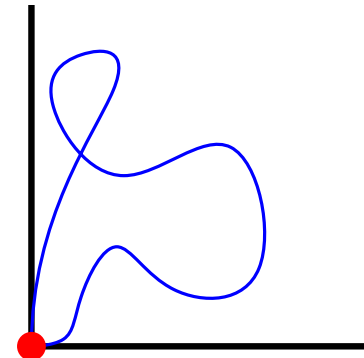
Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe



Excursion
sous-diagonale
marquée

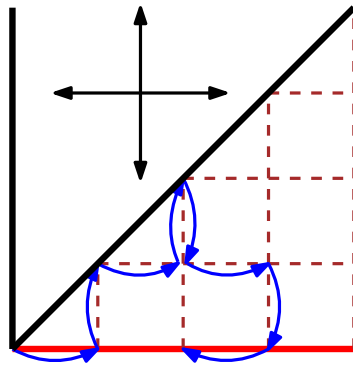


Excursion dans le
quart de plan

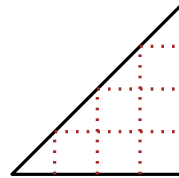


Marches, Tableaux, Diagrammes

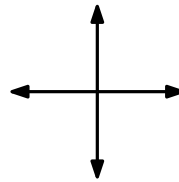
Cas Simple



Marche



marche sous-diagonale
(en dimension 2)

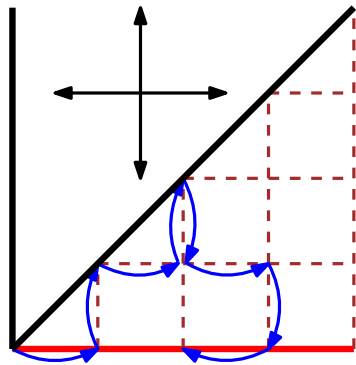


n pas de type N, S, E, O

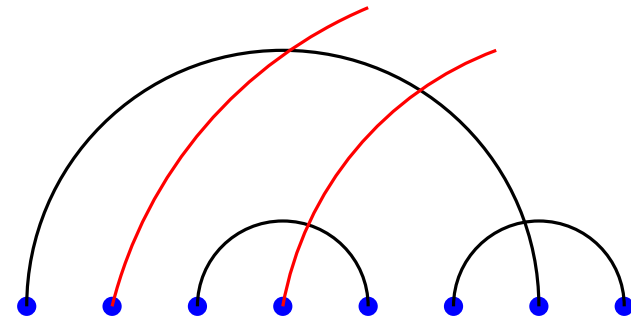


finissant sur l'axe en $(i, 0)$

Marches, Tableaux, Diagrammes Cas Simple



Marche



Diagramme

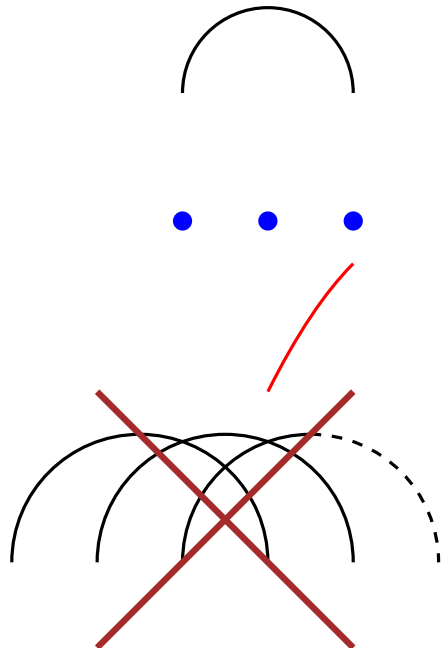


diagramme de couplage

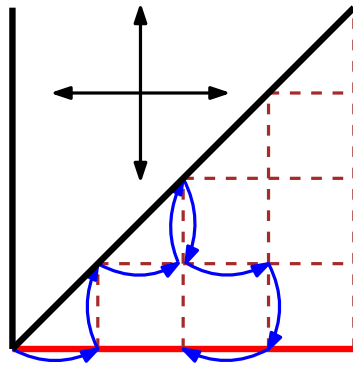
de longueur n

avec i arcs ouverts

sans 3-croisement

Marches, Tableaux, Diagrammes

Cas Simple



Marche

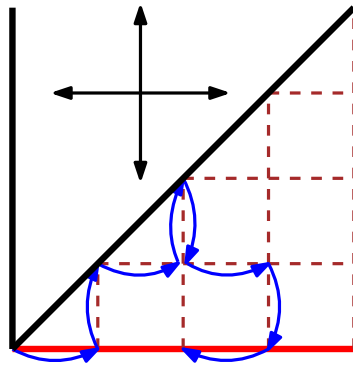
Diagramme

Avantages respectifs :

- des objets bien connus
- séries génératrices facilement exprimables
- formulation plus naturelle des problèmes

Marches, Tableaux, Diagrammes

Cas Simple



Marche

Diagramme

Avantages respectifs :

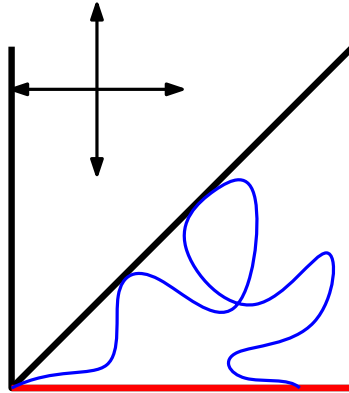
- des objets bien connus
- séries génératrices facilement exprimables
- formulation plus naturelle des problèmes
- arbre générateur
- possibilité d'enlever les arcs

Contrainte de domaine \Leftrightarrow Contrainte d'arrivée

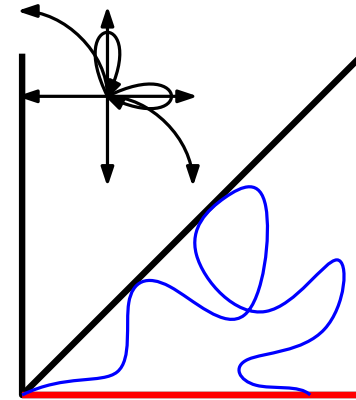
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

cas Simple



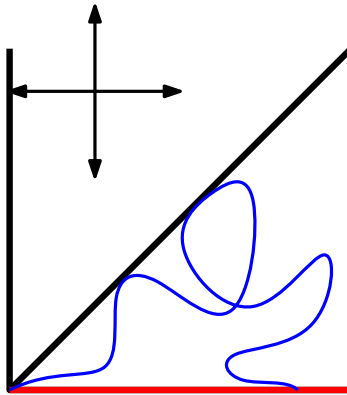
cas Hésitant



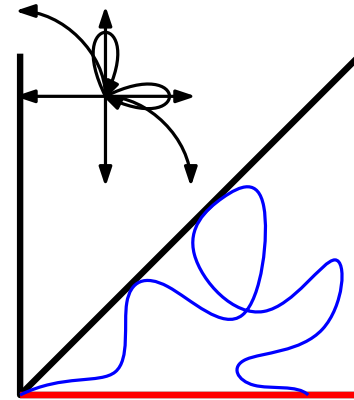
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

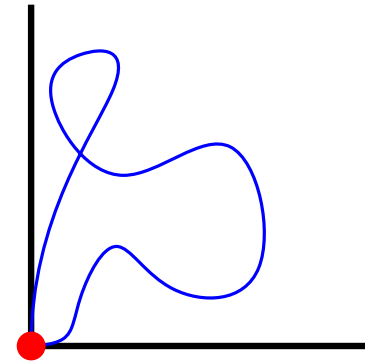
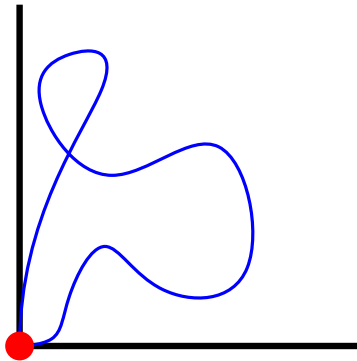
cas Simple



cas Hésitant



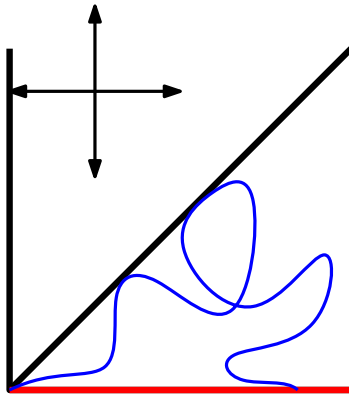
Excursion dans le
quart de plan



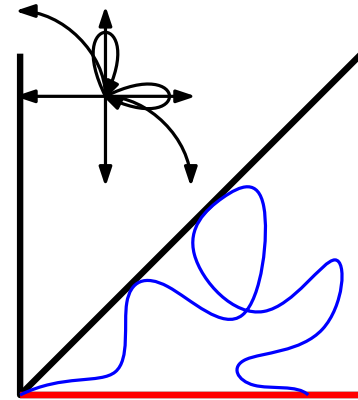
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

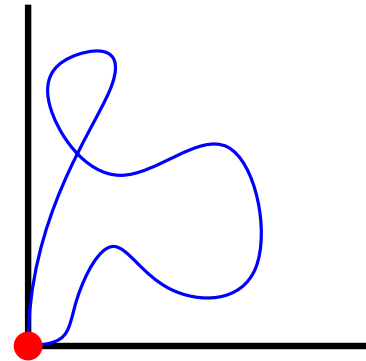
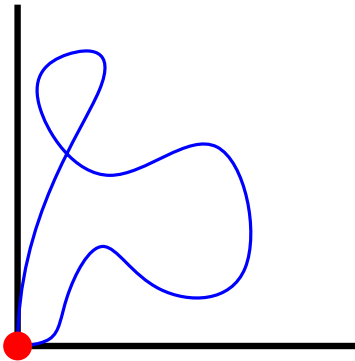
cas Simple



cas Hésitant



Excursion dans le
quart de plan



Cardinalité

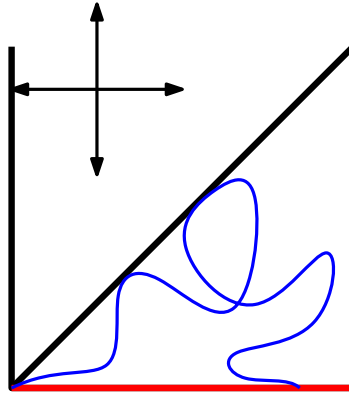
$$\mathcal{C}_n \cdot \mathcal{C}_{n+1}$$

$$\mathcal{B}_{n+1}$$

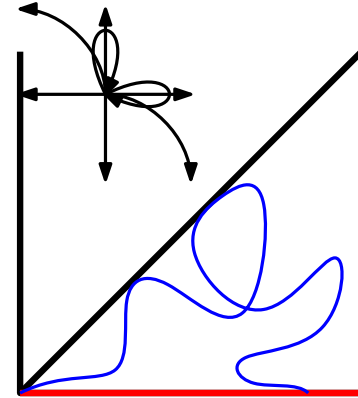
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

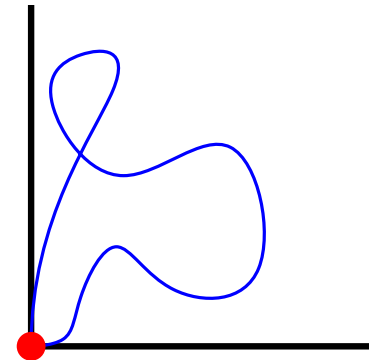
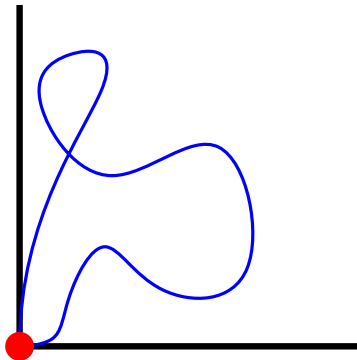
cas Simple



cas Hésitant



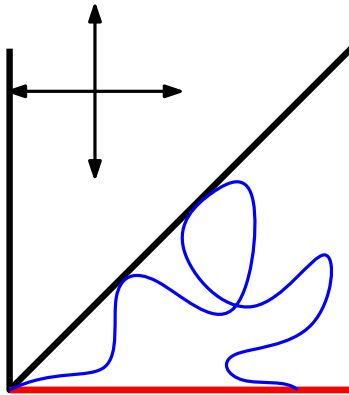
Excursion dans le
quart de plan



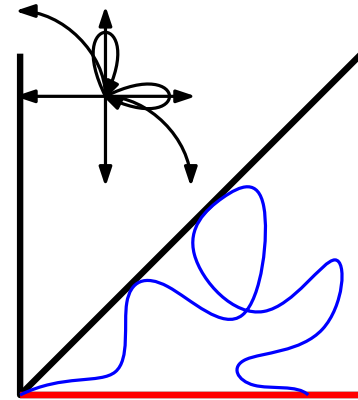
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

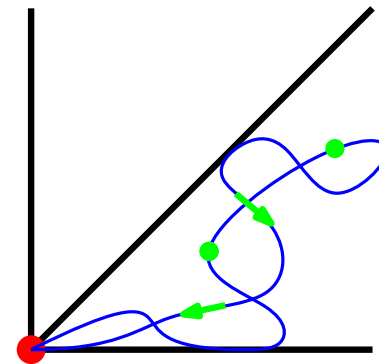
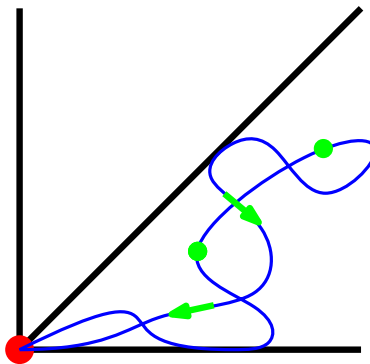
cas Simple



