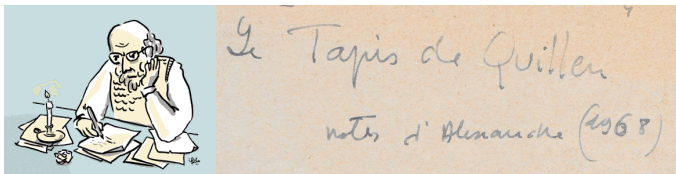


Les manuscrits mathématiques d'Alexandre Grothendieck

Sébastien Maronne et Bertrand Toën



INSTITUT
de MATHÉMATIQUES
de TOULOUSE



École Thématique CNRS
« Mathématiques et Philosophie Contemporaines XII
Saint-Ferréol, 25 mars 2025

Introduction

Enquêtes

Projets

Explorations

Conclusion

Après avoir quitté l'IHES en 1970, Grothendieck a cessé de :

- faire des mathématiques ;
- publier des mathématiques ;
- faire des mathématiques formelles en adoptant un **nouveau style mathématique**.

Après avoir quitté l'IHES en 1970, Grothendieck a cessé de :

- faire des mathématiques ;
- publier des mathématiques ;
- faire des mathématiques formelles en adoptant un **nouveau style mathématique**.

Il a fait cela **car** :

- il a quitté les mathématiques pour devenir un militant écologiste et antimilitariste ;
- il souhaitait quitter la communauté mathématique ;
- il n'était pas parvenu à démontrer les **conjectures standard** qui procuraient les fondements de sa théorie des **motifs**.

Après avoir quitté l'IHES en 1970, Grothendieck a cessé de :

- faire des mathématiques ;
- publier des mathématiques ;
- faire des mathématiques formelles en adoptant un **nouveau style mathématique**.

Il a fait cela **car** :

- il a quitté les mathématiques pour devenir un militant écologiste et antimilitariste ;
- il souhaitait quitter la communauté mathématique ;
- il n'était pas parvenu à démontrer les **conjectures standard** qui procuraient les fondements de sa théorie des **motifs**.

Les mathématiques baroques et provinciales écrites par Grothendieck à Montpellier dans un « style renouvelé » entre 1973 et 1991 formeraient ainsi la **queue d'une comète** :

- la comète de la géométrie algébrique des schémas et des topos écrite dans le style formel d'un membre de Bourbaki entre 1955 et 1970.

Le champ d'investigation

- Les « classiques » de Grothendieck : *EGA*, *SGA*, ... (1955-1970) ;

Le champ d'investigation

- Les « classiques » de Grothendieck : *EGA*, *SGA*, ... (1955-1970) ;
- Les rapports, essais, manifestes **rétrospectifs** qui sont censés informer la pratique mathématique de Grothendieck :
 - *Esquisse d'un programme* (janvier 1984) ;
 - *Récoltes et Semailles* (1984-1986) ;

Le champ d'investigation

- Les « classiques » de Grothendieck : *EGA*, *SGA*, ... (1955-1970) ;
- Les rapports, essais, manifestes **rétrospectifs** qui sont censés informer la pratique mathématique de Grothendieck :
 - *Esquisse d'un programme* (janvier 1984) ;
 - *Récoltes et Semailles* (1984-1986) ;
- Le continent encore en grande partie inexploré des Archives Grothendieck à Montpellier (1949-1991) :
 - les manuscrits et les tapuscrits (annotés) ;
 - les brouillons, « **scratchworks** », les esquisses axiomatiques, et les écrits plus structurés (avec une table des matières provisoire) ;
 - les **réflexions privées** (*La Longue Marche à travers la théorie de Galois* 1981) ou les textes destinés à la **publication** (*Pursuing stacks* 1983) ;

Le champ d'investigation

- Les « classiques » de Grothendieck : *EGA*, *SGA*, ... (1955-1970) ;
- Les rapports, essais, manifestes **rétrospectifs** qui sont censés informer la pratique mathématique de Grothendieck :
 - *Esquisse d'un programme* (janvier 1984) ;
 - *Récoltes et Semailles* (1984-1986) ;
- Le continent encore en grande partie inexploré des Archives Grothendieck à Montpellier (1949-1991) :
 - les manuscrits et les tapuscrits (annotés) ;
 - les brouillons, « **scratchworks** », les esquisses axiomatiques, et les écrits plus structurés (avec une table des matières provisoire) ;
 - les **réflexions privées** (*La Longue Marche à travers la théorie de Galois* 1981) ou les textes destinés à la **publication** (*Pursuing stacks* 1983) ;
- Les **correspondances** avec Breen, Brown, Mumford, Quillen, Serre, et d'autres **non publiées**.

