Des triangles équilibrés

Jonathan Chappelon

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier

Journées du GT Combinatoire Algébrique

Lyon, le 5 septembre 2016

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0

Le problème de Steinhaus

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0
0

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0
0 1

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0
 0 1 1 1 1 0

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 1 1 0

Le problème de Steinhaus

0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 1 1 0
1 0 0 0 1

Le problème de Steinhaus

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Le problème de Steinhaus

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
& & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
& & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
& & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
& & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Problème (Steinhaus 1963)

Existe-t-il, pour tout $n \equiv 0$ or $3 \bmod 4$, une suite binaire de longueur n dont le triangle associé contienne autant de 0 que de 1 ?

Le problème de Steinhaus

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
& & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
& & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

14 zéros
14 uns

Problème (Steinhaus 1963)

Existe-t-il, pour tout $n \equiv 0$ or $3 \bmod 4$, une suite binaire de longueur n dont le triangle associé contienne autant de 0 que de 1 ?

Le problème de Steinhaus

Théorème (Harborth 1972)

Pour tout $n \equiv 0$ ou 3 mod 4, il existe au moins quatre suites binaires de longueur n dont les triangles associés contiennent autant de 0 que de 1. (Preuve constructive)

Le problème de Steinhaus

Théorème (Harborth 1972)

Pour tout $n \equiv 0$ ou 3 mod 4, il existe au moins quatre suites binaires de longueur n dont les triangles associés contiennent autant de 0 que de 1. (Preuve constructive)

Autres solutions

- 2004 : Eliahou et Hachez (triangles fortement équilibrés),
- 2005 : Eliahou et Hachez (suites antisymétriques),
- 2007 : Eliahou, Marín et Revuelta (suites à somme nulle).

Orbite de suites binaires

Processus de dérivation

$$\begin{array}{rccc} \partial : & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \\ & S = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \partial S = (a_{j-1} + a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Suites dérivées

Pour tout $i \geqslant 1$, soit $\partial^i S = \partial\left(\partial^{i-1} S\right)$ avec $\partial^0 S := S$.

Orbite

L'orbite $\mathcal{O}_S$ de $S \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ est la suite $\mathcal{O}_S = \left(\partial^i S\right)_{i\in\mathbb{N}}$.

$\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ où

- $a_{0,j} = a_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
- $a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \mathbb{Z}$.

Exemple d'orbite

0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0

Exemple d'orbite

0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Exemple d'orbite

0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1

Exemple d'orbite

0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0

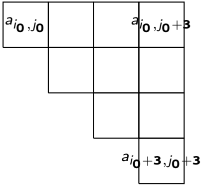
Des triangles dans une orbite

Triangle de Steinhaus

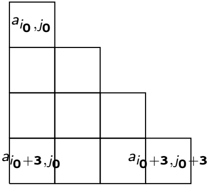
$\nabla(i_0, j_0, n) = \{a_{i_0+i, j_0+j} \mid 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1\}$

Triangle de Pascal généralisé

$\triangle(i_0, j_0, n) = \{a_{i_0+i, j_0+j} \mid 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n-1\}$



$\nabla(i_0, j_0, 4)$



$\triangle(i_0, j_0, 4)$

Des triangles dans une orbite

0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Triangles équilibrés

Triangle équilibré

Soient T un triangle et $\mathfrak{m}_T : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ sa fonction de multiplicité. Le triangle T est dit équilibré si $|\mathfrak{m}_T(0) - \mathfrak{m}_T(1)| \in \{0, 1\}$.

Soit T un triangle de taille n. Il contient $\binom{n+1}{2}$ éléments.

- Si $\binom{n+1}{2}$ pair ($n \equiv 0$ ou $3 \bmod 4$) :

$$T \text{ équilibré} \iff \mathfrak{m}_T(0) = \mathfrak{m}_T(1).$$

- Si $\binom{n+1}{2}$ impair ($n \equiv 1$ ou $2 \bmod 4$) :

$$T \text{ équilibré} \iff \mathfrak{m}_T(0) = \mathfrak{m}_T(1) \pm 1.$$

Résultat

Théorème (C. 2016)

Il existe $S \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ telle que $\mathcal{O}_S$ contienne des triangles de Steinhaus équilibrés et des triangles de Pascal équilibrés de taille n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une nouvelle solution (simple) au problème de Steinhaus.
- La première étape de cette construction est basée sur la méthode de Harborth introduite en 1972.

Orbites périodiques

- Une suite $S = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est dite périodique de période p si $a_{j+p} = a_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.
- L'orbite $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}}$ est dite périodique de période p si $a_{i,j} = a_{i,j+p} = a_{i+p,j}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$.

0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1

Orbites périodiques

Soit $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ une orbite. Alors,

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{0,j-k}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$.

Théorème

La suite p-périodique $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})^\infty$ engendre une orbite p-périodique $\mathcal{O}_S$ si et seulement si $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ vérifie

$$\begin{pmatrix} \binom{p}{p} & \binom{p}{p-1} & \binom{p}{p-2} & \cdots & \binom{p}{1} \\ \binom{p}{1} & \binom{p}{p} & \binom{p}{p-1} & \cdots & \binom{p}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p}{p-1} & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-3} & \cdots & \binom{p}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Orbites périodiques

Théorème

La suite p-périodique $S = X^\infty$, où $X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$, engendre une orbite p-périodique $\mathcal{O}_S$ si et seulement si X est dans le noyau de

$$W_p = \left(\binom{p}{|i-j|} \bmod 2 \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim\ker(W_p)$	0	0	2	0	0	4	6	0	2	0	0	8

Pour $p = 6$, on a

$$\begin{aligned} \ker W_6 &= \langle 100010, 010001, 001010, 000101 \rangle \\ &= \{000000, 100010, 010001, 110011, 001010, 101000, \\ &\quad 011011, 111001, 000101, 100111, 010100, 110110, \\ &\quad 001111, 101101, 011110, 111100\}. \end{aligned}$$

Translation d'orbites

L'orbite $\mathcal{O}_{S'} = (b_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}}$ est la translatée de l'orbite $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}}$ par $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ si

$$b_{i,j} = a_{i+u,j+v}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. On note alors $\mathcal{O}_{S'} = t_{u,v}(\mathcal{O}_S)$.

Pour $S = (111111000011)^\infty$ et $S' = (101010100000)^\infty$, on a $\mathcal{O}_{S'} = t_{3,6}(\mathcal{O}_S)$

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

Action de D_3 sur les triangles

Soient r la rotation de 120 degrées et h la réflection par rapport à l'axe vertical. Alors $D_3 = \langle r, h \rangle$ agit sur l'ensemble des triangles binaires.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

Id

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{array}$$

$r(0100) = 0011$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array}$$

$r^2(0100) = 1010$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array}$$

$h(0100) = 0010$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{array}$$

$hr(0100) = 1100$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array}$$

$hr^2(0100) = 0101$

Symétries d'orbites périodiques

Soit X^∞ une suite p-périodique telle que $\mathcal{O}_{X^\infty}$ soit aussi p-périodique. L'action de D_3 sur l'ensemble des orbites périodiques est définie par

$$g\left(\mathcal{O}_{X^\infty}\right) = \mathcal{O}_{g(X)^\infty}$$

pour tout $g \in D_3$.