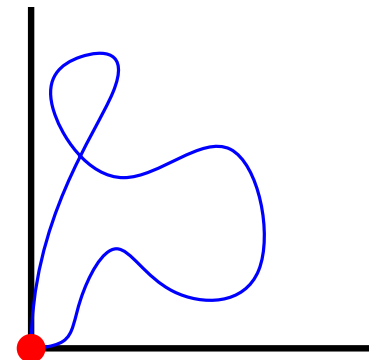
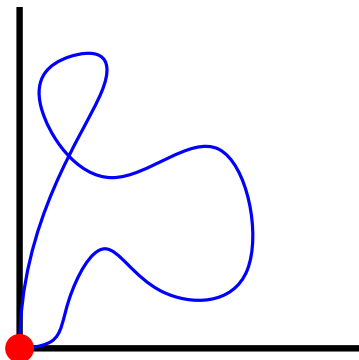
cas Hésitant



Excursion
sous-diagonale
marquée



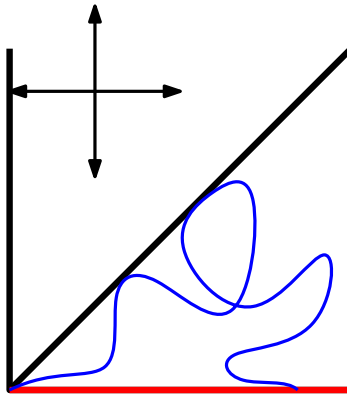
Excursion dans le
quart de plan



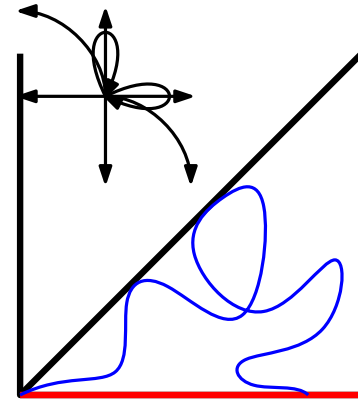
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

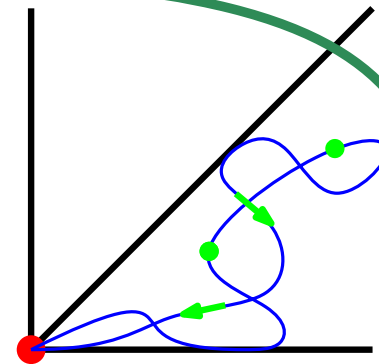
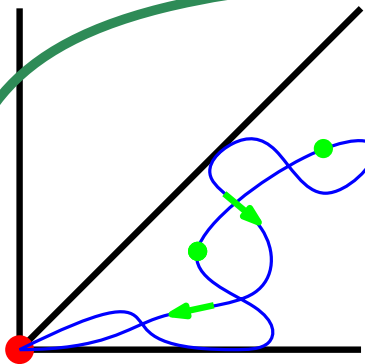
cas Simple



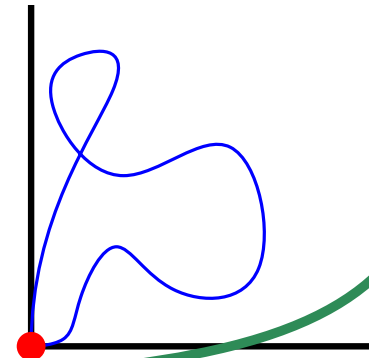
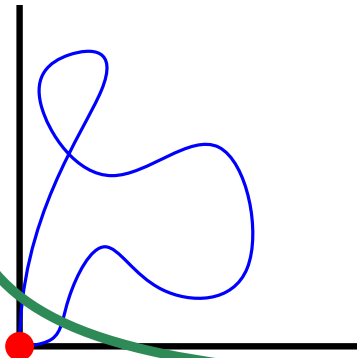
cas Hésitant



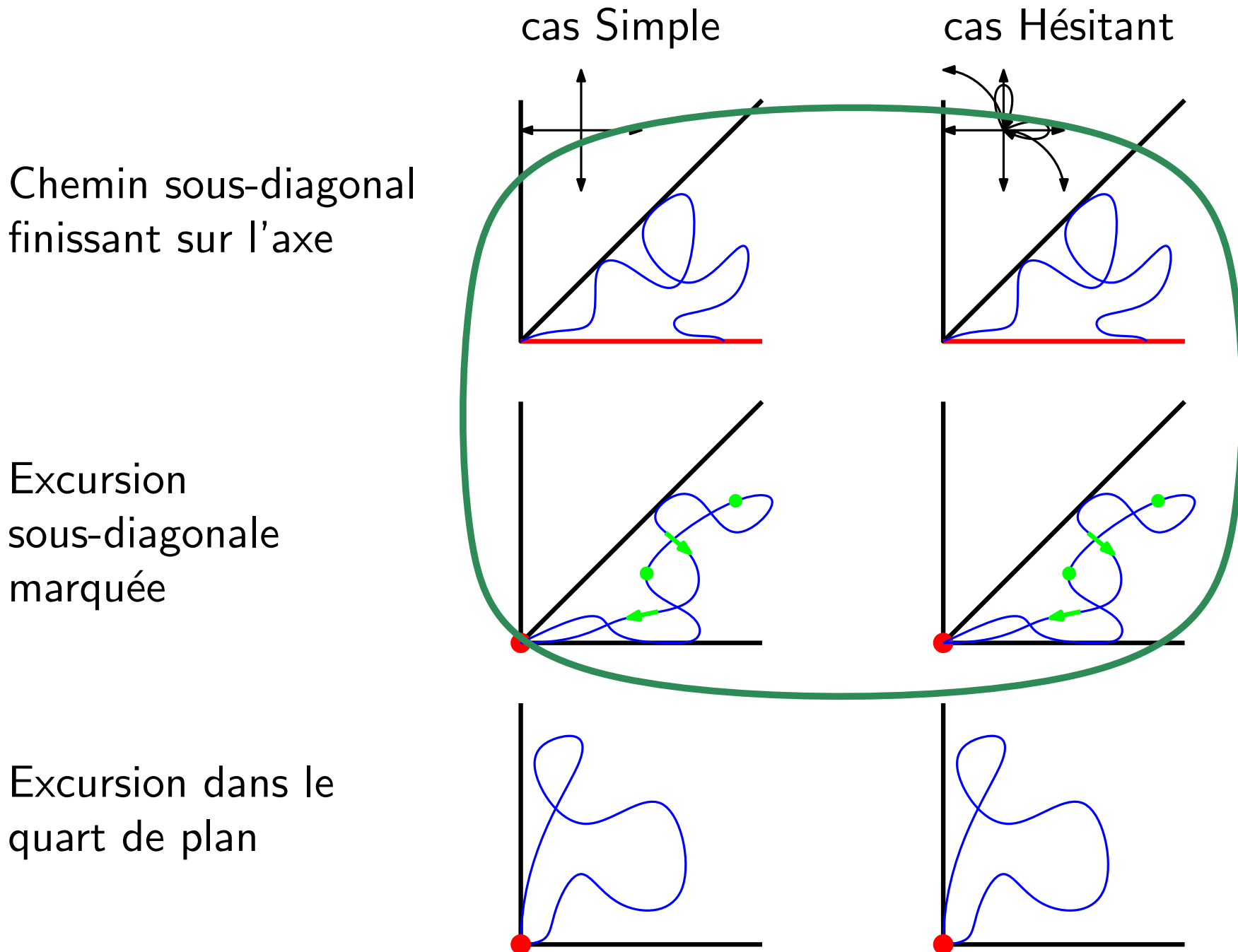
Excursion
sous-diagonale
marquée



Excursion dans le
quart de plan



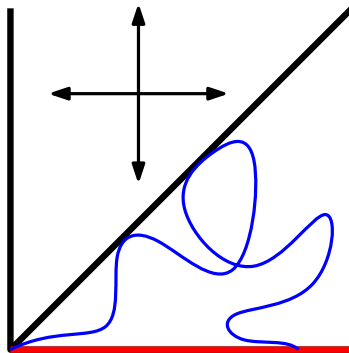
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée



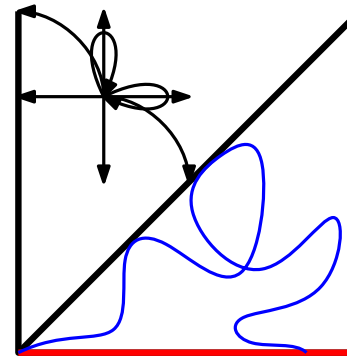
Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

marche Simple sous-diagonale
finissant sur l'axe



marche Hésitante sous-diagonale
finissant sur l'axe



Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

marche Simple sous-diagonale
finissant sur l'axe

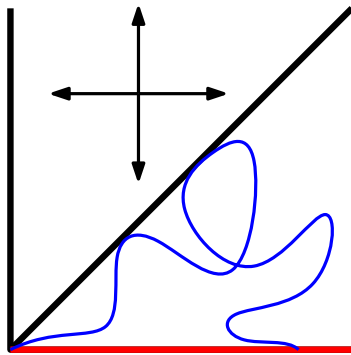
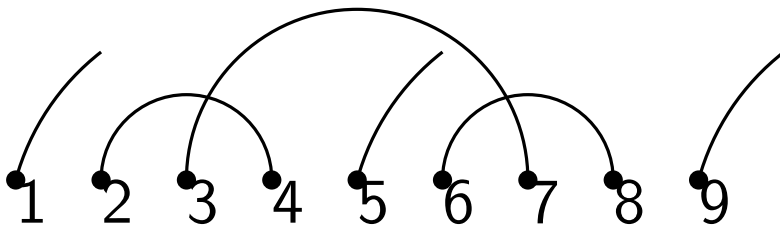


diagramme de couplage ouvert
sans 3-croisement



marche Hésitante sous-diagonale
finissant sur l'axe

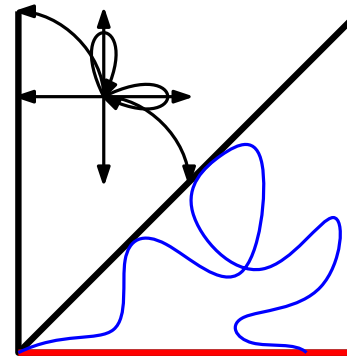
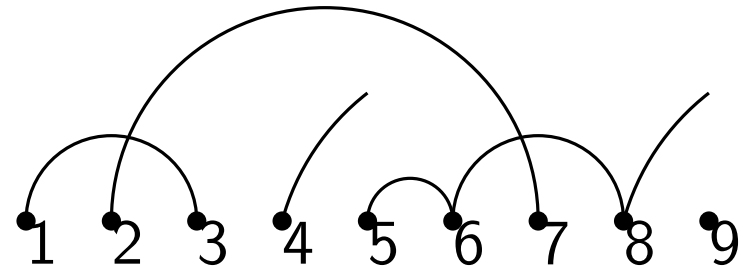


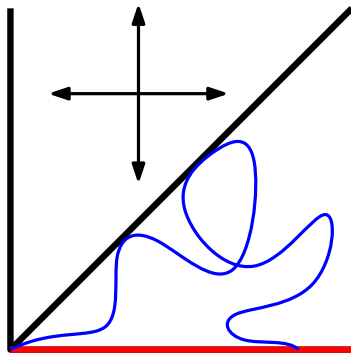
diagramme de partition ouverte
sans 3-croisement étendu



Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

marche Simple sous-diagonale
finissant sur l'axe



marche Hésitante sous-diagonale
finissant sur l'axe

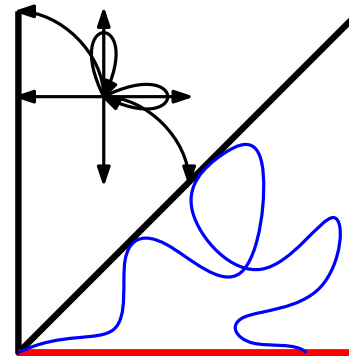


diagramme de couplage sans
3-croisement, avec marquage

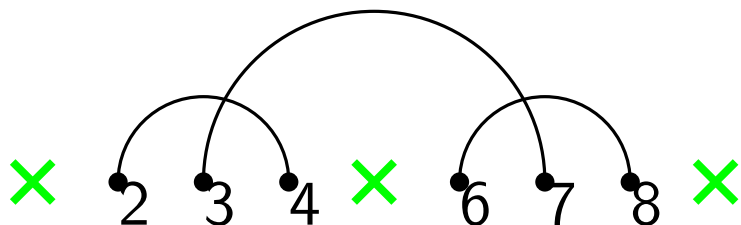
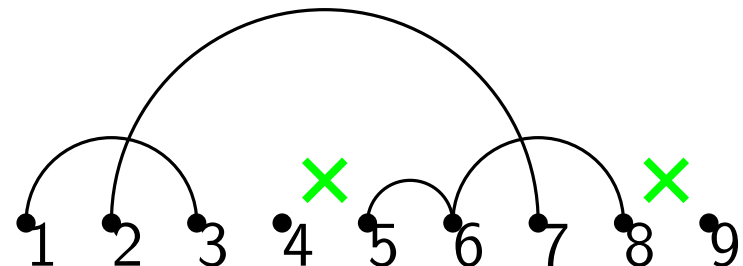