Le champ d'investigation

- Les « classiques » de Grothendieck : *EGA*, *SGA*, ... (1955-1970) ;
- Les rapports, essais, manifestes **rétrospectifs** qui sont censés informer la pratique mathématique de Grothendieck :
 - *Esquisse d'un programme* (janvier 1984) ;
 - *Récoltes et Semailles* (1984-1986) ;
- Le continent encore en grande partie inexploré des Archives Grothendieck à Montpellier (1949-1991) :
 - les manuscrits et les tapuscrits (annotés) ;
 - les brouillons, « **scratchworks** », les esquisses axiomatiques, et les écrits plus structurés (avec une table des matières provisoire) ;
 - les **réflexions privées** (*La Longue Marche à travers la théorie de Galois* 1981) ou les textes destinés à la **publication** (*Pursuing stacks* 1983) ;
- Les **correspondances** avec Breen, Brown, Mumford, Quillen, Serre, et d'autres **non publiées**.

Quel est le motif dans le tapis de Grothendieck ?

S'il en existe un...

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ...*

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ... **motifs**, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé.*

Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, January 1984, p. 51



*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ... **motifs**, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé.*

Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, January 1984, p. 51



Un tel énoncé peut plonger le mathématicien ou l'historien dans l'enthousiasme ou une sombre perplexité ...

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ... **motifs**, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé.*

Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, January 1984, p. 51



Un tel énoncé peut plonger le mathématicien ou l'historien dans l'enthousiasme ou une sombre perplexité ...

Où se trouvent les motifs dans les écrits mathématiques de Grothendieck ? Nulle part ? Partout ?

*Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, “qu’il y a quelque chose” – que “les motifs existent”. Il y a quelques années encore, j’ai joué avec l’idée d’écrire contrairement à l’usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs, une sorte de **science-fiction mathématique**. J’en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu’un tel livre soit jamais écrit, ni qu’on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d’ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu’on n’y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu’il est des tâches plus urgentes.*

Grothendieck, *Esquisse thématique* (1972)

Esquisse d'un programme

En **janvier 1984**, Alexandre Grothendieck a sous le coude « deux volumineux cartons de notes manuscrites », soit quelques milliers de pages de « réflexions mathématiques », qu'il évoque dans *Esquisse d'un Programme*. Ce texte est adressé au Comité National pour justifier une demande d'admission au CNRS mais aussi à quelques mathématiciens qui le liront et le feront lire. La demande est acceptée et Grothendieck redevient chercheur au CNRS jusqu'à sa retraite en 1988.



Esquisse d'un programme

En **janvier 1984**, Alexandre Grothendieck a sous le coude « deux volumineux cartons de notes manuscrites », soit quelques milliers de pages de « réflexions mathématiques », qu'il évoque dans *Esquisse d'un Programme*. Ce texte est adressé au Comité National pour justifier une demande d'admission au CNRS mais aussi à quelques mathématiciens qui le liront et le feront lire. La demande est acceptée et Grothendieck redevient chercheur au CNRS jusqu'à sa retraite en 1988.



Ces réflexions [...] attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme « rédaction » ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées.

A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme* (janvier 1984), « Envoi », p. 1

Les origines : À la poursuite des champs

C'est dans *Pursuing Stacks* qu'on découvre les origines de ce projet d'écriture. Dans ce « “journal de bord” d'un voyage de découverte » accompli entre le 19 février et le 12 novembre 1983, Grothendieck se met en scène dans le rôle d'un explorateur et s'efforce de communiquer au lecteur ses émotions en ne cachant rien des ratés et des imprévus qui émaillent la découverte mathématique.

★

Les origines : À la poursuite des champs

Introduction

Enquêtes

Projets

Explorations

Conclusion

C'est dans *Pursuing Stacks* qu'on découvre les origines de ce projet d'écriture. Dans ce « “journal de bord” d'un voyage de découverte » accompli entre le 19 février et le 12 novembre 1983, Grothendieck se met en scène dans le rôle d'un explorateur et s'efforce de communiquer au lecteur ses émotions en ne cachant rien des ratés et des imprévus qui émaillent la découverte mathématique.