1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0

Id

0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0

r

0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1

r^2

Symétries d'orbites périodiques

1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0

Id

0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0

r

0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1

r^2

1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0

h

0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1

hr

0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0

hr^2

Classes d'équivalence des orbites périodiques

Soit $\sim$ la relation binaire sur l'ensemble des orbites périodiques de période p définie par $\mathcal{O}_{S_1} \sim \mathcal{O}_{S_2}$ ssi il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ et $g \in D_3$ tels que $\mathcal{O}_{S_1} = t_{u,v}\left(g\left(\mathcal{O}_{S_2}\right)\right)$.

- $\sim$ est une relation d'équivalence,
- on détermine l'ensemble des classes d'équivalence des orbites périodiques de période p : $\ker(W_p)/\sim$

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lvert\ker(W_p)\rvert$	1	1	4	1	1	16	64	1	4	1	1	256
$\lvert\ker(W_p)/\sim\rvert$	1	1	2	1	1	3	3	1	2	1	1	7

Pour $p = 6$, $\ker(W_6)/\sim = \{000000, 100010, 011011\}$.

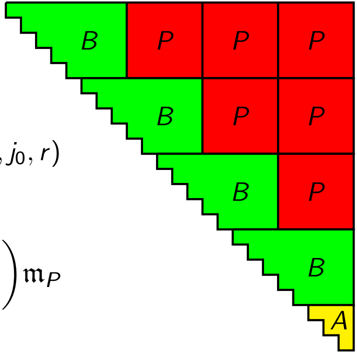
Triangles équilibrés dans les orbites périodiques

$$\nabla(i_0, j_0, n) = \{a_{i_0+i, j_0+j} \mid 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1\}$$

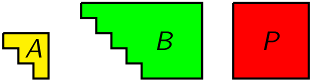
Soit $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. On cherche $(i_0, j_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $T_k = \nabla(i_0, j_0, kp + r)$ soit équilibré pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$A = \nabla(i_0, j_0, r)$
$B = \nabla(i_0, j_0, p + r) \setminus \nabla(i_0, j_0, r)$
$P =$ période de $\mathcal{O}_S$

$$\mathfrak{m}_{T_k} = \mathfrak{m}_A + k\mathfrak{m}_B + \binom{k}{2}\mathfrak{m}_P$$



Triangles équilibrés dans les orbites périodiques



$$\mathfrak{m}_{T_k} = \mathfrak{m}_A + k\mathfrak{m}_B + \binom{k}{2}\mathfrak{m}_P$$

- $\mathfrak{m}_{T_k}(0) - \mathfrak{m}_{T_k}(1) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\iff \begin{cases} \mathfrak{m}_P(0) = \mathfrak{m}_P(1), \\ \mathfrak{m}_B(0) = \mathfrak{m}_B(1), \\ \mathfrak{m}_A(0) - \mathfrak{m}_A(1) \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

- $|P|$ et $|B|$ pair $\implies$ p divisible par 4.

Triangles équilibrés dans les orbites périodiques

On cherche des triangles équilibrés dans les orbites périodiques de période p, où p est divisible par 4 et où la période P est strictement équilibrée ($\mathfrak{m}_P(0) = \mathfrak{m}_P(1)$).

Soit $\mathcal{B}_p$ l'ensemble des éléments de $\ker(W_p)/\sim$ avec une période strictement équilibrée.

p	4	8	12	16	20	24
$\lvert\ker(W_p)\rvert$	1	1	256	1	1	65536
$\lvert\ker(W_p)/\sim\rvert$	1	1	7	1	1	92
$\lvert\mathcal{B}_p\rvert$	0	0	2	0	0	17

Pour chaque suite $S \in \mathcal{B}_p$, et pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et tout $(i_0, j_0) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^2$, on teste si les briques

$$A = \nabla(i_0, j_0, r) \text{ et } B = \nabla(i_0, j_0, p + r) \setminus \nabla(i_0, j_0, r)$$

sont équilibrées.

Triangles équilibrés dans les orbites périodiques

Pour chaque suite $S \in \mathcal{B}_p$, et pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et tout $(i_0, j_0) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^2$, on teste si les briques A et B sont équilibrées.

$$\mathcal{R}_S := \{r \mid \exists (i_0, j_0) \text{ t.q. } \nabla(i_0, j_0, kp + r) \text{ équilibré } \forall k \in \mathbb{N}\}$$

Pour chacune des deux $S \in \mathcal{B}_{12}$, l'ensemble $\mathcal{R}_S$ est vide. Pour $S \in \mathcal{B}_{24}$?

S	$\lvert\mathcal{R}_S\rvert$	S	$\lvert\mathcal{R}_S\rvert$
110101100000000011010110	18	101110010100000011111001	23
111010010000000011101001	16	101001000010000010000100	24
011001001000000011100100	23	110110100010000011111010	23
011101101000000011110110	24	110000010010000011100001	20
001111101000000010111110	17	101111110010000010011111	20
111110000100000010111000	24	100110000110000011111000	23
100101000100000011010100	24	000011101110000011101110	0
110111000100000010011100	24	100010100010100010100010	0
111100010100000010110001	24		

Pour $S = (011101101000000011110110)^\infty$

Dans $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})$, les triangles de Steinhaus suivants sont équilibrés pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- $\nabla(5, 8, 24k + r)$ pour $r \in \{5, 6, 11, 12, 14, 19, 20, 21, 22\}$,
- $\nabla(3, 11, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 1, 2, 3, 9, 10, 17, 19\}$,
- $\nabla(1, 14, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 5, 8, 13, 16, 21, 22, 23\}$,
- $\nabla(2, 12, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 1, 15, 18, 23\}$,
- $\nabla(5, 15, 24k + r)$ pour $r \in \{4, 7, 21, 22, 23\}$.

