Théorème de rigidité pour les bigèbres généralisées
ou
Existe-t-il toujours un bon couteau ?

Bérénice Delcroix-Oger (avec E. Burgunder)

Institut de Mathématiques de Toulouse

Journées du GT Combalg, 5-6 Septembre 2016

Sommaire

Sommaire

Bigèbre de Hopf

Definition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une bigèbre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{B}$ muni :

- d'une produit $\mu : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
- d'une unité $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{B}$
- d'un coproduit $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$
- d'une counité $\epsilon : \mathcal{B} \to \mathbb{K}$

tels que $(\mathcal{B}, \mu, \eta)$ soit une algèbre, $(\mathcal{B}, \Delta, \epsilon)$ soit une cogèbre et

$$\Delta(\mu(x, y)) = \mu(x_1, y_1) \otimes \mu(x_2, y_2), \forall x, y \in \mathcal{B},$$

où $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$ et $\Delta(y) = y_1 \otimes y_2$.

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $\mathbb{C}$ un corps de caractéristique 0 et $(\mathbb{C}[X], \times)$ l'algèbre des polynômes en une variable (avec le produit usuel).
Cet algèbre munie du coproduit suivant forme une bigèbre (de Hopf) :

$$\Delta(X^k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l \otimes X^{k-l}.$$

et

$$\Delta(P(X) \times Q(X)) = \Delta(P(X))(\times \otimes \times)\Delta(Q(X)).$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

$$\begin{tikzcd} X^k \arrow[rr, bend left, "\Delta"] & & \sum_{l=0}^{k} \binom{l}{k} X^l \otimes X^{k-l} \arrow[ll, bend left, "\frac{1}{2^k}\times"] \end{tikzcd}$$

Autre exemple : l'algèbre des mots

Soit V un alphabet et V^+ l'espace vectoriel des mots non vides sur V, muni du produit de concaténation $\cdot$ et du coshuffle Δ donné sur tout mot non vide $u = u_1 \dots u_n$ par :

$$\Delta(u) = \sum_{\substack{k, i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_{n-k} \\ u_{i_1} \ldots u_{i_k} \cap u_{j_1} \ldots u_{j_{n-k}} = \emptyset}} u_{i_1} \dots u_{i_k} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_{n-k}},$$

$(V^+, \cdot, \Delta)$ est alors une bigèbre de Hopf.

Autre exemple : l'algèbre des mots

$$
\begin{tikzcd}
21 \arrow[dr, bend left, "\Delta"] & \\
12 + 21 \arrow[r, bend right, "\frac{1}{2}\Delta"'] & 1 \otimes 2 + 2 \otimes 1 \arrow[l, "\times"'] \\
12 \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

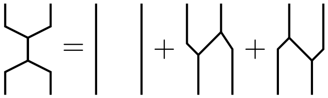
Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v + \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.$$

$$\Delta(u \cdot v) = u \otimes v + \Delta(u)_1 \otimes \Delta(u)_2 \cdot v + u \cdot \Delta(v)_1 \otimes \Delta(v)_2.$$



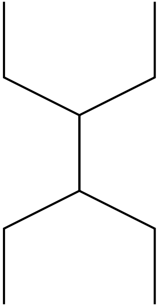
Bigèbres généralisées

Définition

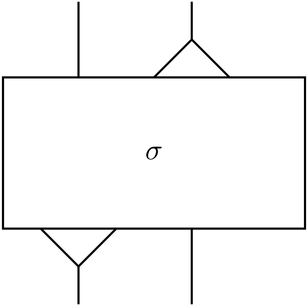
Une bigèbre généralisée $\mathcal{H}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel muni :*

- *d'un produit* μ, $\mu : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}$
- *d'un coproduit* Δ, $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^2$
- *d'une relation de compatibilité reliant produit et coproduit :*

$$\Delta \circ \mu = \sum_{\substack{N=\mathrm{ar}(m_1)+\mathrm{ar}(m_2)=\mathrm{coar}(d_1)+\mathrm{coar}(d_2) \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} (m_1 \otimes m_2) \circ \sigma \circ (d_1 \otimes d_2) \quad (1)$$



$$= \sum$$



Réversibilité des opérations

Question

Quand a-t-on la réversibilité des produits et coproduits ?