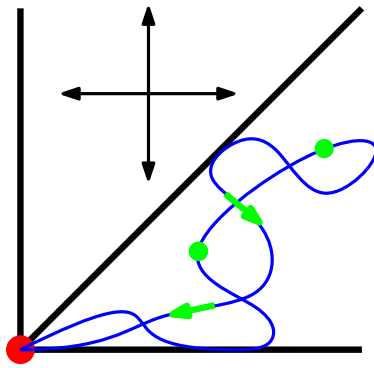
diagramme de partition sans
3-croisement étendu, avec marquage



Une nouvelle approche via les diagrammes ouverts

Effacer les arcs ouverts pour se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

excursion Simple sous-diagonale marquée



excursion Hésitante sous-diagonale marquée

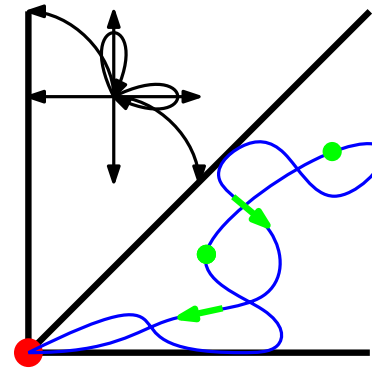


diagramme de couplage sans 3-croisement, avec marquage

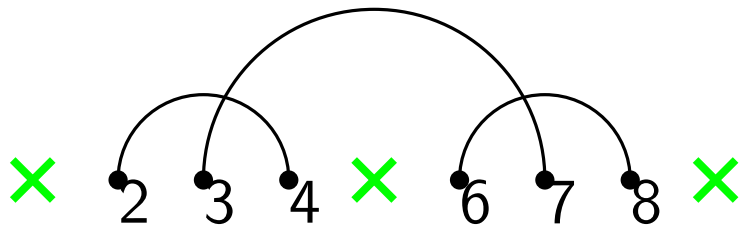
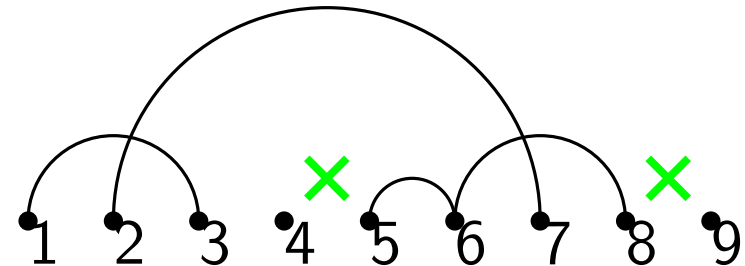
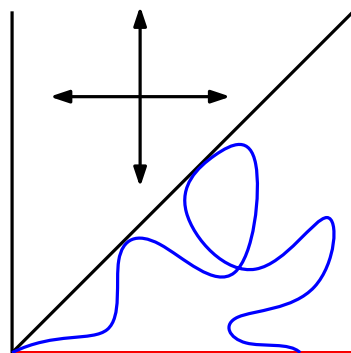


diagramme de partition sans 3-croisement étendu, avec marquage



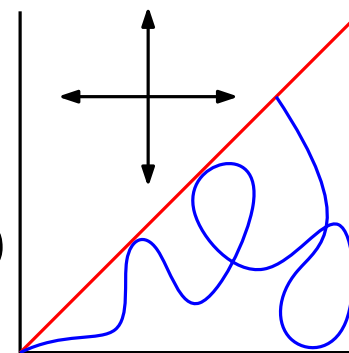
Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



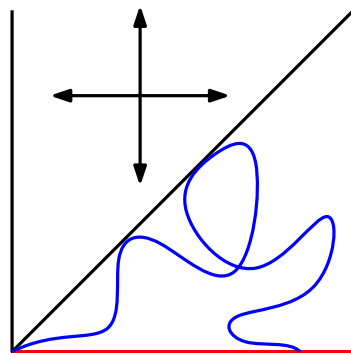
?

←-----→

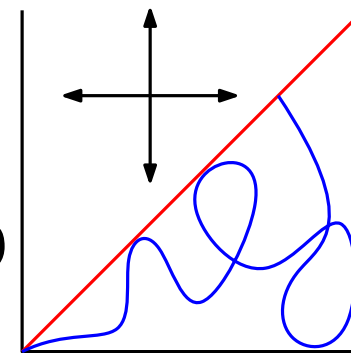
Bousquet-Mélou Mishna 2009



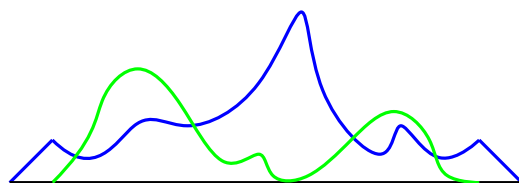
Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



Bousquet-Mélou Mishna 2009



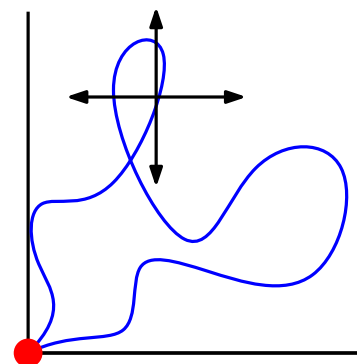
Gouyou-Beauchamps 1985



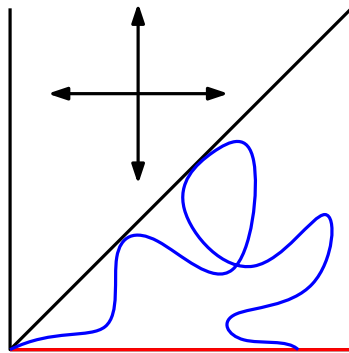
Cori et al. 1986
Bernardi 2007



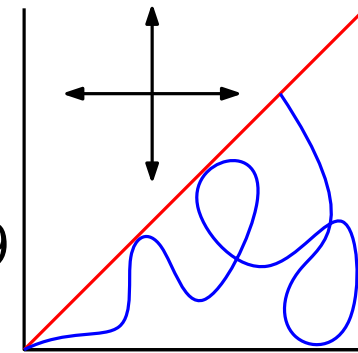
Elizalde 2014



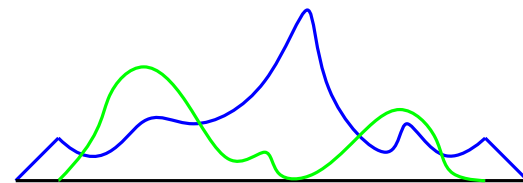
Problème de Bousquet-Mélou et Mishna



?
Bousquet-Mélou Mishna 2009



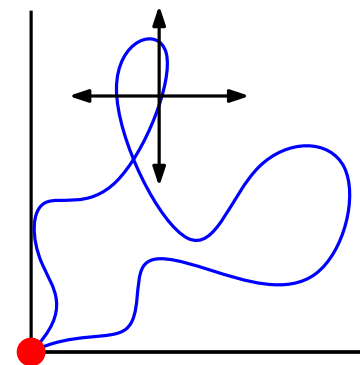
représentation
par diagrammes
ouverts



Cori et al. 1986
Bernardi 2007



Elizalde 2014



Partie manquante

Rappel :

Gouyou-Beauchamps 1985 (non bijectif) :

Les marches Simples sous-diagonales de longueur n finissant sur l'axe sont énumérées par $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$

Partie manquante

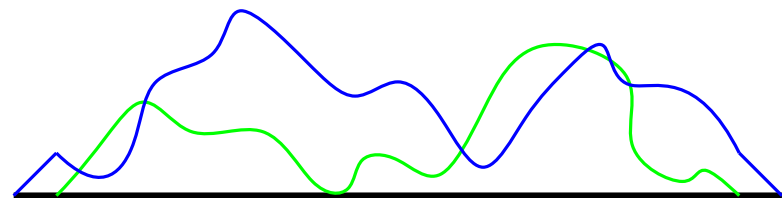
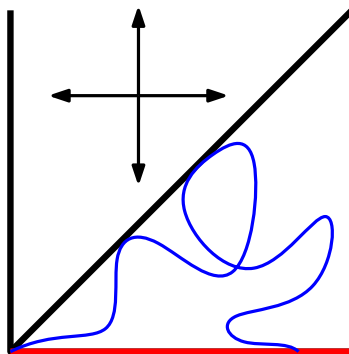
Rappel :

Gouyou-Beauchamps 1985 (non bijectif) :

Les marches Simples sous-diagonales de longueur n finissant sur l'axe sont énumérées par $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$

Objectif :

- Établir une bijection entre les marches Simples sous-diagonales de longueur $2n$ finissant sur l'axe et les paires de chemins de Dyck de demi-longueurs $(n, n + 1)$.



Le cas pair

marche sous-diagonale
Simple finissant sur
l'axe, de longueur $2n$

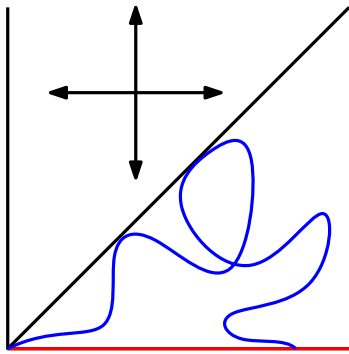


diagramme de couplage
ouvert sans 3-croisement,
de longueur $2n$

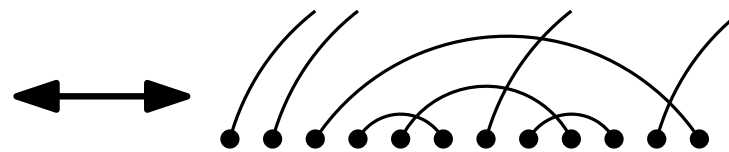
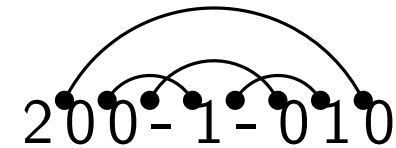
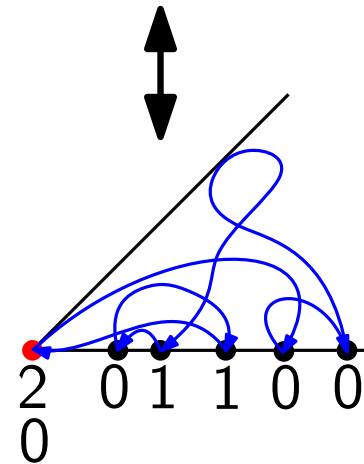


diagramme de couplage
sans 3-croisement avec
poids sur les intervalles
ouverts, de *taille* $2n$

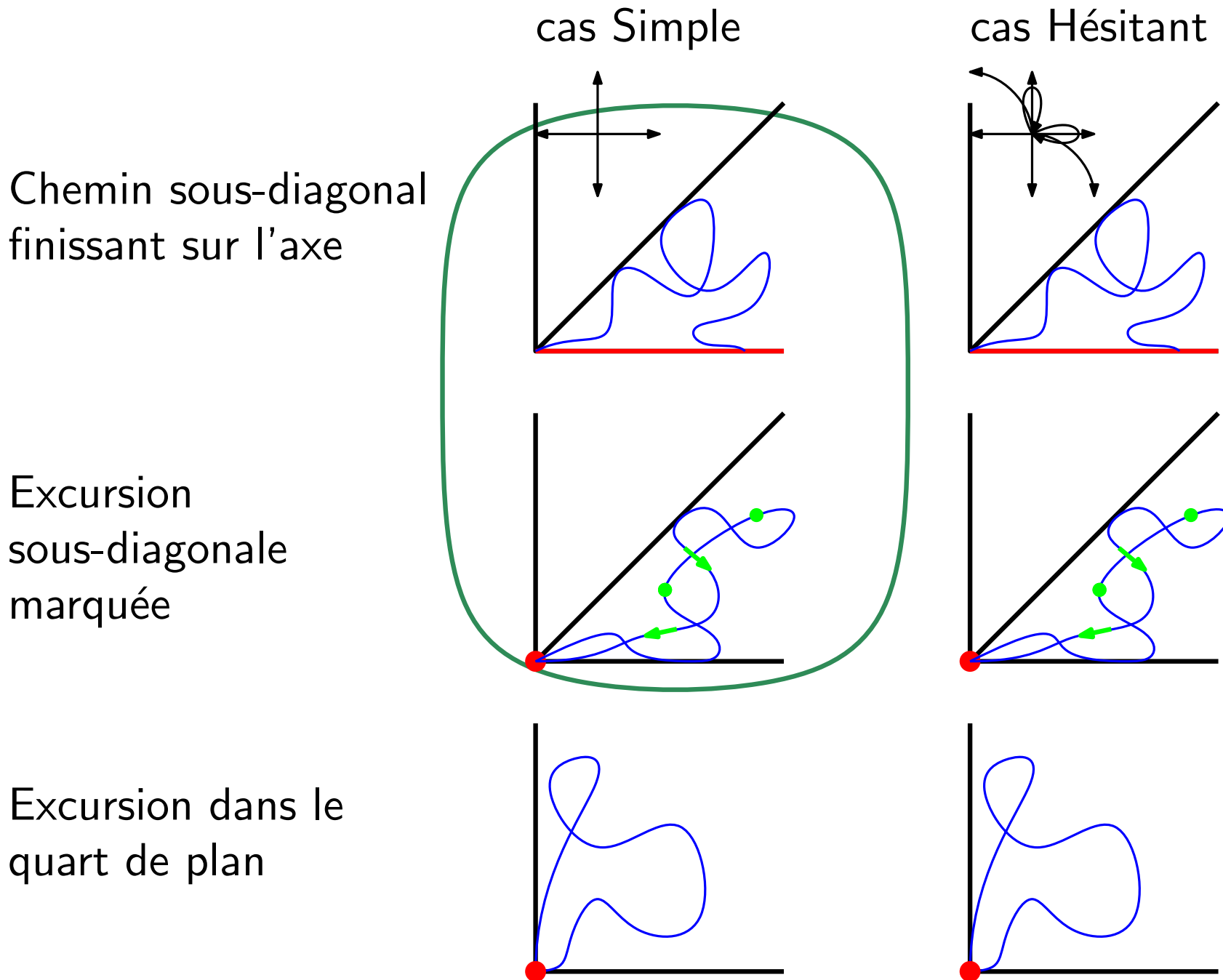


taille = longueur + poids



excursion sous-diagonale
Simple avec poids sur les
positions axiales, de taille
 $2n$