★

*L'idée est aussi dans l'air ces derniers mois – depuis que j'ai décidé de publier ces notes informelles sur les champs ou quoi que ce soit qui en résultera – que je pourrais bien continuer de la même manière, à rédiger et à publier des articles sur d'autres thèmes, parmi lesquels la **topologie modérée** ou la **géométrie algébrique anabélienne**. Contrairement aux présentes notes, j'ai des tas de **scratchworks** des années précédentes. À cet égard, le temps est encore plus propice à divaguer « publiquement » [là-dessus] plutôt que sur les champs et la théorie de l'homotopie !*

A. Grothendieck, *Pursuing Stacks*, « Digression on a “new continent” » (27 mai 1983), p. 194

Un nouveau style mathématique ?

Un nouveau style mathématique ?

*Les notes mathématiques sur lesquelles je travaille à présent sont les premières depuis treize ans que **je destine à une publication**. Le lecteur ne s'étonnera pas qu'après un long silence, mon **style d'expression ait changé**. Ce changement d'expression n'est pas pourtant le signe d'un changement dans le style ou dans la méthode de travail (*), et encore moins celui d'une transformation qui se serait faite dans la nature même de mon travail mathématique.*

A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, « Travail et découverte » (juin 1983)



Un nouveau style mathématique?

Les notes mathématiques sur lesquelles je travaille à présent sont les premières depuis treize ans que **je destine à une publication**. Le lecteur ne s'étonnera pas qu'après un long silence, mon **style d'expression ait changé**. Ce changement d'expression n'est pas pourtant le signe d'un changement dans le style ou dans la méthode de travail (*), et encore moins celui d'une transformation qui se serait faite dans la nature même de mon travail mathématique.

A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, « Travail et découverte » (juin 1983)

★

(*) Il est sans doute abusif de dire que mon « style » et ma « méthode » de travail n'aient pas changé, alors que mon style d'expression en mathématique s'est profondément transformé. À moins de dissocier le travail mathématique proprement dit du travail d'écriture, de présentation des résultats, ce qui est artificiel, car cela ne correspond pas à la réalité des choses, **le travail mathématique étant indissolublement lié à l'écriture.**

A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, note [1] (mars 1984)

Le projet des *Réflexions Mathématiques*

Le projet des *Réflexions Mathématiques*

*Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme « tous azimuts » exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à « Récoltes et Semailles », ainsi que le présent rapport, l'Esquisse thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des *Réflexions Mathématiques*). [...]*

Le projet des *Réflexions Mathématiques*

*Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme « tous azimuts » exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à « Récoltes et Semailles », ainsi que le présent rapport, l'Esquisse thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des *Réflexions Mathématiques*). [...]*

*Je compte poursuivre cette partie de mon programme [l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'« *algèbre topologique* », à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un « *vaste tableau des motifs* »], au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des *Réflexions Mathématiques* faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de *géométrie algébrique anabélienne* [...]*

A. Grothendieck, « Rapport d'activité » (1^{er} octobre 1984–15 décembre 1984), Archives Grothendieck, Université de Montpellier

Douze thèmes (pour une harmonie)

- 1 Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
- 2 Dualité « continue » et « discrète » (catégories dérivées, « six opérations »)
- 3 Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K -théorie, relation à la théorie des intersections)
- 4 Schémas
- 5 Topos
- 6 Cohomologie étale et ℓ -adique
- 7 Motifs et groupe de Galois motivique (\otimes -catégories de Grothendieck)
- 8 Cristaux et cohomologie cristalline, yoga « coefficients de De Rham », « coefficients de Hodge »...
- 9 « Algèbre Topologique » : ∞ -champs, dérivateurs ; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique
- 10 Topologie modérée
- 11 Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois-Teichmüller
- 12 Point de vue « schématique » ou « arithmétique » pour les polyèdres réguliers et les configurations régulières en tous genres