Pour $S = (011101101000000011110110)^\infty$

Dans $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})$, les triangles de Steinhaus suivants sont équilibrés pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- $\nabla(5, 8, 24k + r)$ pour $r \in \{5, 6, 11, 12, 14, 19, 20, 21, 22\}$, $= \nabla(000111001000010110011001)^\infty[24k + r]$
- $\nabla(3, 11, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 1, 2, 3, 9, 10, 17, 19\}$, $= \nabla(100001010111000011110101)^\infty[24k + r]$
- $\nabla(1, 14, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 5, 8, 13, 16, 21, 22, 23\}$, $= \nabla(001000110101001101110000)^\infty[24k + r]$
- $\nabla(2, 12, 24k + r)$ pour $r \in \{0, 1, 15, 18, 23\}$, $= \nabla(000011001011111010110010)^\infty[24k + r]$
- $\nabla(5, 15, 24k + r)$ pour $r \in \{4, 7, 21, 22, 23\}$. $= \nabla(010000101100110010001110)^\infty[24k + r]$

Le problème de Steinhaus

Le problème de Steinhaus est résolu positivement pour toutes les tailles, même pour les triangles de Steinhaus contenant un nombre impair de termes.

Le problème analogue pour les triangles de Pascal généralisés est aussi résolu car dans une orbite p-périodique $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})$, on a

$$\nabla(i_0, j_0, pk + r) \text{ équilibré } \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$\triangle(i_0 + r + 1, j_0 + r, pk + (p - 1 - r)) \text{ équilibré } \forall k \in \mathbb{N}$$

pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$.

Pour d'autres règles locales

Stirling de première espèce

Dans l'orbite $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + (i-1)a_{i-1,j}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Il existe une orbite 12-périodique contenant des triangles équilibrés de taille n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Stirling de seconde espèce

Dans l'orbite $\mathcal{O}_S = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + ja_{i-1,j}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Il existe une orbite 24-périodique contenant des triangles équilibrés de taille n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Généralisation dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Définitions

Soit $m \geqslant 2$ et soit $S = (a_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ une suite finie de longueur s dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

- la suite dérivée ∂S de S est la suite $\partial S = (a_j + a_{j+1})_{1 \leqslant j \leqslant s-1}$ de longueur $s-1$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,
- le triangle de Steinhaus ∇S de S est la collection $\{S, \partial S, \partial^2 S, \ldots, \partial^{s-1} S\}$, où $\partial^i S = \partial \partial^{i-1} S$ pour $i \geqslant 2$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 2 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 0 & & 1 & \\ & & 4 & & 1 & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Le triangle de Steinhaus $\nabla(2,2,3,3)$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Définition

Un triangle de Steinhaus dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est dit équilibré s'il contient tous les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec la même multiplicité.

Le triangle de Steinhaus $\nabla(2,2,3,3)$ est équilibré dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & & 2 & & 3 & & 3 \\
& 4 & & 0 & & 1 & \\
& & 4 & & 1 & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}
$$

Le problème de Molluzzo

Problème (Molluzzo 1978)

Soit $m \geqslant 2$. Pour tout entier naturel s tel que $\binom{s+1}{2}$ est divisible par m, existe-t-il une suite de longueur s dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont le triangle de Steinhaus associé est équilibré ?

Problème (Molluzzo 1978)

Soit $m \geqslant 2$. Pour tout entier naturel s tel que $\binom{s+1}{2}$ est divisible par m, existe-t-il une suite de longueur s dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont le triangle de Steinhaus associé est équilibré ?

Solution positive dans les cas suivants :

- $m = 2$: 1972 (Harborth).
- $m = 3^k$, pour tout $k \geqslant 1$: 2008 (C.).
- $m = 4$: 2011 (C., Eliahou).
- $m = 5, 7$: 2008 (C.).

Le problème de Molluzzo

Problème (Molluzzo 1978)

Soit $m \geqslant 2$. Pour tout entier naturel s tel que $\binom{s+1}{2}$ est divisible par m, existe-t-il une suite de longueur s dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont le triangle de Steinhaus associé est équilibré ?

Solution positive dans les cas suivants :

- $m = 2$: 1972 (Harborth).
- $m = 3^k$, pour tout $k \geqslant 1$: 2008 (C.).
- $m = 4$: 2011 (C., Eliahou).
- $m = 5, 7$: 2008 (C.).

Il n'existe pas de triangles de Steinhaus équilibrés :

- de taille $s = 5$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$,
- de taille $s = 6$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

AP : une source de triangles de Steinhaus équilibrés

Notation

$\mathrm{AP}(a, d, s) := (a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots, a + (s-1)d).$

AP : une source de triangles de Steinhaus équilibrés

Notation

$\mathrm{AP}(a, d, s) := (a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots, a + (s - 1)d)$.

Théorème (C. 2008)

Soit m un nombre impair. Soient a, d dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec d inversible. Alors,

$$\nabla \mathrm{AP}(a, d, s) \text{ équilibré, pour tout } s \equiv 0 \text{ or } -1 \pmod{\mathrm{ord}_m(2^m)m},$$

où $\mathrm{ord}_m(2^m)$ est l'ordre multiplicatif de 2^m modulo m.

AP : une source de triangles de Steinhaus équilibrés

Notation

$\mathrm{AP}(a, d, s) := (a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots, a + (s - 1)d)$.

Théorème (C. 2008)

Soit m un nombre impair. Soient a, d dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec d inversible. Alors,

$$\nabla\mathrm{AP}(a, d, s) \text{ équilibré, pour tout } s \equiv 0 \text{ or } -1 \pmod{\mathrm{ord}_m(2^m)m},$$

où $\mathrm{ord}_m(2^m)$ est l'ordre multiplicatif de 2^m modulo m.

Corollaire (AP antisymétriques)

- $\nabla\mathrm{AP}(2^{-1}d, d, s)$ équilibré, pour tout $s \equiv 0 \pmod{\mathrm{pord}_m(2^m)m}$,
- $\nabla\mathrm{AP}(d, d, s)$ équilibré, pour tout $s \equiv -1 \pmod{\mathrm{pord}_m(2^m)m}$,

où $\mathrm{pord}_m(2^m)$ est l'ordre de 2^m dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* / \{-1, 1\}$.

AP : une source de triangles de Steinhaus équilibrés

- Réponse positive au problème de Molluzzo dans $\mathbb{Z}/3^k\mathbb{Z}$, pour $k \geqslant 1$.
- Existence d'une infinité de triangles de Steinhaus équilibrés dans chaque $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m impair.
- $N(m) := \left\{ s \in \mathbb{N} \;\middle|\; \binom{s+1}{2} \text{ divisible par } m \right\}$

  $B(m) := \{ s \in \mathbb{N} \mid \exists S \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^s \text{ tel que } \nabla S \text{ équilibré} \}$

$$\frac{|B(m) \bigcap [1,k]|}{|N(m) \bigcap [1,k]|} \geqslant \frac{1}{2^{\omega(m)-1} \mathrm{pord}_m(2^m)},$$

pour $k \geqslant \mathrm{pord}_m(2^m) m$, où $\omega(m)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de m.