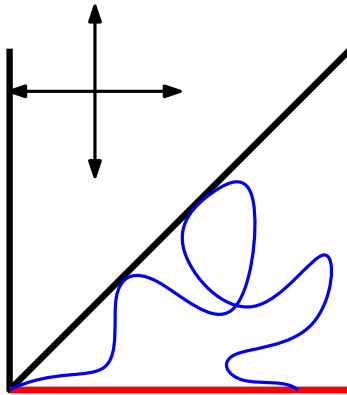
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée



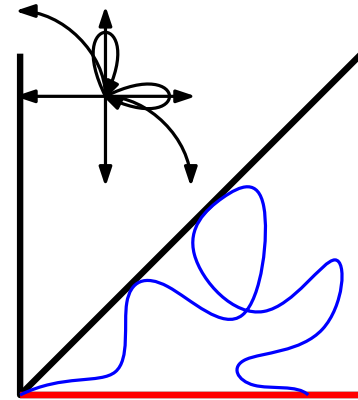
Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe

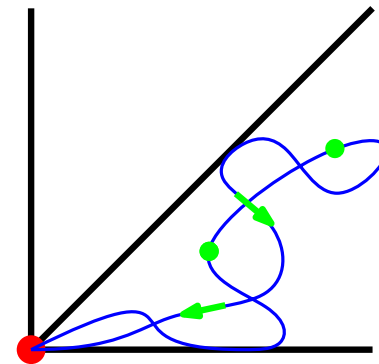
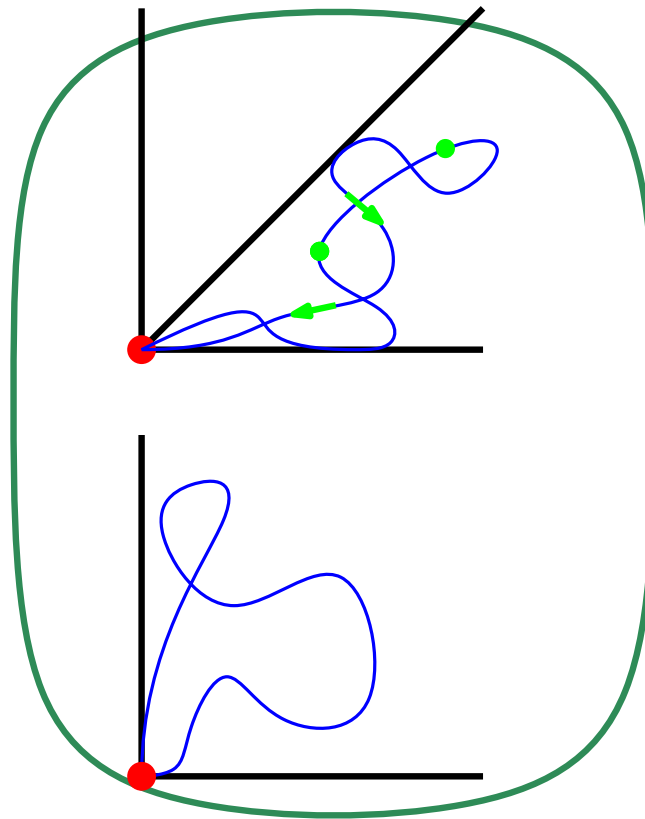
cas Simple



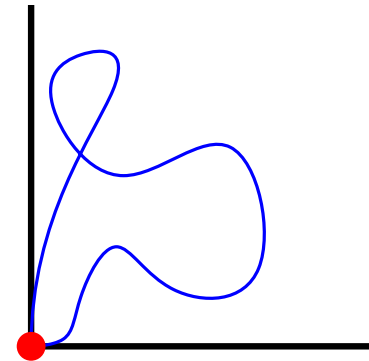
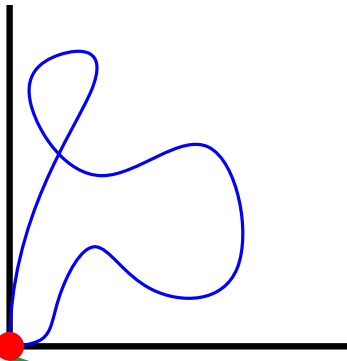
cas Hésitant



Excursion
sous-diagonale
marquée



Excursion dans le
quart de plan



Le cas pair

marche sous-diagonale
Simple finissant sur
l'axe, de longueur $2n$

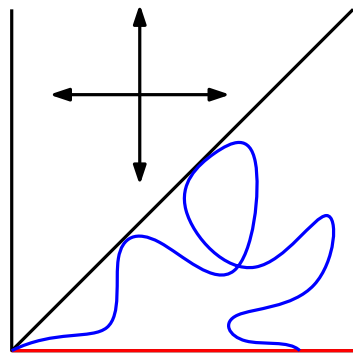


diagramme de couplage
ouvert sans 3-croisement,
de longueur $2n$

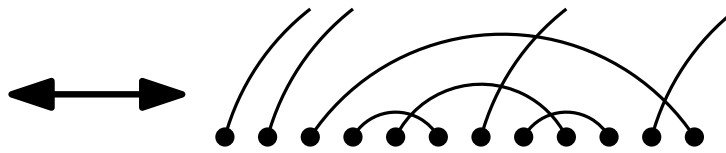
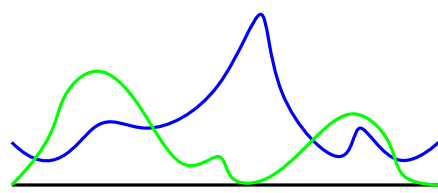
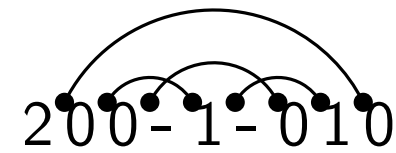
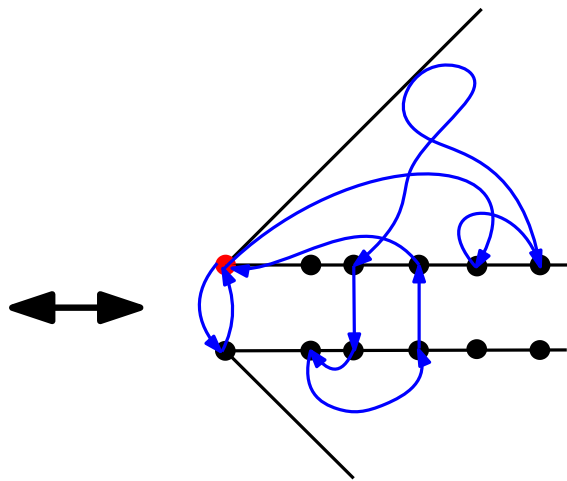


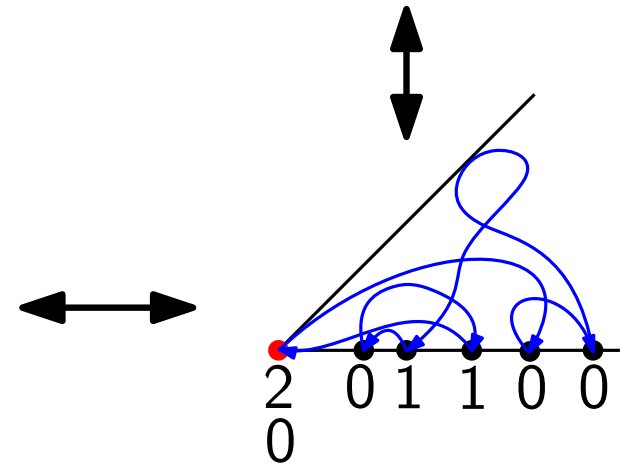
diagramme de couplage
sans 3-croisement avec
poids sur les intervalles
ouverts, de *taille* $2n$



chemins positifs de
longueurs $2n$ allant de
 $(1, 0)$ à $(1, 0)$



excursion
inter-diagonale Simple
de longueur $2n$



excursion sous-diagonale
Simple avec poids sur les
positions axiales, de *taille*
 $2n$

Le cas pair

marche sous-diagonale Simple finissant sur l'axe, de longueur $2n$

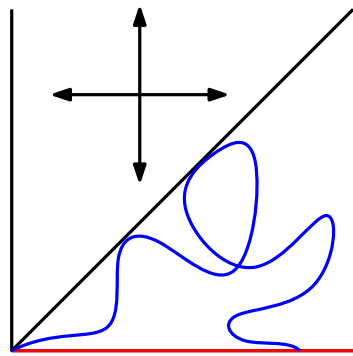


diagramme de couplage ouvert sans 3-croisement, de longueur $2n$

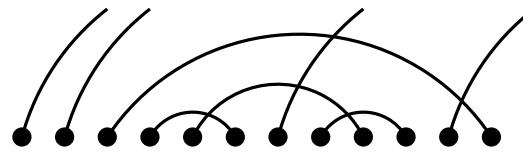
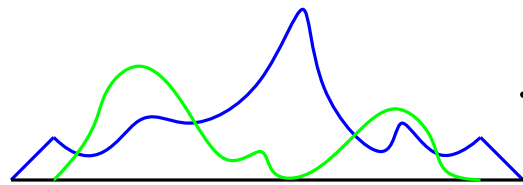
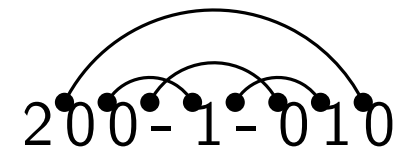
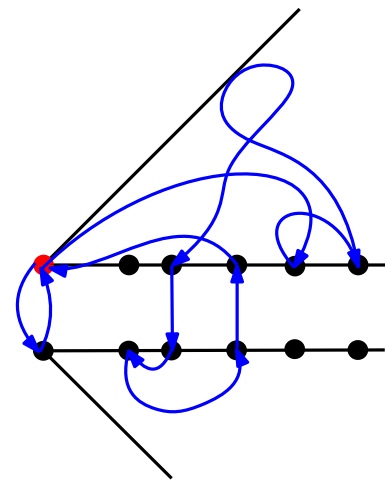


diagramme de couplage sans 3-croisement avec poids sur les intervalles ouverts, de *taille* $2n$

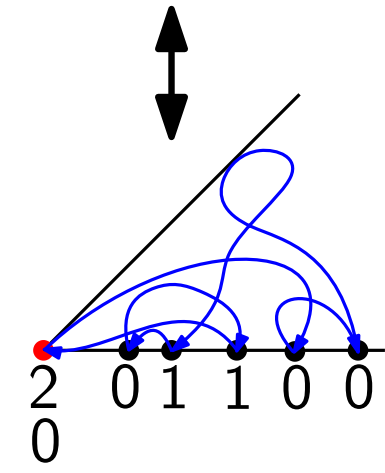


paire de chemins de Dyck de demi-longueurs $(n, n + 1)$

excursion inter-diagonale Simple de longueur $2n$



excursion sous-diagonale Simple avec poids sur les positions axiales, de *taille* $2n$



Le cas impair

marche sous-diagonale Simple finissant sur l'axe, de longueur $2n+1$

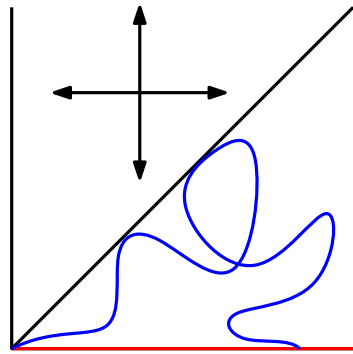


diagramme de couplage ouvert sans 3-croisement, de longueur $2n+1$

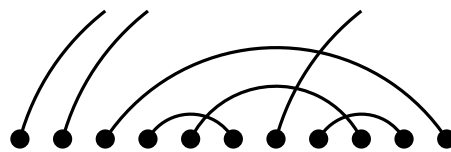
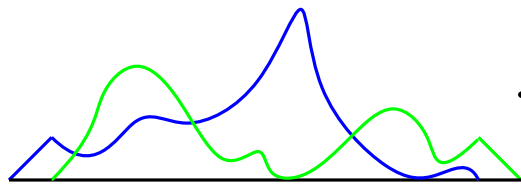
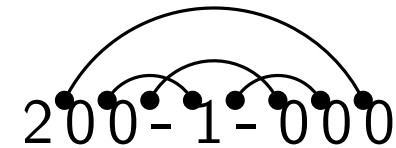
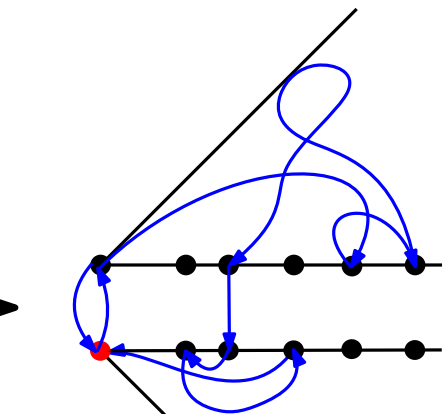