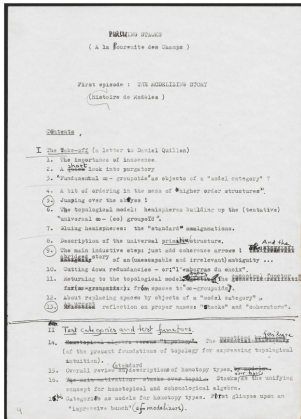
Douze thèmes (pour une harmonie)

- 1 Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
- 2 Dualité « continue » et « discrète » (catégories dérivées, « six opérations »)
- 3 Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K -théorie, relation à la théorie des intersections)
- 4 Schémas
- 5 Topos
- 6 Cohomologie étale et ℓ -adique
- 7 Motifs et groupe de Galois motivique (\otimes -catégories de Grothendieck)
- 8 Cristaux et cohomologie cristalline, yoga « coefficients de De Rham », « coefficients de Hodge »...
- 9 « Algèbre Topologique » : ∞ -champs, dérivateurs ; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique
- 10 Topologie modérée
- 11 Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois-Teichmüller
- 12 Point de vue « schématique » ou « arithmétique » pour les polyèdres réguliers et les configurations régulières en tous genres

Douze thèmes (pour une harmonie)

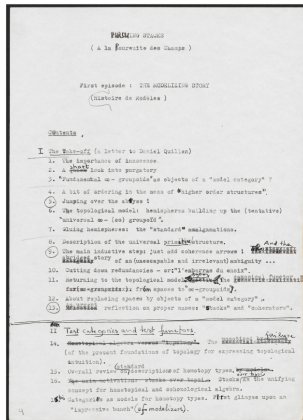


À La poursuite des champs



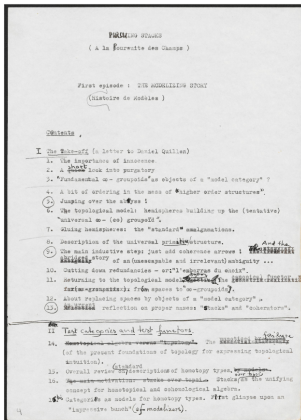
À La poursuite des champs

- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »



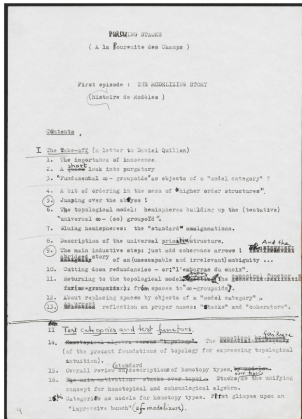
À La poursuite des champs

- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;

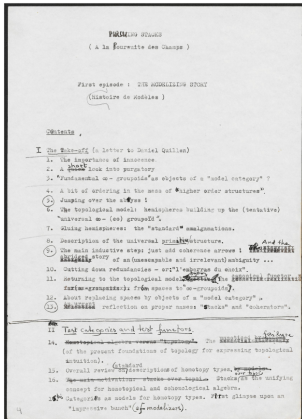


À La poursuite des champs

- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;
- texte emblématique de ce « nouveau style d'expression » revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* :



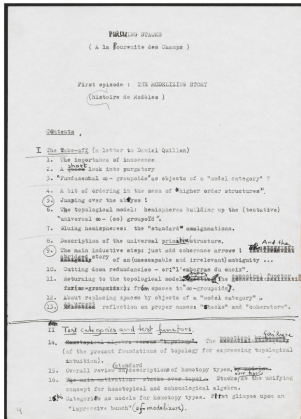
À La poursuite des champs



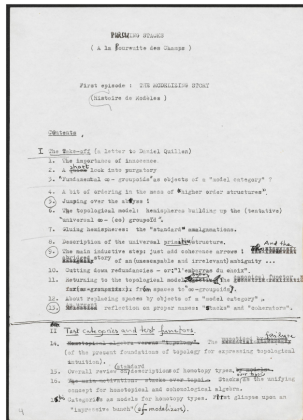
- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;
- texte emblématique de ce « nouveau style d'expression » revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* :
- l'introduction (française) de *Pursuing Stacks* est à l'origine de *Récoltes et Semailles* ;

À La poursuite des champs

- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;
- texte emblématique de ce « nouveau style d'expression » revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* :
- l'introduction (française) de *Pursuing Stacks* est à l'origine de *Récoltes et Semailles*. ;
- texte inachevé (une moitié environ est rédigée) ;