Historique

φ

$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\between$
Com	Com	Hopf [Borel]
As	As	n.u.i [Loday, Ronco]
As	Zinb	[Burgunder]
NAP	PreLie	[Livernet]
Dend	Dend	[Foissy]
...	...	...

Question

Question [Loday]

Est-ce toujours le cas ?

Réponse

Oui !

Réponse

Oui !

Théorème (B., D.-O.)

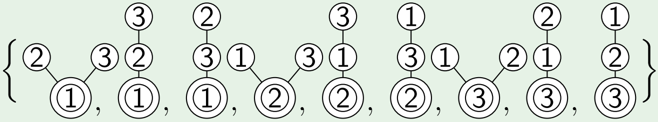
Pour tout "type" de produit, il existe un coproduit et une relation de compatibilité tel que toute bigèbre vérifiant ses relations et conilpotente vérifie la réversibilité.

Espèces

Définition (Joyal)

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. Elle associe à un ensemble fini I un ensemble fini* F(I) *indépendant de la nature de I.*

Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{1,2,3\}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

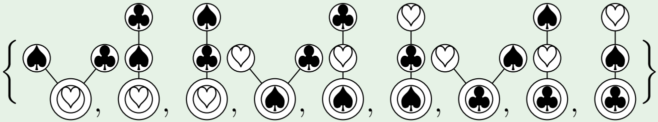
Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1,2,3\}$.

Espèces

Définition (Joyal)

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. Elle associe à un ensemble fini* I *un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I.

Exemples

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

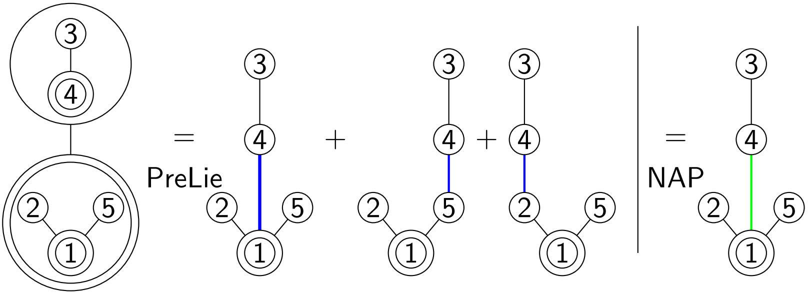
Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Opérade

Définition

Une opérade $\mathcal{P}$ est une structure algébrique modélisant les relations vérifiées par les produits d'une algèbre. Elle est donnée par :

- *une espèce $\mathcal{P}$,*
- *une application $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathbb{C}\mathcal{P}$.*



Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.

Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.

Une cogèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel C muni d'une famille de morphismes $\mathfrak{S}_n$-équivariant $\gamma_C^n : \mathcal{O}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}$. La $\mathcal{O}$-cogèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}^c(V)$.

Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.

Une cogèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel C muni d'une famille de morphismes $\mathfrak{S}_n$-équivariant $\gamma_C^n : \mathcal{O}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}$. La $\mathcal{O}$-cogèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}^c(V)$.

La donnée de γ^n est équivalente à la donnée de $\Delta_C^n : C \to \mathcal{O}^*(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} C^{\otimes n}$ où $\mathcal{O}^*(n) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(n), \mathbb{K})$ (coopérade duale).

Théorème de rigidité

Etant donnée une $\mathcal{O}$-cogèbre C, la cofiltration $(C_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$C_n = \{x | \forall \delta \in \mathcal{O}(n+1), \delta(x) = 0\}.$$

C_1 est l'espace vectoriel des éléments appelés *primitifs*.
C est alors *conilpotente* si $C = \cup_{n\geq 1} C_n$.