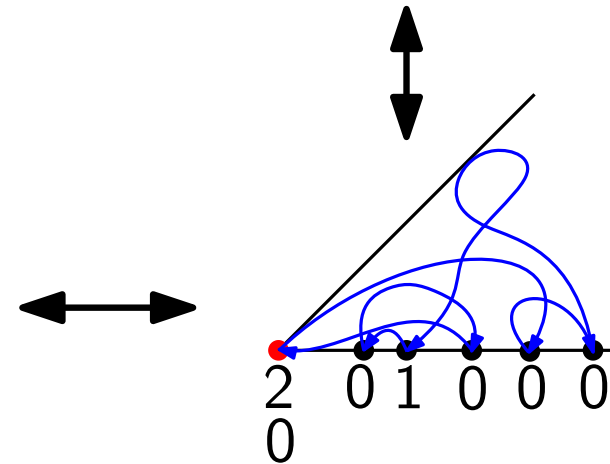
diagramme de couplage sans 3-croisement avec poids sur les intervalles ouverts, de taille $2n+1$



paire de chemins de Dyck de demi-longueurs $n+1$

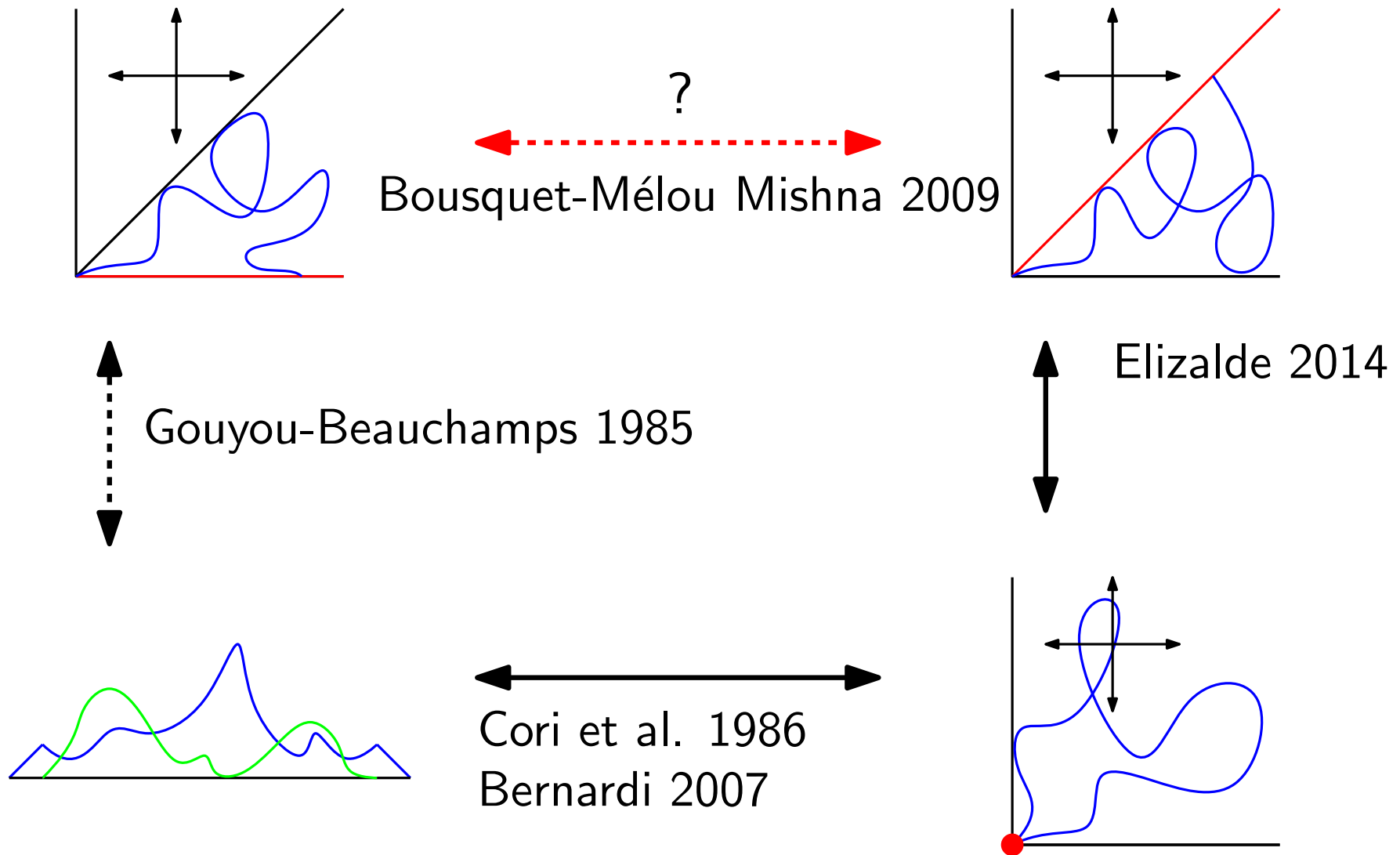


marche Simple inter-diagonale de longueur $2n+1$

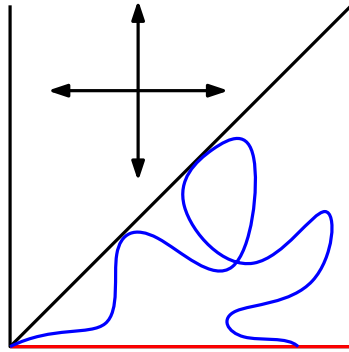


excursion sous-diagonale Simple avec poids sur les positions axiales, de taille $2n+1$

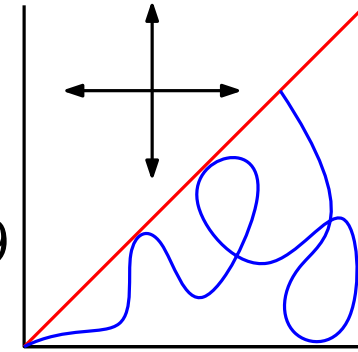
Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



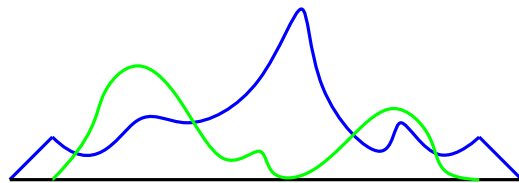
Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



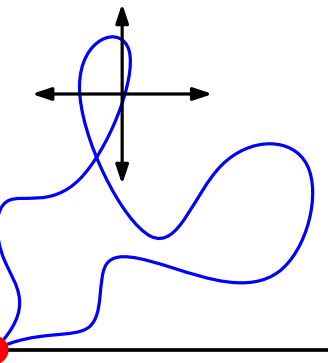
?
Bousquet-Mélou Mishna 2009



représentation
par diagrammes
ouverts

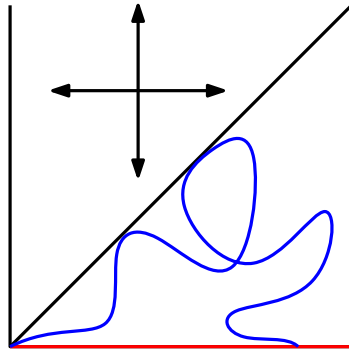


Cori et al. 1986
Bernardi 2007



Elizalde 2014

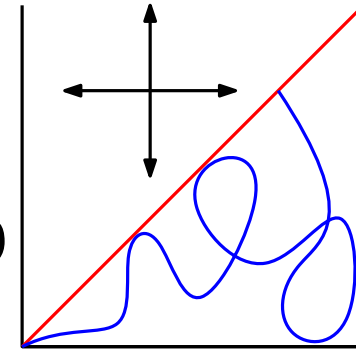
Résolution du problème de Bousquet-Mélou et Mishna : trois nouvelles bijections



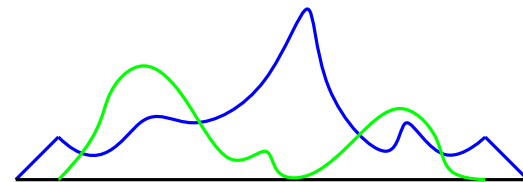
?

←-----→

Bousquet-Mélou Mishna 2009



représentation
par diagrammes
ouverts

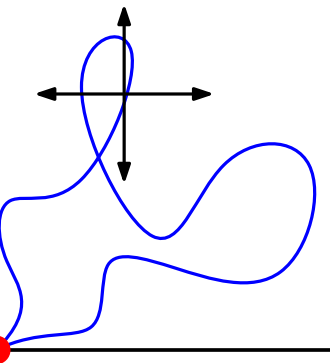


méandres et permutations
de Baxter alternantes



Cori et al. 1986
Bernardi 2007

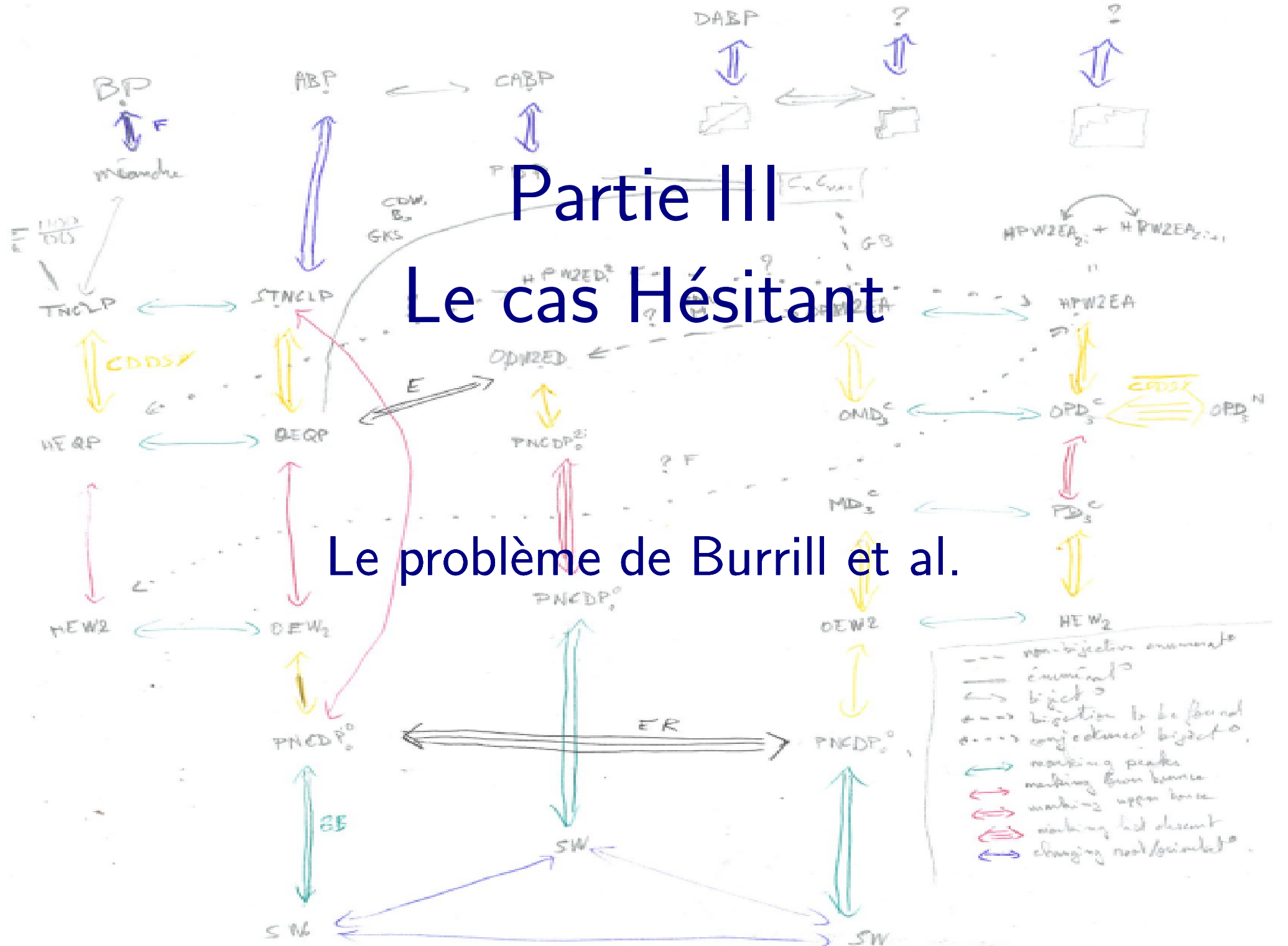
Elizalde 2014
forêts de Schnyder
avec arêtes marquées



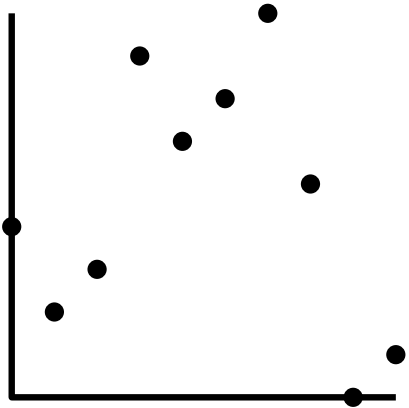
Partie III

Le cas Hésitant

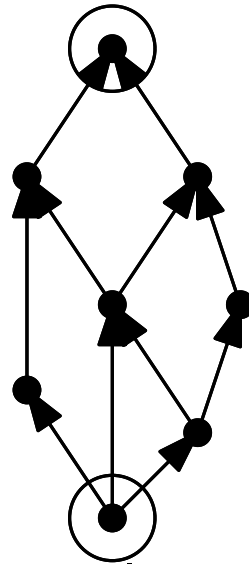
Le problème de Burrill et al.