Orbite de suites doublement infinies

Suite dérivée

$$\begin{array}{rccc} \partial: & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \\ & (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (a_j + a_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Orbite de suites doublement infinies

Suite dérivée

$$\begin{array}{rccc} \partial : & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \\ & (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (a_j + a_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Suites dérivées successives

$$\partial^0 S = S, \quad \partial^i S = \partial\partial^{i-1} S \text{ pour } i \geqslant 1$$

Orbite de suites doublement infinies

Suite dérivée

$$\begin{array}{rccc} \partial : & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \\ & (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (a_j + a_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Suites dérivées successives

$$\partial^0 S = S, \quad \partial^i S = \partial\partial^{i-1} S \text{ pour } i \geqslant 1$$

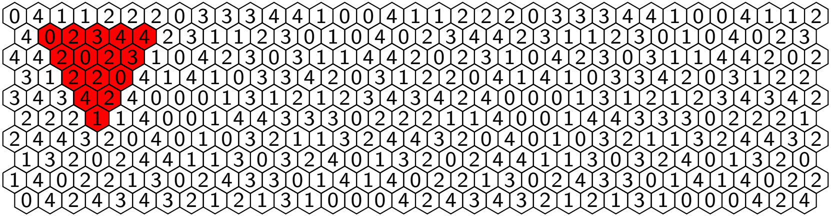
Orbite

$$\mathcal{O}(S) = \left(\partial^i S\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{j+k} \;\middle|\; i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

Un exemple d'orbite dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

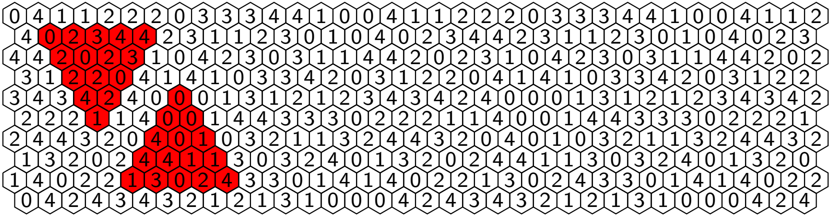
0 4 1 1 2 2 2 0 3 3 3 4 4 1 0 0 4 1 1 2 2 2 0 3 3 3 4 4 1 0 0 4 1 1 2
4 0 2 3 4 4 2 3 1 1 2 3 0 1 0 4 0 2 3 4 4 2 3 1 1 2 3 0 1 0 4 0 2 3
4 4 2 0 2 3 1 0 4 2 3 0 3 1 1 4 4 2 0 2 3 1 0 4 2 3 0 3 1 1 4 4 2 0 2
3 1 2 2 0 4 1 4 1 0 3 3 4 2 0 3 1 2 2 0 4 1 4 1 0 3 3 4 2 0 3 1 2 2
3 4 3 4 2 4 0 0 0 1 3 1 2 1 2 3 4 3 4 2 4 0 0 0 1 3 1 2 1 2 3 4 3 4 2
2 2 2 1 1 4 0 0 1 4 4 3 3 3 0 2 2 2 1 1 4 0 0 1 4 4 3 3 3 0 2 2 2 1
2 4 4 3 2 0 4 0 1 0 3 2 1 1 3 2 4 4 3 2 0 4 0 1 0 3 2 1 1 3 2 4 4 3 2
1 3 2 0 2 4 4 1 1 3 0 3 2 4 0 1 3 2 0 2 4 4 1 1 3 0 3 2 4 0 1 3 2 0
1 4 0 2 2 1 3 0 2 4 3 3 0 1 4 1 4 0 2 2 1 3 0 2 4 3 3 0 1 4 1 4 0 2 2
0 4 2 4 3 4 3 2 1 2 1 3 1 0 0 0 4 2 4 3 4 3 2 1 2 1 3 1 0 0 0 4 2 4

Un exemple d'orbite dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$



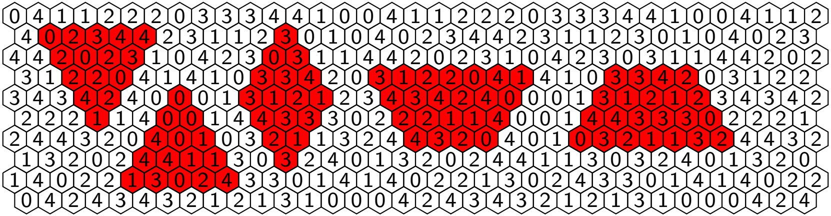
- triangle de Steinhaus

Un exemple d'orbite dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$



- triangle de Steinhaus
- triangle de Pascal généralisé

Un exemple d'orbite dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$



- triangle de Steinhaus
- triangle de Pascal généralisé
- autres figures

Orbite de la suite universelle

-3	5	-2	-2	3	-1	-1	1	0	0	-1	1	1	-3	2	2	-5	3	3	-7	4	4	-9

Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

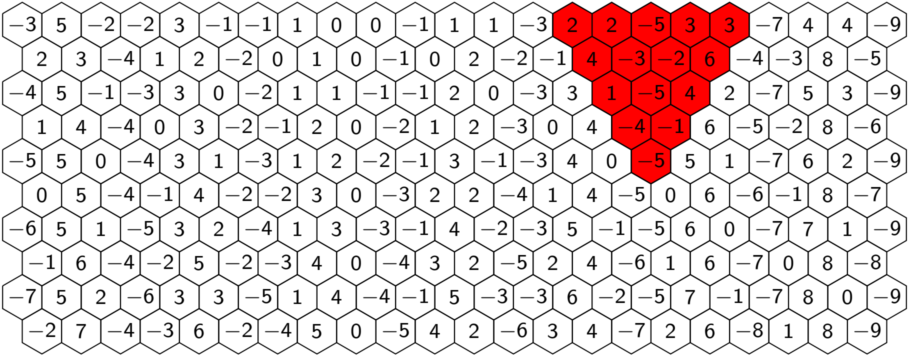
−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	0	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	1	2	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	0	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle



Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	0	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	2	3	1	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	0	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	1	4	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	0	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

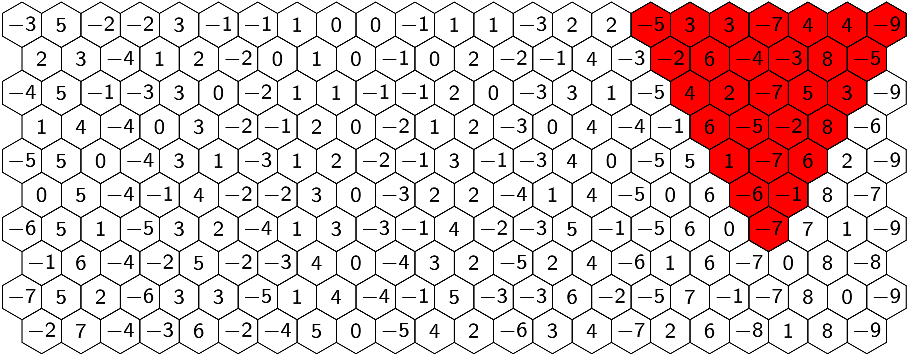
−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	2	3	3	0	4	4	5
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	5	6	3	4	1	2	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	0	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	2	5	1	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	0	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	1	6	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	0	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	