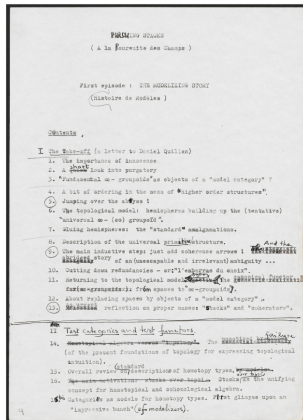


À La poursuite des champs



- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;
- texte emblématique de ce « nouveau style d'expression » revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* :
- l'introduction (française) de *Pursuing Stacks* est à l'origine de *Récoltes et Semailles* ;
- texte inachevé (une moitié environ est rédigée) ;
- complété par des correspondances sur le sujet : Breen (1975), Brown (82-91), et Quillen (1983) ;

À La poursuite des champs



- « ... ce premier travail mathématique que je destine à une publication depuis 1970 », *Récoltes et Semailles*, « L'esprit d'un voyage »
- écrit « au jour-le-jour » tout au long de l'année 1983 ;
- texte emblématique de ce « nouveau style d'expression » revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* :
- l'introduction (française) de *Pursuing Stacks* est à l'origine de *Récoltes et Semailles* ;
- texte inachevé (une moitié environ est rédigée) ;
- complété par des correspondances sur le sujet : Breen (1975), Brown (82-91), et Quillen (1983) ;
- écrit « à l'attention de la communauté mathématique ».

Un thème enraciné dans le passé

Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique, de l'algèbre homotopique, de la « topologie générale » version topos, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, p. 637

Un thème enraciné dans le passé

Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique, de l'algèbre homotopique, de la « topologie générale » version topos, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, p. 637

Développer un pendant « non-abélien » de l'algèbre homologique centré sur la notion d' ∞ -catégorie

Un thème enraciné dans le passé

Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique, de l'algèbre homotopique, de la « topologie générale » version topos, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, p. 637

Développer un pendant « non-abélien » de l'algèbre homologique centré sur la notion d' ∞ -catégorie = remplacement avantageux de la vieille notion problématique de catégorie triangulée.

Un thème enraciné dans le passé

Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique, de l'algèbre homotopique, de la « topologie générale » version topos, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, p. 637

Développer un pendant « non-abélien » de l'algèbre homologique centré sur la notion d' ∞ -catégorie = remplacement avantageux de la vieille notion problématique de catégorie triangulée.

Grothendieck y voit une « science nouvelle » en « soutien logistique » à sa **géométrie arithmétique**, dont le contenu mathématique se trouve « à portée de main »

Un thème enraciné dans le passé

Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique, de l'algèbre homotopique, de la « topologie générale » version topos, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, p. 637

Développer un pendant « non-abélien » de l'algèbre homologique centré sur la notion d' ∞ -catégorie = remplacement avantageux de la vieille notion problématique de catégorie triangulée.

Grothendieck y voit une « science nouvelle » en « soutien logistique » à sa **géométrie arithmétique**, dont le contenu mathématique se trouve « à portée de main » (par opposition à d'autres questions liées aux cycles algébriques et aux motifs, i.e. « les conjectures standards »).

466

27.8.

113. What I was thinking of last night (see last sentence) is that whereas for total homology (not for the separate H_1 's) we have the comprehensive formula

$$A) \quad \mathrm{LH}_*(X_{\infty} \otimes k') \cong \mathrm{LH}_*(X_{\infty}) \otimes_{k'} k' \quad (\text{in } D_*(k')),$$

(where L_k denotes the left derived functor of the ring extension functor $k \rightarrow k'$, and $\bigwedge_k^* \otimes_k k'$ denotes ring extension for the semisimplicial unipotent bundle \bigwedge_k^*), for homotopy modules we should have the term-by-term

isomorphisms

$$B) \quad \pi_1(X_{\infty} \otimes k') \hookrightarrow \pi_1(X_{\infty}) \otimes k'.$$

This however was pretty rash indeed (it was time to go to sleep I guess !)