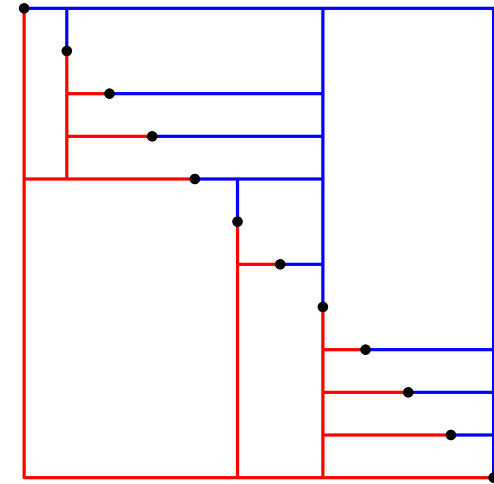
Familles de Baxter symétriques



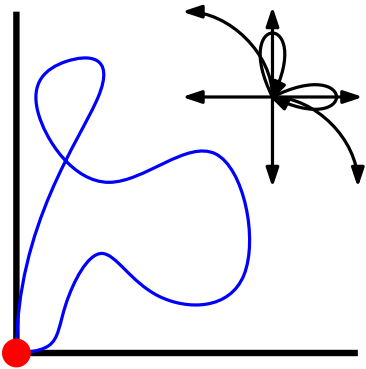
Permutations de Baxter



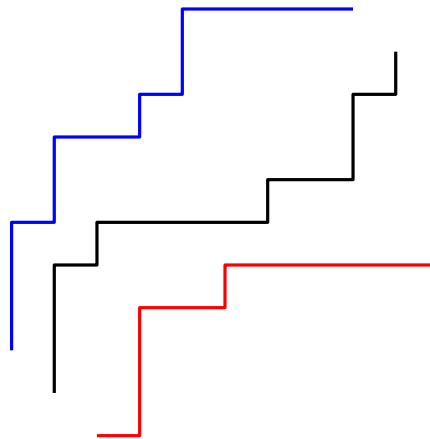
Orientations planes bipolaires



Rectangulations du carré



Excursions Hésitantes dans le quart de plan

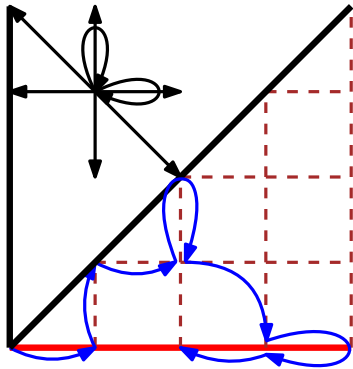


Triplets de chemins

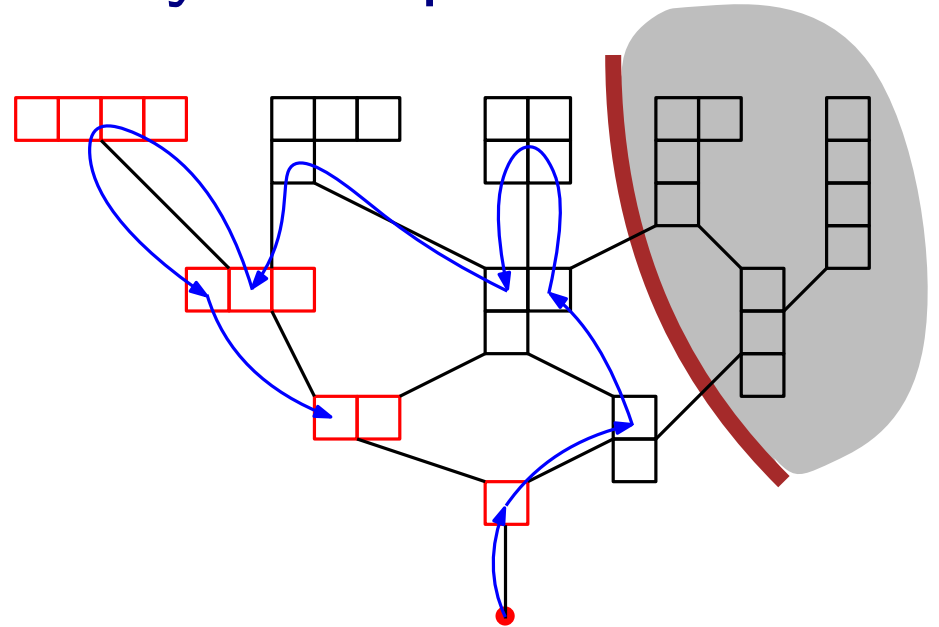
$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2}}$$

Gessel-Viennot

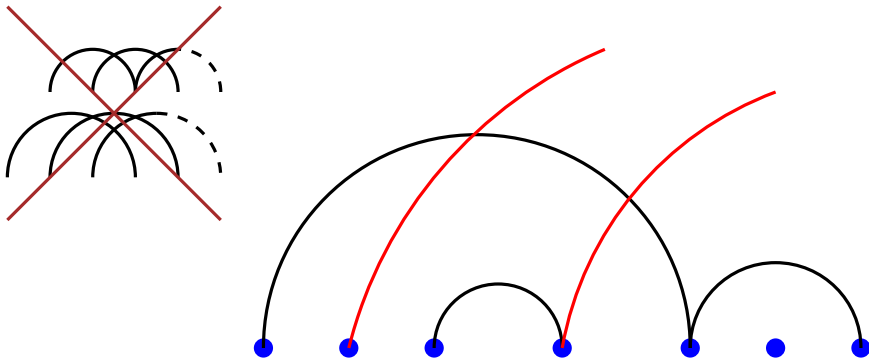
Familles de Baxter asymétriques



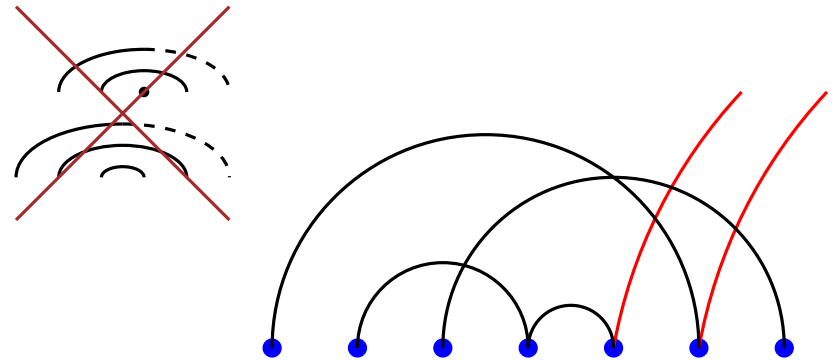
Excursions Hésitantes
sous-diagonales
finissant sur l'axe



Tableaux Hésitants de hauteur au
plus 2 finissant sur une unique ligne



Diagrammes de partition ouverts
sans 3-croisements améliorés



Diagrammes de partitions ouverts
sans 3-emboîtements améliorés

Familles de Baxter

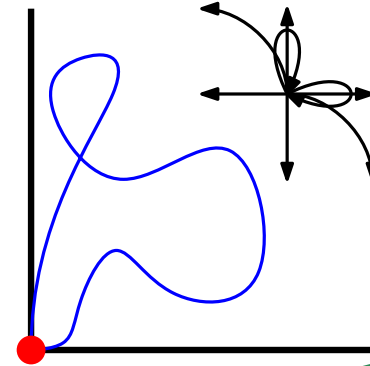
Familles symétriques

Xin et Zhang 2008
(non bijectif)

Familles asymétriques

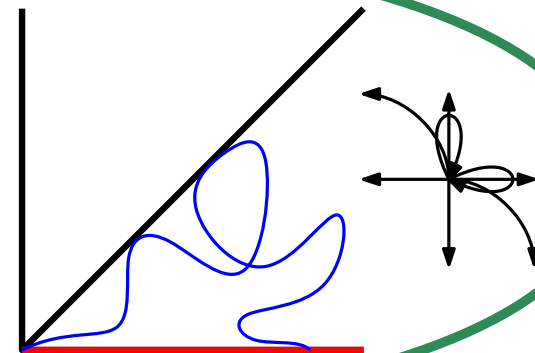
Familles de Baxter

Familles symétriques



preuve
bijective

Familles asymétriques



Stratégie :

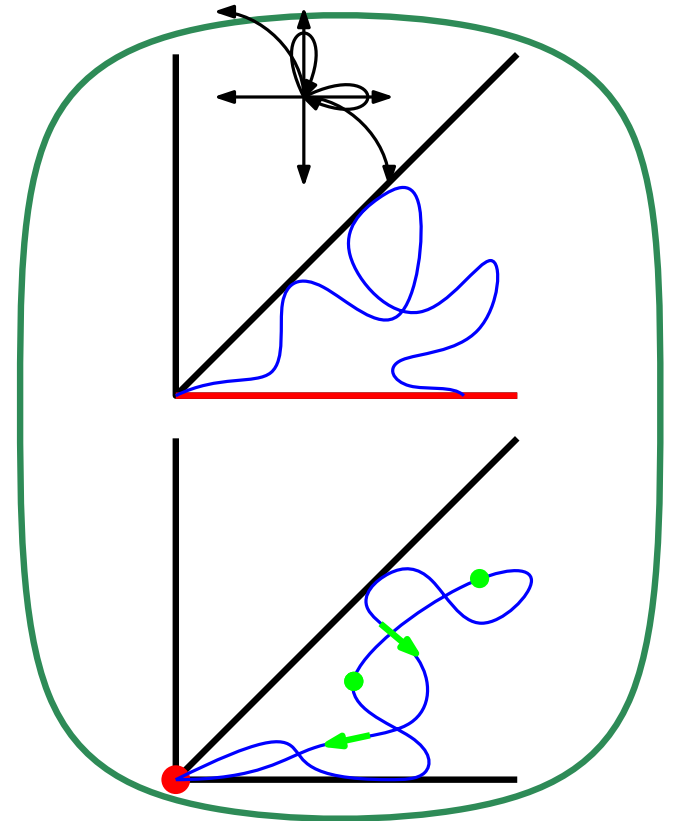
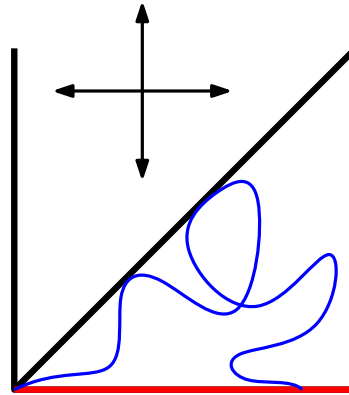
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

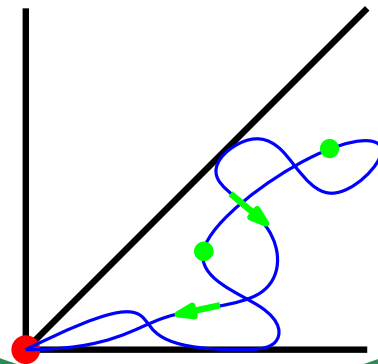
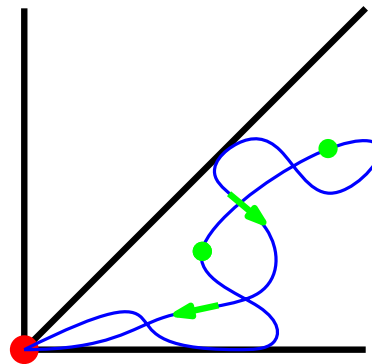
cas Simple

cas Hésitant

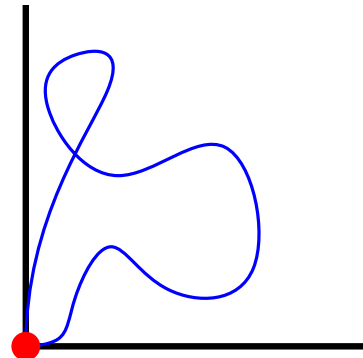
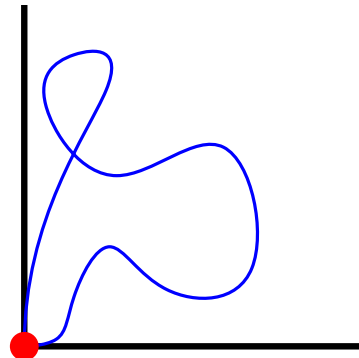
Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe



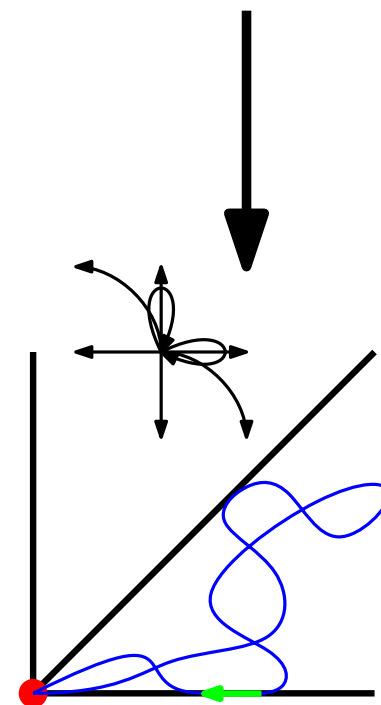
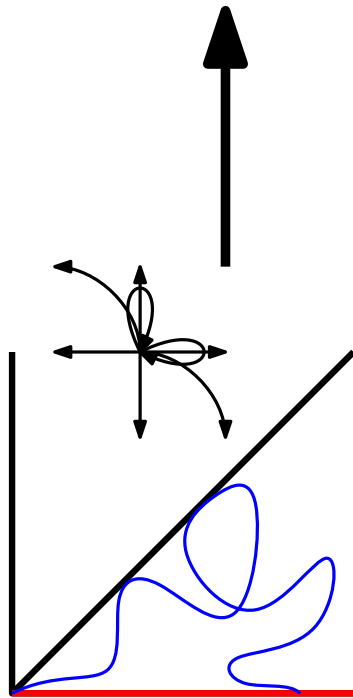
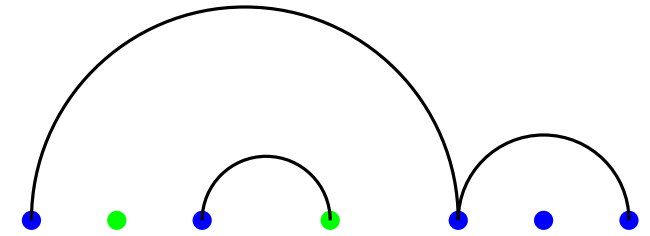
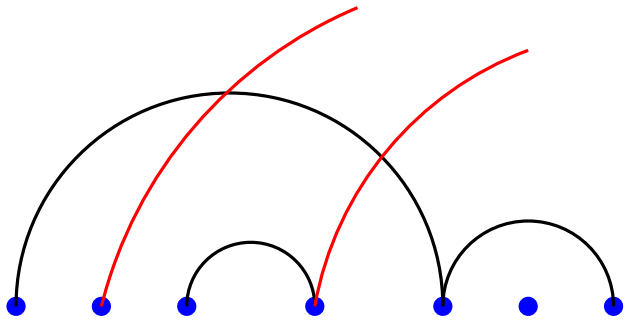
Excursion
sous-diagonale
marquée