−3 5 −2 −2 3 −1 −1 1 0 0 −1 1 1 −3 2 2 −5 3 3 −7 4 4 −9
2 3 −4 1 2 −2 0 1 0 −1 0 2 −2 −1 4 −3 −2 6 −4 −3 8 −5
−4 5 −1 −3 3 0 −2 1 1 −1 −1 2 0 −3 3 1 −5 4 2 −7 5 3 −9
1 4 −4 0 3 −2 −1 2 0 −2 1 2 −3 0 4 −4 −1 6 −5 −2 8 −6
−5 5 0 −4 3 1 −3 1 2 −2 −1 3 −1 −3 4 0 −5 5 1 −7 6 2 −9
0 5 −4 −1 4 −2 −2 3 0 −3 2 2 −4 1 4 −5 0 6 −6 −1 8 −7
−6 5 1 −5 3 2 −4 1 3 −3 −1 4 −2 −3 5 −1 −5 6 0 −7 7 1 −9
−1 6 −4 −2 5 −2 −3 4 0 −4 3 2 −5 2 4 −6 1 6 −7 0 8 −8
−7 5 2 −6 3 3 −5 1 4 −4 −1 5 −3 −3 6 −2 −5 7 −1 −7 8 0 −9
−2 7 −4 −3 6 −2 −4 5 0 −5 4 2 −6 3 4 −7 2 6 −8 1 8 −9

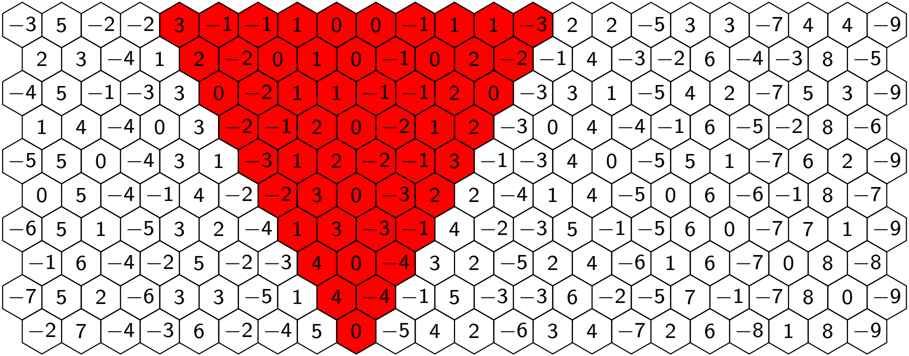
Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	−1	−1	1	0	0	−1	1	1	−3	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	−2	0	1	0	−1	0	2	−2	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	−2	1	1	−1	−1	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	−2	−1	2	0	−2	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	−3	1	2	−2	−1	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	−2	3	0	−3	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	−3	−1	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	−4	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	−4	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle

−3	5	−2	−2	3	4	4	1	0	0	4	1	1	2	2	2	−5	3	3	−7	4	4	−9
2	3	−4	1	2	3	0	1	0	4	0	2	3	−1	4	−3	−2	6	−4	−3	8	−5	
−4	5	−1	−3	3	0	3	1	1	4	4	2	0	−3	3	1	−5	4	2	−7	5	3	−9
1	4	−4	0	3	3	4	2	0	3	1	2	−3	0	4	−4	−1	6	−5	−2	8	−6	
−5	5	0	−4	3	1	2	1	2	3	4	3	−1	−3	4	0	−5	5	1	−7	6	2	−9
0	5	−4	−1	4	−2	3	3	0	2	2	2	−4	1	4	−5	0	6	−6	−1	8	−7	
−6	5	1	−5	3	2	−4	1	3	2	4	4	−2	−3	5	−1	−5	6	0	−7	7	1	−9
−1	6	−4	−2	5	−2	−3	4	0	1	3	2	−5	2	4	−6	1	6	−7	0	8	−8	
−7	5	2	−6	3	3	−5	1	4	1	−1	5	−3	−3	6	−2	−5	7	−1	−7	8	0	−9
−2	7	−4	−3	6	−2	−4	5	0	−5	4	2	−6	3	4	−7	2	6	−8	1	8	−9	

Orbite de la suite universelle



La suite universelle

$$\ldots\ldots, 0, -1, 1, 1, -3, 2, 2, -5, 3, 3, -7, 4, 4, -9, 5, 5, \ldots\ldots$$

Construction d'une suite d'entiers dont la projection de son orbite dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, avec m impair, contient :

- des triangles de Steinhaus équilibrés de taille s pour tout $s \equiv 0 \pmod{m}$ et $s \equiv -1 \pmod{3m}$,
- des triangles de Pascal généralisés équilibrés de taille s pour tout $s \equiv -1 \pmod{m}$ et $s \equiv 0 \pmod{3m}$.

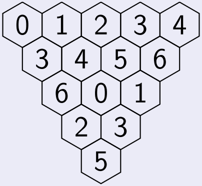
Triangles arithmétiques

Définition

Soient a, d_1 et d_2 dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Le triangle arithmétique de taille s, de premier élément a et de raison (d_1, d_2) est défini par

$$\mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s) = \{a + id_1 + jd_2 \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ tels que } i + j \leqslant s - 1\}$$

Exemple dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $\mathrm{AT}(0, (3, 1), 5)$



AT équilibrés

Condition nécessaire d'équilibre

$\mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ équilibré $\Longrightarrow$ d_1, d_2 et $d_1 - d_2$ sont inversibles.

AT équilibrés

Condition nécessaire d'équilibre

$\mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ équilibré $\Longrightarrow$ d_1, d_2 et $d_1 - d_2$ sont inversibles.

Remarque

Il n'y a pas de AT équilibré dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m pair.

AT équilibrés

Condition nécessaire d'équilibre

$\mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ équilibré $\Longrightarrow$ d_1, d_2 et $d_1 - d_2$ sont inversibles.

Remarque

Il n'y a pas de AT équilibré dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec m pair.

Théorème

Soit m un nombre impair. Soient a dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et soient d_1, d_2 et $d_1 - d_2$ des inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ est équilibré dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour tout $s \equiv 0$ ou $-1 \pmod{m}$.