* Whereas the map on sections

$$X_{\mathbb{R}}(k) \longrightarrow X_{\mathbb{R}}^{\vee}(k^{\vee})$$

does induce a map

$$B^*) \quad \overline{W}_1(X_{\overline{M}}) \xrightarrow[\text{(hence)}]{\cong} \overline{W}_1(X_{\overline{M}}(k)) \longrightarrow \overline{W}_1(X_{\overline{M}}^*) \cong \overline{W}_1(X_{\overline{M}}^*(k^*))$$

27.3.

113. What I was thinking of last night (see last sentence) is that whereas for total homology (not for the separate H_1 's) we have the comprehensive formula

A)
$$\mathrm{LH}_*(X_{\infty} \otimes_k k') \simeq \mathrm{LH}_*(X_{\infty}) \otimes_k k' \quad (\text{in } D(k')),$$
 (where LH_k denotes the left derived functor of the ring extension functor $k \rightarrow k'$, $\mathrm{sim}^*(X_{\infty} \otimes_k k')$ denotes ring extension for the semisimplicial unipotent bundle X_{∞}), for homotopy modules we should have the term-by-term isomorphisms

B)
$$\overline{H}_1(X_{\infty} \otimes_k k') \xrightarrow{\sim} \overline{H}_1(X_{\infty}) \otimes_k k'.$$

This however was pretty rash indeed (it was time to go to sleep I guess). Whereas the map on sections

$$X_{\infty}(k) \rightarrow X_{\infty}'(k')$$

does induce a map

B')
$$\overline{H}_1(X_{\infty}) \otimes_k k' \rightarrow \overline{H}_1(X_{\infty}') \otimes_{k'} (X_1^1(k'))$$

7.9.

116. For ten days I hav'n't written any notes, and the time when I stopped looks a lot more remote still. For two days still after I last wrote on the notes, I kept pondering about schematisation of homotopy types - it were rather lively days, first day I found the amazingly simple description of the homotopy groups in the schematic set-up, which got me quite excited; next day, from a phone call to Illusio, it turned out that the key assumption in all my ponderings on schematisation, namely the "abelianisation theorem" (sic) asserting isomorphism between discrete and schematic (namely quasi-coherent) π_1 homology (or equivalently, cohomology) invariants, was definitely false; consequently, the canonical functor from schematic to discrete homotopy types turns out definitely not to be an equivalence. This completely overthrows the idyllic picture in my mind about the relationship between schematic and discrete homotopy types - but the reflection on schematic homotopy types

Mise en scène du travail de découverte mathématique. Désir de véhiculer certains aspects émotionnels (déception, surprise, ...).

Haro sur la topologie dite « générale »

Introduction

Enquêtes

Projets

Explorations

Conclusion

Haro sur la topologie dite « générale »

Introduction

Enquêtes

Projets

Explorations

Conclusion

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

par Alexandre Grothendieck

Sommaire :

1. Envoi.
 2. Un "jeu de Léo-Teichmüller", et le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{Q} .
 3. Corps de nombres associés à un dessin d'enfant.
 4. Polyèdres réguliers et corps finis.
 5. Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée".
 6. "Théories différentiables" (à la Nash) et "théories modérées".
 7. A la Poursuite des Champs.
 8. Digressions de géométrie bidimensionnelle.
 9. Bilan d'une activité enseignante.
 10. Epilogue.
- Notes.

N.B. Les astérisques (*) renvoient aux notes figurant au bas de la même page, les renvois numérotés de (1) à (7) aux notes (rajoutées ultérieurement) réunies à la fin du rapport.

Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des « faux problèmes » (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) [...] Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages.

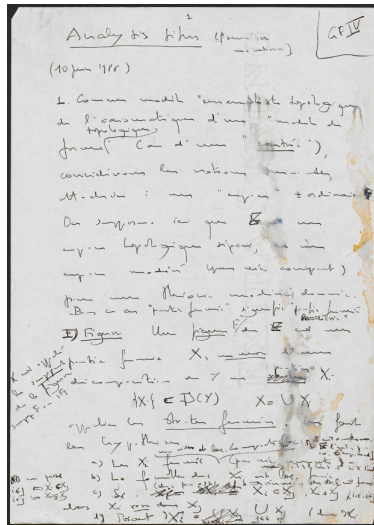
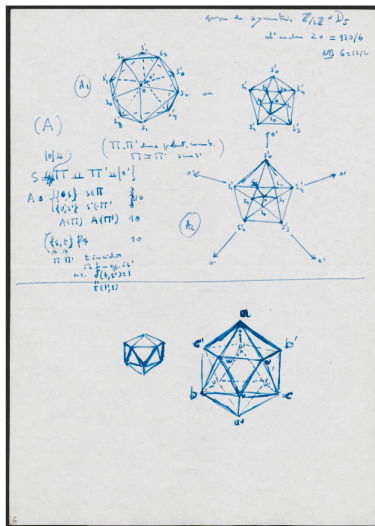
Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 29

Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des « faux problèmes » (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) [...] Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages.