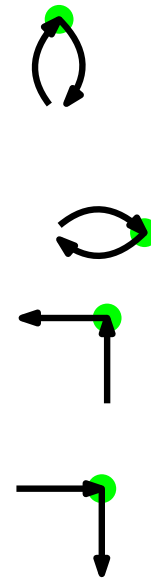
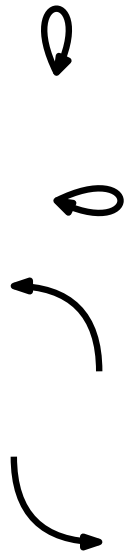
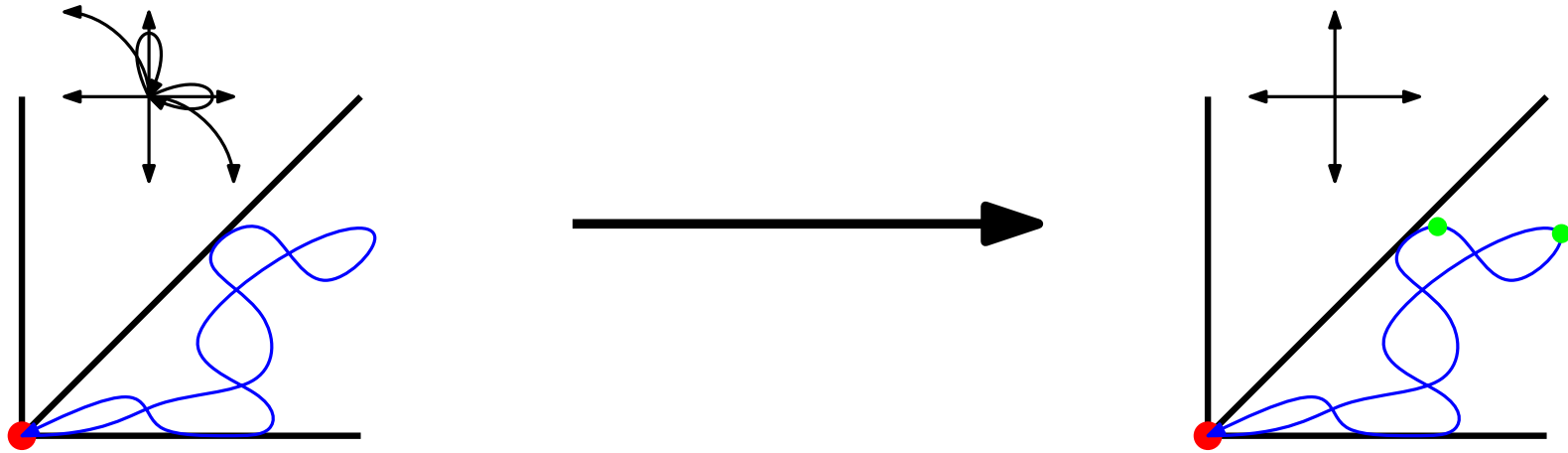
Excursion dans le
quart de plan



Stratégie :
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Stratégie :
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Stratégie :

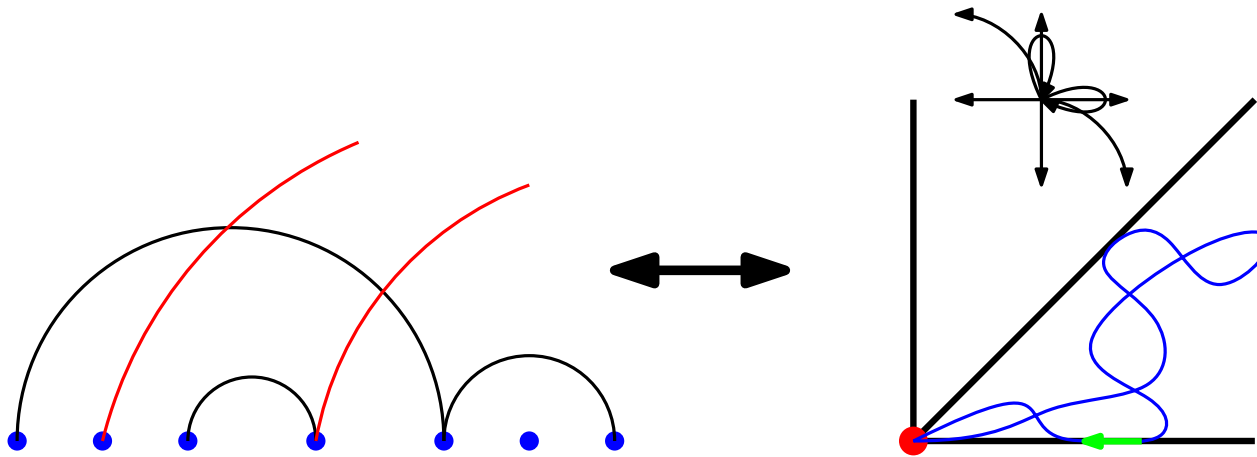
se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Les diagrammes de partition ouvertes sans

3-croisements améliorés de longueur n

sont en bijection avec

les excursions Simples sous-diagonales avec des pics marqués et des *pas gauche le long de l'axe* marqués.

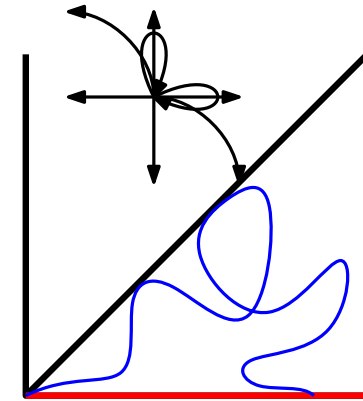
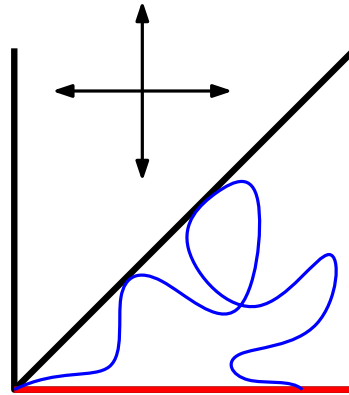


Contrainte de domaine \leftrightarrow Contrainte d'arrivée

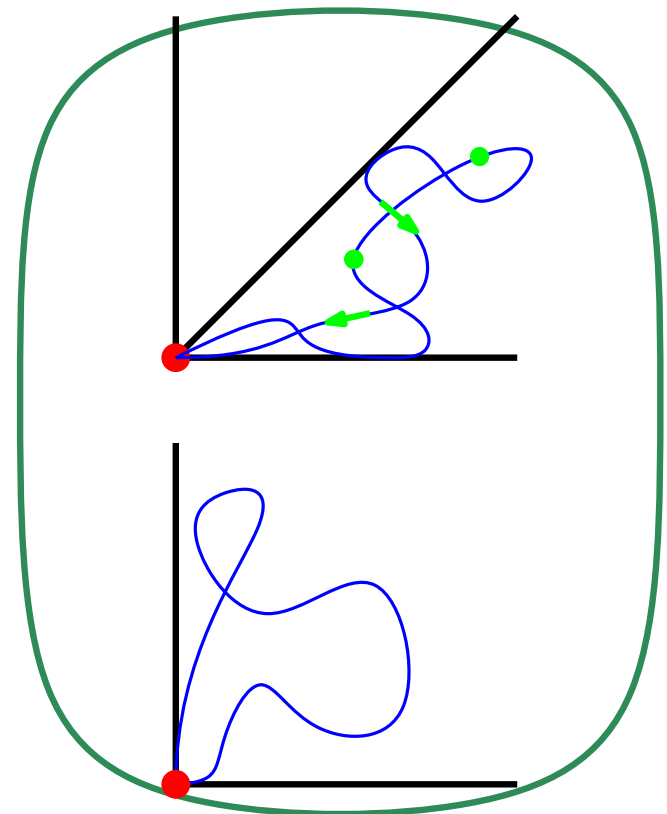
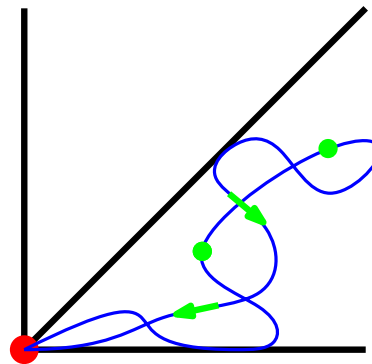
cas Simple

cas Hésitant

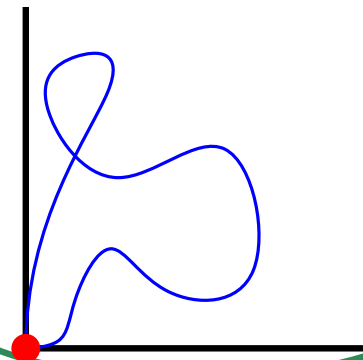
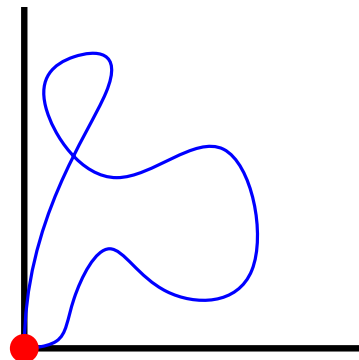
Chemin sous-diagonal
finissant sur l'axe



Excursion
sous-diagonale
marquée

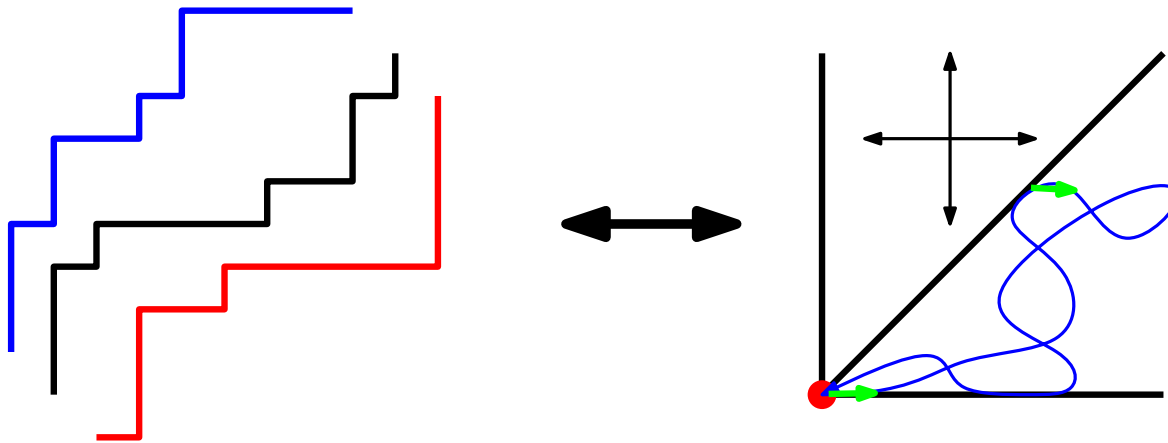


Excursion dans le
quart de plan



Stratégie :

se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Les triplets de chemins de longueur n
sont en bijection avec
les excursions Simples sous-diagonales avec des pics
marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.

Stratégie :

se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Les diagrammes de partition ouvertes sans 3-croisements améliorés de longueur n sont en bijection avec les excursions Simples sous-diagonales avec des pics marqués et des *pas gauche le long de l'axe* marqués.

Les triplets de chemins de longueur n sont en bijection avec les excursions Simples sous-diagonales avec des pics marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.