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

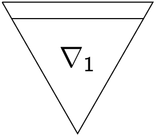
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :

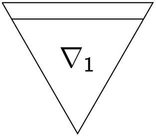


$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ est décomposé comme suit :

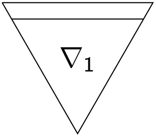


$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$

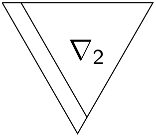
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



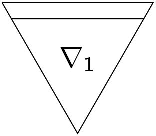
$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$



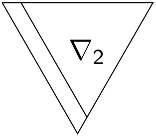
$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



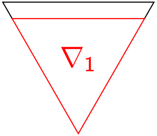
$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$



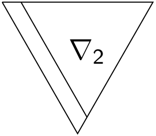
$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$



$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$

$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :

$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$ $\qquad$ $\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$

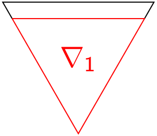
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1)$

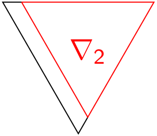
Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a,(d_1,d_2),s)$ est décomposé comme suit :



$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$



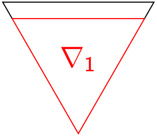
$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

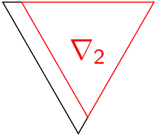
$$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1)$$

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$



$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

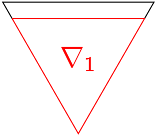
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1)$ $\qquad$ $\mathrm{AT}(a + d_2, (d_1, d_2), s - 1)$

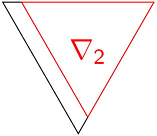
Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$$



$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

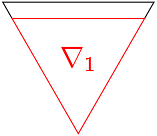
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_{\nabla}(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1) \xrightarrow{t_{d_2 - d_1}} \mathrm{AT}(a + d_2, (d_1, d_2), s - 1)$$

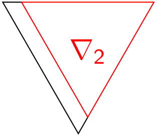
Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :





$$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1 \qquad \nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$$

$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1) \xrightarrow{t_{d_2 - d_1}} \mathrm{AT}(a + d_2, (d_1, d_2), s - 1)$$
$$\nabla_2 = t_{d_1 - d_2}(\nabla_1) \Longrightarrow \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x + (d_1 - d_2)).$$

Preuve du Théorème

Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
Cas 1 : $s = \lambda m$.
$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :

$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$ $\qquad$ $\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$

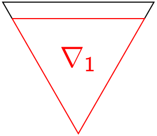
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathrm{AT}(a + d_1, (d_1, d_2), s - 1) \xrightarrow{t_{d_2 - d_1}} \mathrm{AT}(a + d_2, (d_1, d_2), s - 1)$$
$$\nabla_2 = t_{d_1 - d_2}(\nabla_1) \Longrightarrow \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x + (d_1 - d_2)).$$
$$\text{Donc } \mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_\nabla(x + (d_1 - d_2)), \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Preuve du Théorème

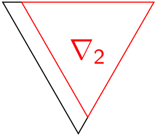
Soit m impair et soient $d_1, d_2, d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Cas 1 : $s = \lambda m$.

$\nabla = \mathrm{AT}(a, (d_1, d_2), s)$ est décomposé comme suit :



$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla_1$



$\nabla = \mathrm{AP}(a, d_1, \lambda m) \bigcup \nabla_2$

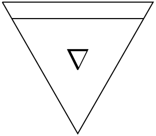
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_2,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$
$$\mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_{\mathrm{AP}(a,d_1,\lambda m)}(x) + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \lambda + \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{AT}(a+d_1, (d_1, d_2), s-1) \xrightarrow{t_{d_2-d_1}} \mathrm{AT}(a+d_2, (d_1, d_2), s-1)$$
$$\nabla_2 = t_{d_1-d_2}(\nabla_1) \Longrightarrow \mathfrak{m}_{\nabla_2}(x) = \mathfrak{m}_{\nabla_1}(x + (d_1 - d_2)).$$
$$\text{Donc } \mathfrak{m}_\nabla(x) = \mathfrak{m}_\nabla(x + (d_1 - d_2)), \forall x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$$d_1 - d_2 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \Longrightarrow \mathfrak{m}_\nabla \text{ constante} \Longrightarrow \nabla \text{ équilibré.}$$

Preuve du Théorème

Cas 2 : $s = \lambda m - 1$.



$$\mathrm{AT}(a - d_1, (d_1, d_2), \lambda m) = \mathrm{AP}(a - d_1, d_2, \lambda m) \bigcup \nabla$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AT}(a - d_1, (d_1, d_2), \lambda m) \text{ équilibré (Cas 1)} \\ \mathrm{AP}(a - d_1, d_2, \lambda m) \text{ équilibré } (d_2 \text{ inv.}) \end{array}\right\} \implies \nabla \text{ équilibré.}$$

$\blacksquare$

Orbites arithmétiques entrelacées

Definition

Une orbite $\mathcal{O}(S) = \{a_{i,j} | a_{i,j} + a_{i,j+1} = a_{i+1,j}, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$ est dite arithmétique (k_1, k_2)-entrelacée si chacune de ses $k_1 k_2$ sous-suites

$$\{a_{i_0+ik_1, j_0+jk_2} | i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}, \quad 0 \leqslant i_0 < k_1, 0 \leqslant j_0 < k_2,$$

est arithmétique.

Orbites arithmétiques entrelacées

Définition

On appelle suite arithmétique k-entrelacée, de premiers éléments $A = (a_0, \ldots, a_{k-1})$ et de raisons $D = (d_0, \ldots, d_{k-1})$, la suite $\mathrm{IAP}(A, D) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ définie par $a_{j_0 + jk} = a_{j_0} + j d_{j_0}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant j_0 < k$.

Orbites arithmétiques entrelacées

Définition

On appelle suite arithmétique k-entrelacée, de premiers éléments $A = (a_0, \ldots, a_{k-1})$ et de raisons $D = (d_0, \ldots, d_{k-1})$, la suite $\mathrm{IAP}(A, D) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ définie par $a_{j_0 + jk} = a_{j_0} + j d_{j_0}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant j_0 < k$.

Théorème

Toutes les orbites arithmétiques entrelacées de $\mathbb{Z}$ sont engendrées par des suites de la forme $\mathrm{IAP}((a_0, a_1, a_2), (d, -2d - 3\Sigma, d + 3\Sigma))$, où a_0, a_1, a_2 et d sont des entiers quelconques et $\Sigma = a_0 + a_1 + a_2$.

Eléments de preuve

Remarque

$\mathcal{O}(S)$ arithmétique (k_1, k_2)-entrelacée $\Longrightarrow S$ arithmétique k_2-entrelacée.

Remarque

$\mathcal{O}(S)$ arithmétique (k_1, k_2)-entrelacée $\Longrightarrow$ S arithmétique k_2-entrelacée.