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 29

- ① Deux manuscrits sur les « structures modérées » (1973-1978 ?) ;
- ② Deux manuscrits sur les espaces et topos stratifiés (1980-1982 ?) ;
- ③ Nombreux textes autour de la « géométrie et topologie combinatoire » (1976-1986) ;
- ④ Long manuscrit (en 4 moutures) « Vers une géométrie des formes » (juin 1986).

Manuscripts mathématiques



Topologies : quelles motivations mathématiques ?

Le problème de départ, qui a commencé à m'intriguer il doit y avoir une quinzaine d'années déjà, était celui de définir une théorie de « dévissage » des structures stratifiées, pour les reconstituer, par un procédé canonique, à partir de « pièces de construction » canoniquement déduites de la structure donnée. [...] Depuis, j'ai vu apparaître de telles structures, notamment, dans toute situation de « modules » pour des objets géométriques susceptibles non seulement de variation continue, mais en même temps de phénomènes de « dégénérescence » (ou de « spécialisation ») [...] Les multiplicités modulaires compactifiées $M_{g,\nu}$ de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques stables de type (g, ν) en fournissent un exemple typique et particulièrement inspirant, qui a joué un rôle de motivation important dans la reprise de ma réflexion sur les structures stratifiées, de décembre 1981 à janvier 1982.

Esquisse d'un programme, p.25

Ces structures stratifiées jouent en rôle central dans *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* (1981).

La théorie de Galois(-Grothendieck)

Les 1300 pages de *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* sont rédigées entre janvier et juin 1981 durant une période de « frénésie mathématique ».

Introduction

Enquêtes

Projets

Explorations

Conclusion

La théorie de Galois(-Grothendieck)

Les 1300 pages de *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* sont rédigées entre janvier et juin 1981 durant une période de « frénésie mathématique ».

- Point de départ (~ 1977) : discussions (« micro-séminaires ») avec ses doctorants au sujet de la notion de cartes tracées sur des surfaces topologiques.

Les 1300 pages de *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* sont rédigées entre janvier et juin 1981 durant une période de « frénésie mathématique ».

- Point de départ (~ 1977) : discussions (« micro-séminaires ») avec ses doctorants au sujet de la notion de cartes tracées sur des surfaces topologiques.
- Retour brutal au monde de la géométrie algébrique et arithmétique (interprétation du groupe de Galois comme groupe de transformation d'objets géométriques).

La théorie de Galois(-Grothendieck)

Les 1300 pages de *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* sont rédigées entre janvier et juin 1981 durant une période de « frénésie mathématique ».

- Point de départ (~ 1977) : discussions (« micro-séminaires ») avec ses doctorants au sujet de la notion de cartes tracées sur des surfaces topologiques.
- Retour brutal au monde de la géométrie algébrique et arithmétique (interprétation du groupe de Galois comme groupe de transformation d'objets géométriques).
- Véritable reprise de l'activité de recherche : visite de l'IHES en 1978 pour soumettre ses idées aux « compétences en la matière ».

Les 1300 pages de *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* sont rédigées entre janvier et juin 1981 durant une période de « frénésie mathématique ».

- Point de départ (~ 1977) : discussions (« micro-séminaires ») avec ses doctorants au sujet de la notion de cartes tracées sur des surfaces topologiques.
- Retour brutal au monde de la géométrie algébrique et arithmétique (interprétation du groupe de Galois comme groupe de transformation d'objets géométriques).
- Véritable reprise de l'activité de recherche : visite de l'IHES en 1978 pour soumettre ses idées aux « compétences en la matière ».