Inversion des statistiques

Théorème :

Il existe une bijection entre :

- les excursions Simples sous-diagonales de longueur n ayant p pics, i pas quittant la diagonale, et j pas gauche le long de l'axe,
et :
- les excursions Simples sous-diagonales de longueur n ayant p pics, j pas quittant la diagonale, et i pas gauche le long de l'axe

Inversion des statistiques

Théorème :

Il existe une bijection entre :

- les excursions Simples sous-diagonales de longueur n ayant p pics, i pas quittant la diagonale, et j pas gauche le long de l'axe,
et :
- les excursions Simples sous-diagonales de longueur n ayant p pics, j pas quittant la diagonale, et i pas gauche le long de l'axe

Preuves :

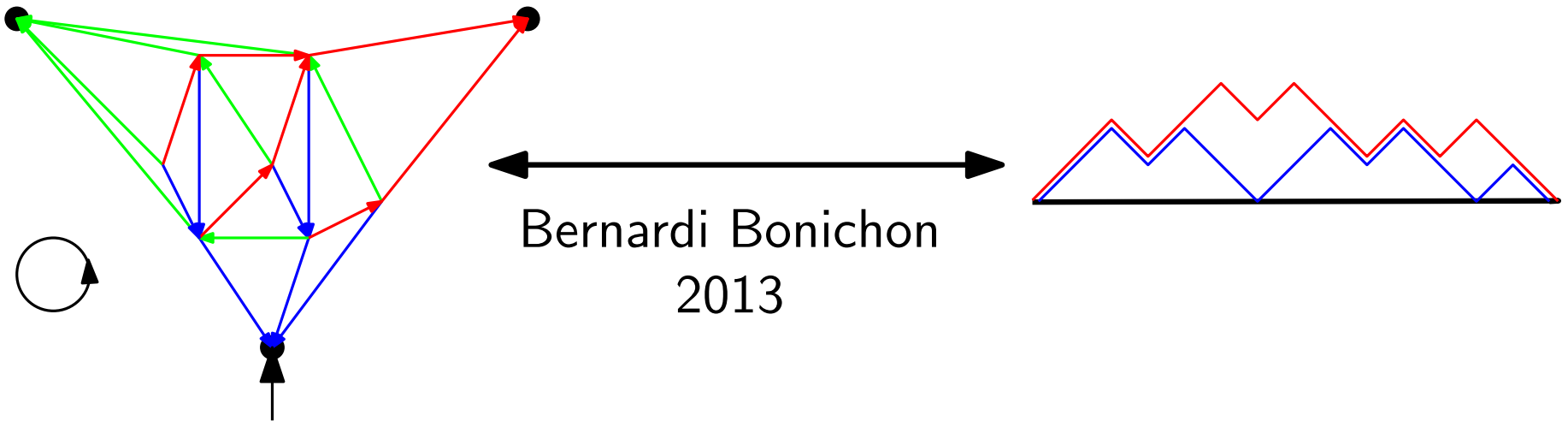
- Représentation par des paires de chemins de Dyck qui ne se croisent pas, et opérations locales sur le chemin inférieur. (Elizalde - Rubey 2012)
- Représentation par des forêts de Schnyder, puis changement de racine et d'orientation



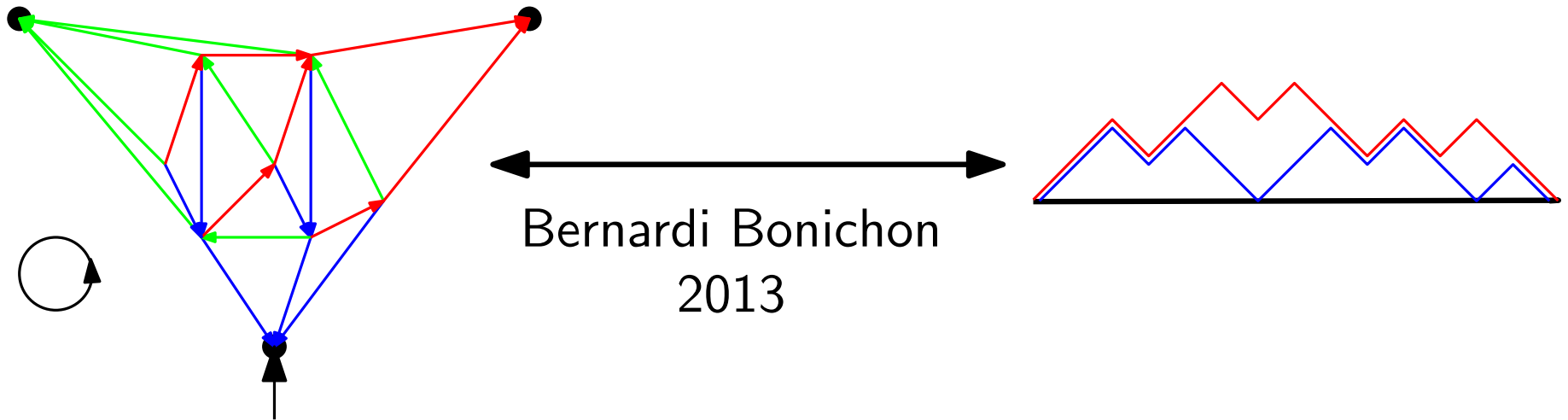
Merci pour votre attention

- non-bijective enumeration
- invariant
- ↔ biject
- ⋯⋯⋯ bijection to be found
- ⋯⋯⋯ conjectured biject
- ↔ marking peaks
- ↔ marking from boxes
- ↔ marking open boxes
- ↔ marking not descent
- ↔ changing root/initial

Annexe I : forêts de Schnyder



Annexe I : forêts de Schnyder



- degré de la racine bleue
- degré de la racine rouge
- degré de la racine verte
- nombre de feuilles de l'arbre bleu
- nombre de sommets internes de l'arbre rouge

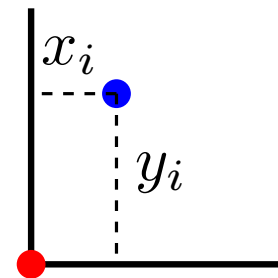
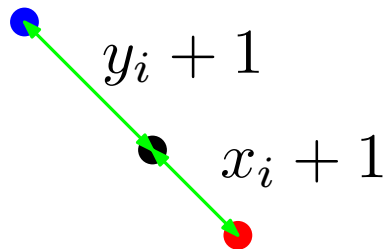
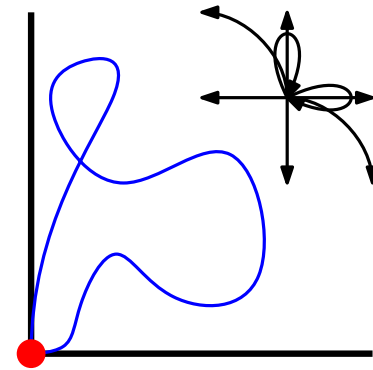
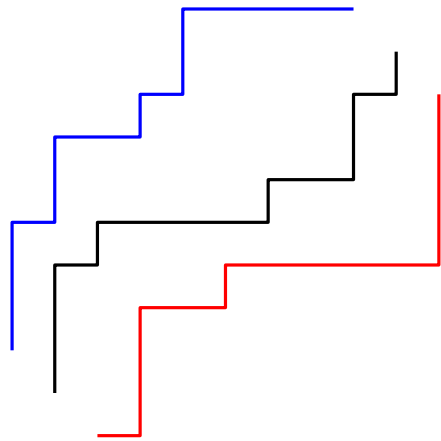


- nombre de pas bleu quittant l'axe
- longueur de la dernière descente rouge
- nombre de pas montant communs
- nombre de pics bleu
- nombre de pics rouge

Annexe II

Stratégie :

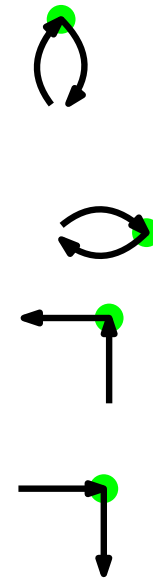
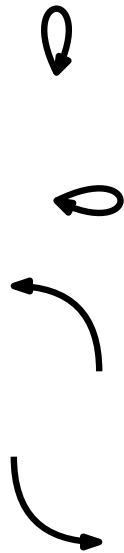
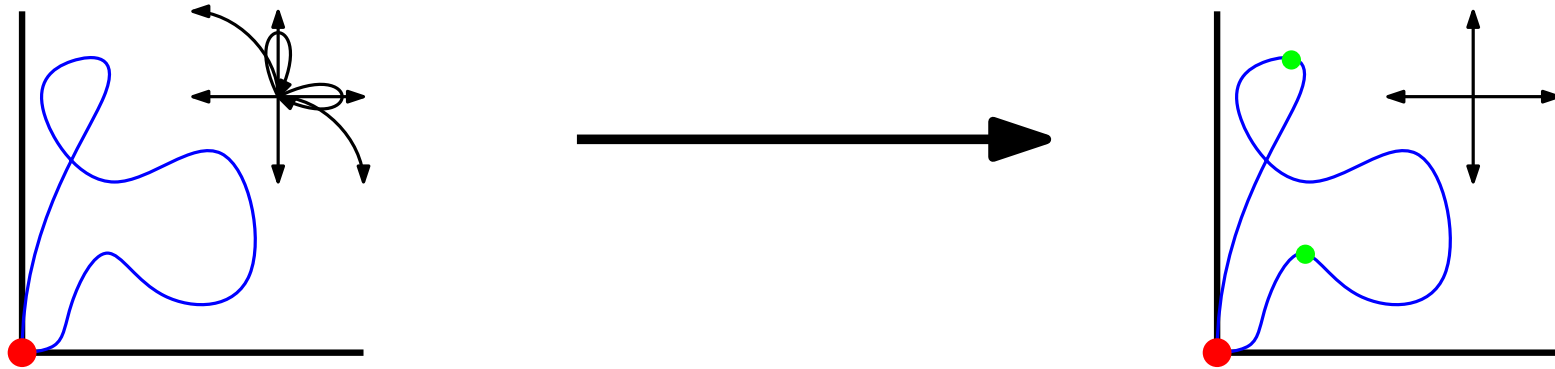
Se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Annexe II

Stratégie :

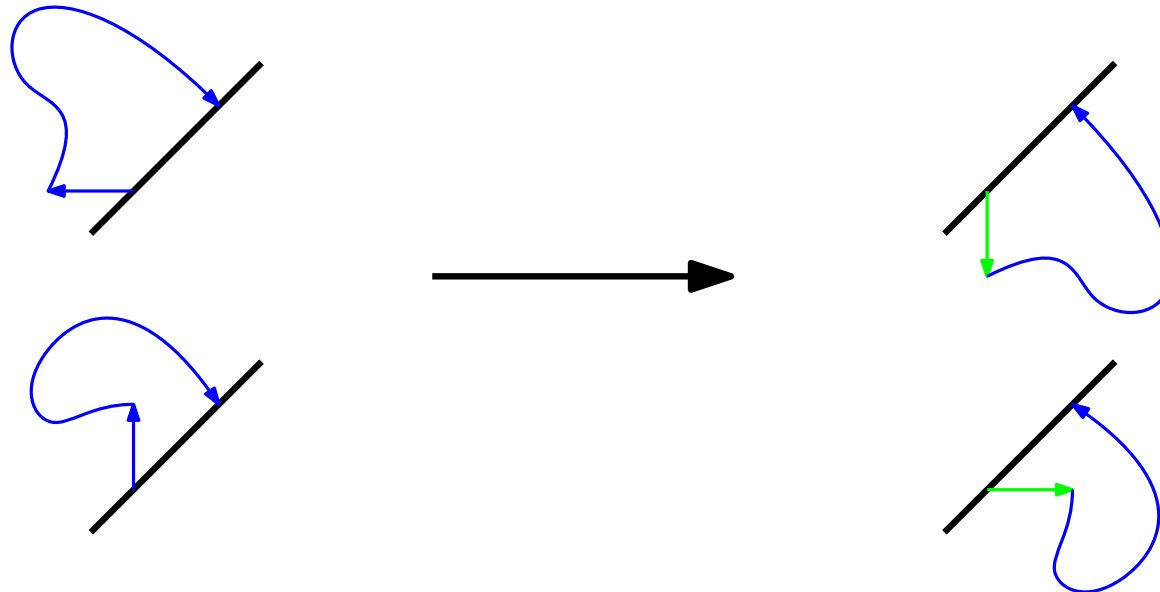
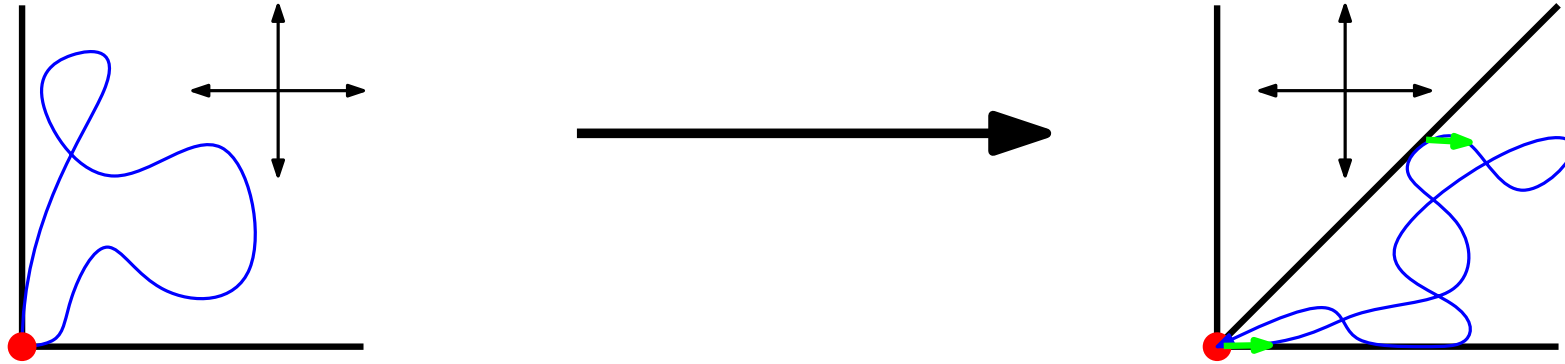
Se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Annexe II

Stratégie :

Se ramener à des excursions sous-diagonales marquées



Annexe II

Stratégie :

Se ramener à des excursions sous-diagonales marquées

Les triplets de chemins de longueur n
sont en bijection avec

les excursions Simples sous-diagonales avec des pics
marqués et des *pas quittant la diagonale* marqués.