Proposition

Soient $A = (a_0, \ldots, a_{k-1})$ et $D = (d_0, \ldots, d_{k-1})$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\partial^i \mathrm{IAP}\,(A, D) = \mathrm{IAP}\,(A\mathbf{C_i} + D\mathbf{T_i}\ ,\ D\mathbf{C_i})\,,\ \text{où}$$

$$\mathbf{C_i} = \mathbf{Circ}\left(\sum_{l\geqslant 0}\binom{i}{lk}, \sum_{l\geqslant 0}\binom{i}{lk-1}, \ldots, \sum_{l\geqslant 0}\binom{i}{lk+1}\right),$$

$$\mathbf{T_i} = \left(\sum_{l\geqslant 0} l\binom{i}{r-s+lk}\right)_{1\leqslant r,s\leqslant k},$$

Proposition

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $S = \mathrm{IAP}(A, D)$ une suite arithmétique k-entrelacée. Alors, l'orbite $\mathcal{O}(S)$ est arithmétique (k, k)-entrelacée ssi A et D vérifient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W_k}^2 & \mathbf{W_k T_k} \\ \mathbf{0_k} & \mathbf{W_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = (0),$$

où $\mathbf{T_k} = \left(\binom{k}{i-j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ et $\mathbf{W_k} = \mathbf{Circ}\left(\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k-1}\right)$ est la matrice de Wendt.

Eléments de preuve

$$
\mathbf{W_k} = \begin{pmatrix}
\binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k-2} & \binom{k}{k-1} \\
\binom{k}{k-1} & \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & & \binom{k}{k-2} \\
\vdots & \binom{k}{k-1} & \binom{k}{0} & \ddots & \vdots \\
\binom{k}{2} & & \ddots & \ddots & \binom{k}{1} \\
\binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{k}{k-1} & \binom{k}{0}
\end{pmatrix}
$$

Eléments de preuve

$$\mathbf{W_k} = \begin{pmatrix} \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k-2} & \binom{k}{k-1} \\ \binom{k}{k-1} & \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & & \binom{k}{k-2} \\ \vdots & \binom{k}{k-1} & \binom{k}{0} & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{2} & & \ddots & \ddots & \binom{k}{1} \\ \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{k}{k-1} & \binom{k}{0} \end{pmatrix}$$

[E. Lehmer, 1935] : $\mathrm{rang}(\mathbf{W_k}) = \begin{cases} k-2 & \text{si } 6|k, \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème

Soit m impair et soient a_0, a_1, a_2, $\Sigma = a_0 + a_1 + a_2$ et d dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tels que d, $d + 3\Sigma$ et $2d + 3\Sigma$ sont inversibles. On considère $S = \mathrm{IAP}((a_0, a_1, a_2), (d, -2d - 3\Sigma, d + 3\Sigma))$. Alors, dans $\mathcal{O}(S)$, sont équilibrés

- tout triangle de Steinhaus de taille $s \equiv 0$ ou $-1 \pmod{6m}$,
- tout triangle de Pascal généralisé de taille $s \equiv 0$ ou $-1 \pmod{6m}$.

Théorème

Soit m impair et soient a_0, a_1, a_2, $\Sigma = a_0 + a_1 + a_2$ et d dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tels que d, $d + 3\Sigma$ et $2d + 3\Sigma$ sont inversibles. On considère $S = \mathrm{IAP}((a_0, a_1, a_2), (d, -2d - 3\Sigma, d + 3\Sigma))$. Alors, dans $\mathcal{O}(S)$, sont équilibrés

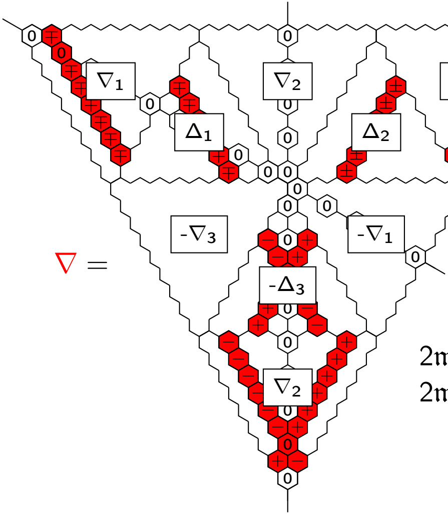
- tout triangle de Steinhaus de taille $s \equiv 0$ ou $-1 \pmod{6m}$,
- tout triangle de Pascal généralisé de taille $s \equiv 0$ ou $-1 \pmod{6m}$.

Preuve

Par décomposition en 36 sous-triangles qui sont des AT de tailles $\equiv 0$ ou $-1 \pmod{m}$, et de raison (d_1, d_2) telle que d_1, d_2 et $d_1 - d_2$ sont inversibles.

Raffinement : la suite universelle

$\color{red}{\nabla}$ =



$$2\mathfrak{m}_{\nabla_2} = \mathfrak{m}_{\nabla_1} + \mathfrak{m}_{\nabla_3}$$
$$2\mathfrak{m}_{\Delta_3} = \mathfrak{m}_{\Delta_1} + \mathfrak{m}_{\Delta_2}$$

La suite universelle

Théorème (C. 2011)

Pour tout nombre impair m, la projection dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de l'orbite de la suite universelle contient :

- des triangles de Steinhaus équilibrés de taille s, pour tout $s \equiv 0 \pmod{m}$ ou $s \equiv -1 \pmod{3m}$,
- des triangles de Pascal généralisés équilibrés de taille s, pour tout $s \equiv -1 \pmod{m}$ ou $s \equiv 0 \pmod{3m}$.

Le problème de Molluzzo

Soit $m = p^k$ avec p un premier impair et $k \geqslant 1$. Alors $\binom{s+1}{2}$ est divisible par m ssi $s \equiv 0$ or $-1 \pmod{m}$. On a donc construit des triangles équilibrés pour au moins $2/3$ des tailles admissibles dans ce cas.

Problème de Molluzzo

$N(m) := \left\{ s \in \mathbb{N} \;\middle|\; \binom{s+1}{2} \text{ divisible par } m \right\}$

$B(m) := \{s \in \mathbb{N} \mid \exists S \text{ de longueur } s \text{ telle que } \nabla S \text{ équilibré}\}$

$$\frac{|B(m) \bigcap [1,k]|}{|N(m) \bigcap [1,k]|} \geqslant \frac{1}{2^{\omega(m)-2}\mathrm{pord}_m(2^m)} \quad (AP),$$

$$\frac{|B(m) \bigcap [1,k]|}{|N(m) \bigcap [1,k]|} \geqslant \frac{1}{2^{\omega(m)-2} \cdot 3} \quad \text{(Suite univ.)},$$

pour $k \geqslant \mathrm{pord}_m(2^m)m$, où $\omega(m)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de m et $\mathrm{pord}_m(2^m)$ l'ordre de 2^m dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* / \{-1,1\}$.

Problème de Molluzzo faible

Problème de Molluzzo faible

Soit $m \in \mathbb{N}$. Existe-t-il une infinité de triangles de Steinhaus équilibrés dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

- réponse positive pour m impair et $m = 2, 4$.
- totalement ouvert pour tout $m \geqslant 6$ pair.