Théorème de rigidité

Etant donnée une $\mathcal{O}$-cogèbre C, la cofiltration $(C_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$C_n = \{x | \forall \delta \in \mathcal{O}(n+1), \delta(x) = 0\}.$$

C_1 est l'espace vectoriel des éléments appelés *primitifs*.
C est alors *conilpotente* si $C = \cup_{n\geq 1} C_n$.

Théorème (B., D.0.)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérades ayant la même espèce sous-jacente, alors il existe (au moins) une relation de compatibilité (λ) telle que toute $\mathcal{A}$-co$\mathcal{B}$-(λ)-bigèbre conilpotente H soit libre et colibre sur ses éléments primitifs.

$$H = \mathcal{A}(H_1) = \mathcal{B}^c(H_1).$$

Schéma de la preuve

- Le caractère d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs dans les entiers donc il existe une famille d'isomorphismes de $\mathfrak{S}_n$-modules $\varphi_n : \mathcal{A}(n) \to \mathcal{B}^*(n) = \mathcal{A}^*(n)$

Schéma de la preuve

- Le caractère d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs dans les entiers donc il existe une famille d'isomorphismes de $\mathfrak{S}_n$-modules $\varphi_n : \mathcal{A}(n) \to \mathcal{B}^*(n) = \mathcal{A}^*(n)$
- La donnée d'une telle famille donne une relation de compatibilité par :

$$\delta \circ \mu(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\mathfrak{S}_n} \langle \delta^\sigma, \varphi_n(\mu) \rangle \, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma_n},$$

pour $\delta \in \mathcal{B}(n)$, $\mu \in \mathcal{A}(n)$ et p_i primitifs.

Schéma de la preuve

- Le caractère d'une représentation de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs dans les entiers donc il existe une famille d'isomorphismes de $\mathfrak{S}_n$-modules $\varphi_n : \mathcal{A}(n) \to \mathcal{B}^*(n) = \mathcal{A}^*(n)$
- La donnée d'une telle famille donne une relation de compatibilité par :

$$\delta \circ \mu(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\mathfrak{S}_n} \langle \delta^\sigma, \varphi_n(\mu) \rangle \, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma_n},$$

  pour $\delta \in \mathcal{B}(n)$, $\mu \in \mathcal{A}(n)$ et p_i primitifs.
- $H_n = H_{n-1} \oplus M_n$, où $M_n = \{\mu(p_1, \ldots, p_n) | \mu \in \mathcal{A}(n), p_i \in H_1\}$ donc il est possible de définir la projection e sur H_1 parallèle aux M_n

Coproduit dual

Considérons une algèbre $(\mathcal{D}, \times)$ et B une base de $\mathcal{D}$ (en tant qu'ev).

Définition (B., D.-O.)

La coproduit dual est donné sur un élément $x \in B$, par :

$$\Delta(x) = \sum_{\substack{c,d \in B \\ x^*(c \times d) \neq 0}} \frac{1}{x^*(c \times d)} c \otimes d.$$

Coproduit dual

Considérons une algèbre $(\mathcal{D}, \times)$ et B une base de $\mathcal{D}$ (en tant qu'ev).

Définition (B., D.-O.)

La coproduit dual est donné sur un élément $x \in B$, par :

$$\Delta(x) = \sum_{\substack{c,d \in B \\ x^*(c \times d) \neq 0}} \frac{1}{x^*(c \times d)} c \otimes d.$$

Exemples de coproduits duaux

La déconcaténation est le dual de la concatenation. Tout comme le produit et le coproduit présenté sur $\mathbb{C}[X]$.

Base compatible

Définition

La base B est compatible si l'action du groupe symétrique commute avec le coproduit défini par rapport à B.

Base compatible

Définition

La base B est compatible si l'action du groupe symétrique commute avec le coproduit défini par rapport à B.