C'est près de trois ans plus tard seulement, voyant que décidément les vastes horizons qui s'ouvrent là ne faisaient rien tressaillir en aucun de mes élèves, ni même chez aucun des trois ou quatre collègues de haut vol auxquels j'ai eu l'occasion d'en parler de façon circonstanciée, que je fais un premier voyage de prospection de ce « monde nouveau », de janvier à juin 1981.

Renouvellement ou continuité ?

Il nous apparaît que le « **rêve des motifs** » peut se voir comme un dénominateur commun des (la plupart ?) travaux de Grothendieck post-IHES.

Renouvellement ou continuité ?

Il nous apparaît que le « **rêve des motifs** » peut se voir comme un dénominateur commun des (la plupart ?) travaux de Grothendieck post-IHES. Mathématiquement, on aperçoit des motifs partout.

Renouvellement ou continuité ?

Il nous apparaît que le « **rêve des motifs** » peut se voir comme un dénominateur commun des (la plupart ?) travaux de Grothendieck post-IHES. Mathématiquement, on aperçoit des motifs partout.

- *Pursuing stacks* : « type d'homotopie motivique » comme « l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition « de forme arithmétique (ou « **motivique** » d'une variété algébrique » (*Récoltes et Semailles*, p. 637)

Renouvellement ou continuité ?

Il nous apparaît que le « **rêve des motifs** » peut se voir comme un dénominateur commun des (la plupart ?) travaux de Grothendieck post-IHES. Mathématiquement, on aperçoit des motifs partout.

- *Pursuing stacks* : « type d'homotopie motivique » comme « l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition « de forme arithmétique (ou « **motivique** » d'une variété algébrique » (*Récoltes et Semailles*, p. 637)
- *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* : Grothendieck sait depuis la fin des années 60 que le groupe de Galois est le groupe des composantes connexes du « groupe de Galois motivique » (notion de « motifs d'Artin », (*Archives de Montpellier*, cote 12, p. 9).

Il nous apparaît que le « **rêve des motifs** » peut se voir comme un dénominateur commun des (la plupart ?) travaux de Grothendieck post-IHES. Mathématiquement, on aperçoit des motifs partout.

- *Pursuing stacks* : « type d'homotopie motivique » comme « l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition « de forme arithmétique (ou « **motivique** » d'une variété algébrique » (*Récoltes et Semailles*, p. 637)
- *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* : Grothendieck sait depuis la fin des années 60 que le groupe de Galois est le groupe des composantes connexes du « groupe de Galois motivique » (notion de « motifs d'Artin », (*Archives de Montpellier*, cote 12, p. 9).
- **Topologie modérée** : motivée par l'étude de la stratification naturelle de la tour de Teichmüller (pour la théorie de Galois).

- Bien que le point de départ (topologie des surfaces) semble différent et plus élémentaire, les concepts sophistiqués élaborés entre 1955 et 1970 (topos étale, schémas, groupe algébrique fondamental) réapparaissent dans les mathématiques de la période post-IHES.
- Grothendieck avait l'intention de développer un projet ambitieux et global de *Réflexions mathématiques* qui a été supplanté par *Récoltes et Semailles*.
- On retrouve une **unité** dans l'œuvre mathématique de Grothendieck entre 1955 et 1991 : celle de la « **géométrie arithmétique** », qui comprend les motifs, la géométrie anabélienne et la théorie de Grothendieck-Teichmüller, **et la théorie de Langlands**; tandis que l'« **algèbre topologique** », qui se compose de l'algèbre homologique et de l'algèbre homotopique fournit un soutien logistique.
- Les motifs constituent le cœur de la **géométrie arithmétique motivique**.

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ...*

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ... **motifs**, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé.*

*Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Cette source [la topologie des surfaces], par rapport à mon « passé » mathématique, représente **un renouvellement, mais nullement une rupture**. Plutôt elle montre le chemin d'une **approche nouvelle** vers cette réalité encore mystérieuse, celle des ... **motifs**, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé.*

*Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. **Le temps des tâches pour moi est révolu**. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.*

A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme* (janvier 1984), conclusion, p. 51

Reprenons. Grothendieck redevient donc chercheur au CNRS en 1984 jusqu'à sa retraite en 1988. Il se retire en 1991 à Lasserre, en Ariège, et meurt en 2014. Il ne publie pas ce qu'il nommait ses *Réflexions Mathématiques*.

Merci !