Automate cellulaire additif (linéaire)

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ où $a < b$, on note $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$.

Définition

L'automate cellulaire additif de dimension $n \geqslant 1$ et de poids $W = (w_i)_{i \in [-r,r]^n}$, de rayon $r \geqslant 0$, est l'application ∂ définie par

$$\begin{array}{rccc} \partial : & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^n} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^n} \\ & (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^n} & \longmapsto & \left(\sum\limits_{j \in [-r,r]^n} w_j a_{i+j} \right)_{i \in \mathbb{Z}^n} \end{array}$$

où $i + j$ est la somme dans $\mathbb{Z}^n$.

Définition

Soit $A \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^n}$. L'orbite de A est $\mathcal{O}(A) := \left\{ \partial^i(A) \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$, où $\partial^i(A) = \partial(\partial^{i-1}(A))$ pour $i \geqslant 1$ et $\partial^0 A = A$.

Simplexe de dimension n

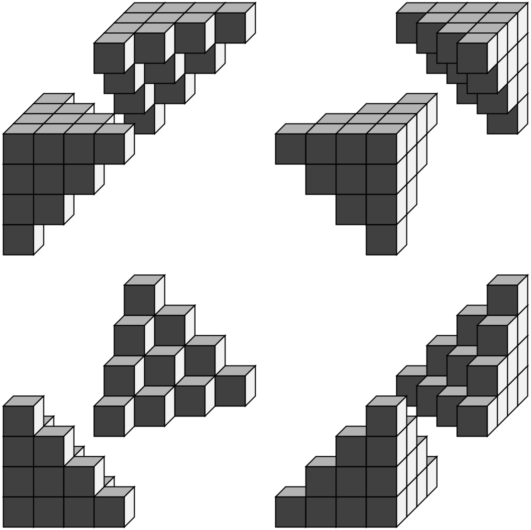
Définition

Soit $A = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^n}$ un tableau de dimension n dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Soient $\varepsilon \in \{-1, +1\}^n$ et $s \in \mathbb{N}$. Le simplexe de taille s, d'orientation ε et dont le sommet principal est à la position $j \in \mathbb{Z}^n$ dans A est

$$\triangle(j, \varepsilon, s) := \{a_{j+\varepsilon \cdot k} \mid k \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } k_1 + \cdots + k_n \leqslant s - 1\},$$

où $\varepsilon \cdot k = (\varepsilon_1 k_1, \ldots, \varepsilon_n k_n)$.

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2



Définition

Soit $A = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^n}$ un tableau de taille n dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. A est dit arithmétique de premier élément a_0 et de raison $d = (d_1, \ldots, d_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ si

$$a_i = a_0 + i_1 d_1 + \cdots + i_n d_n,$$

pour tout $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$. On le note $\mathrm{AA}(a_0, d)$.

Simplexes équilibrés

On considère l'ACA de dimension $n-1 \geqslant 1$ où $W = (w_i)_{i \in [-r,r]^{n-1}}$. On note

$$\sigma := \sum_{i \in [-r,r]^{n-1}} w_i \quad \text{et} \quad \sigma_k := \sum_{i \in [-r,r]^{n-1}} i_k w_i, \text{ pour } k \in [1, n-1].$$

Théorème (C. 2015)

Soit m tel que $\gcd(m, n!) = \gcd(m, \sigma) = 1$. Soient $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $d = (d_1, \ldots, d_{n-1}) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{n-1}$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}^n$ tels que

$$\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \bigcup \{\varepsilon_j d_j - \varepsilon_i d_i \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

sont des inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, où $d_n := \sigma^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k d_k$. Alors, dans l'orbite $\mathcal{O}(\mathrm{AA}(a, d))$, tout simplexe de taille s et d'orientation ε est équilibré pour tout $s \equiv -t \bmod \mathrm{ord}_m(\sigma^m)m$ avec $t \in [0, n-1]$.

Automate cellulaire de Pascal

PCA_n

L'automate cellulaire de Pascal de dimension n est l'ACA associé à $W = (w_i)_{i \in [-1,1]^n}$ avec

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \in \{(0,\ldots,0),(-1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,-1)\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Automate cellulaire de Pascal

PCA_n

L'automate cellulaire de Pascal de dimension n est l'ACA associé à $W = (w_i)_{i \in [-1,1]^n}$ avec

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \in \{(0,\dots,0),(-1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,-1)\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $A = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}^{n-1}}$ le tableau de dimension $n-1$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ défini par $a_j = 1$ pour $j = (0,\dots,0)$ et $a_j = 0$ sinon. Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ est l'orbite $\mathcal{O}(A)$ engendrée par PCA_{n-1}, alors

$$a_{i,j} = \binom{i}{j_1,\dots,j_{n-1},\, i-\sum_{k=1}^{n-1} j_k} = \frac{i!}{j_1!\cdots j_{n-1}!(i-\sum_{k=1}^{n-1} j_k)!},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^{n-1}$ tel que $j_1+\cdots+j_{n-1} \leqslant i$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Simplexes équilibrés engendrés par PCA_{n-1}

Corollaire

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout entier m tel que $\gcd(m, (3(n-1))!) = 1$, il existe une infinité de simplexes équilibrés de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ engendrés par PCA_{n-1}, pour toute orientation $\varepsilon \in \{-1, +1\}^n$.
Dans le cas particulier des orientations $\varepsilon = + \cdots + -$ et $\varepsilon = - \cdots - +$, l'existence d'un nombre infini de simplexes équilibrés avec ses orientations est vérifiée pour tout m tel que $\gcd(m, n!) = 1$ pour n pair et pour tout m tel que $\gcd(m, (\frac{3n+1}{2})!) = 1$ pour n impair.

Références

- H. Steinhaus, One hundred problems in elementary mathematics, Basic Books Inc. Publishers, New York, 1964, pp. 47–48.
- H. Harborth, Solution of Steinhaus's problem with plus and minus signs, J. Combin. Theory Ser. A 12 (1972) 253–259.
- S. Eliahou, D. Hachez, On a problem of Steinhaus concerning binary sequences, Experiment. Math. 13 (2004) 215–229.
- J.C. Molluzzo, Steinhaus graphs, Lecture Notes in Math. 642, Springer Berlin, 1978, pp. 394–402.
- J. Chappelon, On a problem of Molluzzo concerning Steinhaus triangles in finite cyclic groups, Integers 8 (2008) #A37.
- J. Chappelon, A universal sequence of integers generating balanced Steinhaus figures modulo an odd number, J. Combin. Theory Ser. A 118 (2011) 291–315.
- J. Chappelon, S. Eliahou, On the problem of Molluzzo for the modulus 4, Integers 12 (2012) #A18.
- J. Chappelon, Balanced simplices, Adv. in Appl. Math. 62 (2015), 74-117.