Exemple d'une base qui n'est pas compatible : algèbre de Lie

Base de Lyndon : En arité inférieure à 3 : 1, $[1,2]$, $[1,[2,3]]$ et $[[1,3],2]$

$$\Delta([1,[2,3]]) = 1 \otimes [2,3] - 3 \otimes [1,2] + [1,2] \otimes 3 - [2,3] \otimes 1$$

$$\Delta([[1,3],2]) = 3 \otimes [1,2] - 2 \otimes [1,3] + [1,3] \otimes 2 - [1,2] \otimes 3$$

$$\Delta((3\ 1\ 2) \circlearrowright [1,[2,3]]) = \Delta([3,[1,2]]) = \Delta([[1,3],2]) - \Delta([1,[2,3]])$$
$$\neq (3\ 1\ 2) \circlearrowright \Delta([1,[2,3]])$$

Théorème de rigidité

Proposition (B., D.-O.)

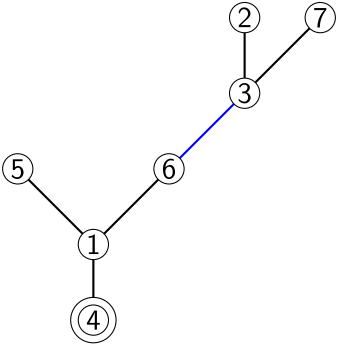
Un coproduit obtenu par dualité par rapport à une base compatible est "réversible" (i.e. satisfait un théorème de rigidité).

Historique (mis à jour)

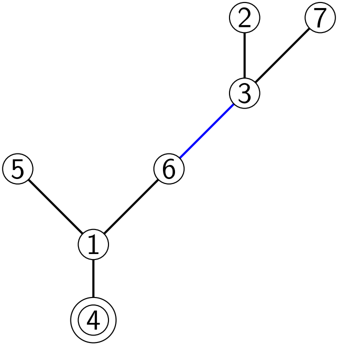
φ

$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\between$
Com	Com	Hopf [Borel]
As	As	n.u.i [Loday, Ronco]
As	Zinb	[Burgunder]
Zinb	Zinb	$\between_{Zinb}$
Leib	Leib	$\between_{Leib}$
NAP	PreLie	[Livernet]
PreLie	PreLie	$\between_{PreLie}$
NAP	NAP	$\between_{NAP}$
Dend	Dend	[Foissy]
-	-	$\neq \between_{Dend}$ $(*)$
Dup	Dend	$\between_{Dup,\ Dend}$
...	...	...

Coproduit prelie dual



Coproduit prelie dual



Coproduit dual

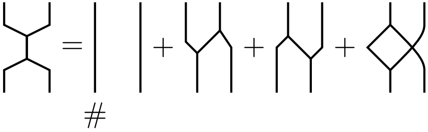
Le coproduit dual par rapport à la base (compatible) des arbres enracinés du produit prelie sur une algèbre prelie libre est donnée par toutes les façons de supprimer une arête de l'arbre.

Cas Prelie

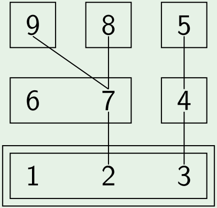
Dans le cas Prelie, les relations de compatibilité sont données par :

$$\Delta(T \curvearrowleft S) = \# T \times T \otimes S + (T \curvearrowleft S_1) \otimes S_2 + (T_1 \curvearrowleft S) \otimes T_2 + T_1 \otimes (T_2 \curvearrowleft S),$$

où $\Delta(T) = T_1 \otimes T_2$ et $\Delta(S) = S_1 \otimes S_2$.



Application : Arbres partitionés [Foissy] (= Arbres enracinés gras reliés aux hyperarbres décorés par $\widehat{perm}$)



Le coproduit suivant satisfait la relation de compatibilité voulue :

$$\Delta(T) = \sum_{e:a \to b} \frac{1}{|a|} R(T - \{e\}) \otimes L(T - \{e\})$$

Perspectives

- Théorème de structure
- Cas Lie
- D'autres exemples

Merci de votre attention !