Mathématiques et Philosophie Contemporaine XII
Relais des quatre vents, Lac de Saint-Ferréol (31)
Jun 23 – 27, 2025

Le rôle des représentations dans la pratique des mathématiques

Valeria Giardino (CNRS - Institut Jean Nicod)
valeria.giardino@ens.psl.eu

Pourquoi s'intéresser au rôle des représentations (externes, publiques…) en mathématiques

« XXV. Mais rien n'affligea tant Marcellus que la mort d'Archimède. Ce philosophe était alors chez lui, appliqué à quelque figure de géométrie (διάγραμμα); et comme il donnait à cette méditation tout son esprit et tous ses sens, il n'avait pas entendu le bruit des Romains qui couraient de toutes parts dans la ville, et il ignorait qu'elle fût en leur pouvoir. Tout à coup il se présente à lui un soldat qui lui ordonne de le suivre pour aller trouver Marcellus. Il refuse d'y aller jusqu'à ce qu'il ait achevé la démonstration de son problème. Le Romain, irrité, tire son épée et le tue. »

Plutarque, *La vie des hommes illustres*, Tome cinquième : vie de Marcellus (2e siècle EC)

Pourquoi s'intéresser au rôle des représentations (externes, publiques…) en mathématiques

« XXV. Mais rien n'affligea tant Marcellus que la mort d'Archimède. Ce philosophe était alors chez lui, appliqué à quelque figure de géométrie (διάγραμμα); et comme il donnait à cette méditation tout son esprit et tous ses sens, il n'avait pas entendu le bruit des Romains qui couraient de toutes parts dans la ville, et il ignorait qu'elle fût en leur pouvoir. Tout à coup il se présente à lui un soldat qui lui ordonne de le suivre pour aller trouver Marcellus. Il refuse d'y aller jusqu'à ce qu'il ait achevé la démonstration de son problème. Le Romain, irrité, tire son épée et le tue. »

Plutarque, *La vie des hommes illustres*, Tome cinquième : vie de Marcellus (2e siècle EC)

Pourquoi s'intéresser au rôle des représentations (externes, publiques…) en mathématiques

« ARISTIPPE, philosophe de l'école de Socrate, ayant été jeté par la tempête sur les côtes de l'île de Rhodes, et ayant aperçu des figures géométriques (geometrica schemata) tracées sur le sable, s'écria, dit-on : « Ayons bon espoir, mes amis! car je vois des indices qui me révèlent qu'il y a ici des hommes ». »

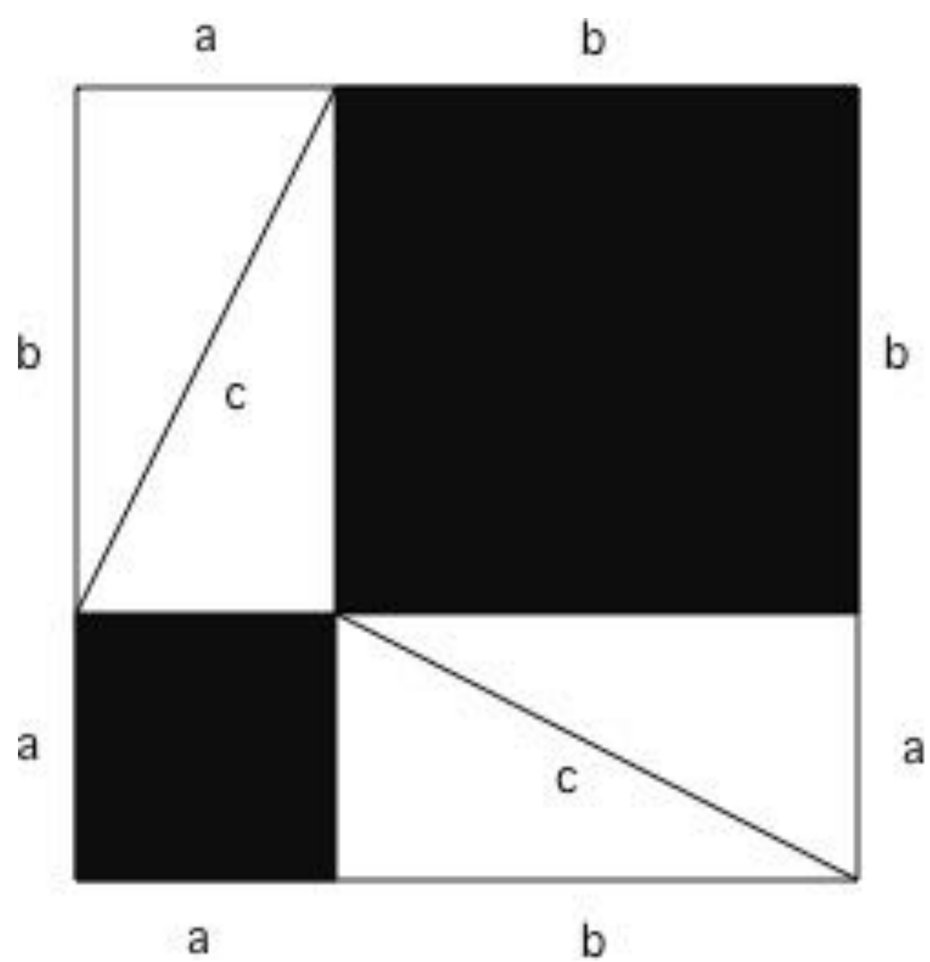
M. Vitruve Pollion, *De l'Architecture*, Livre Sixième (30-15 BC)

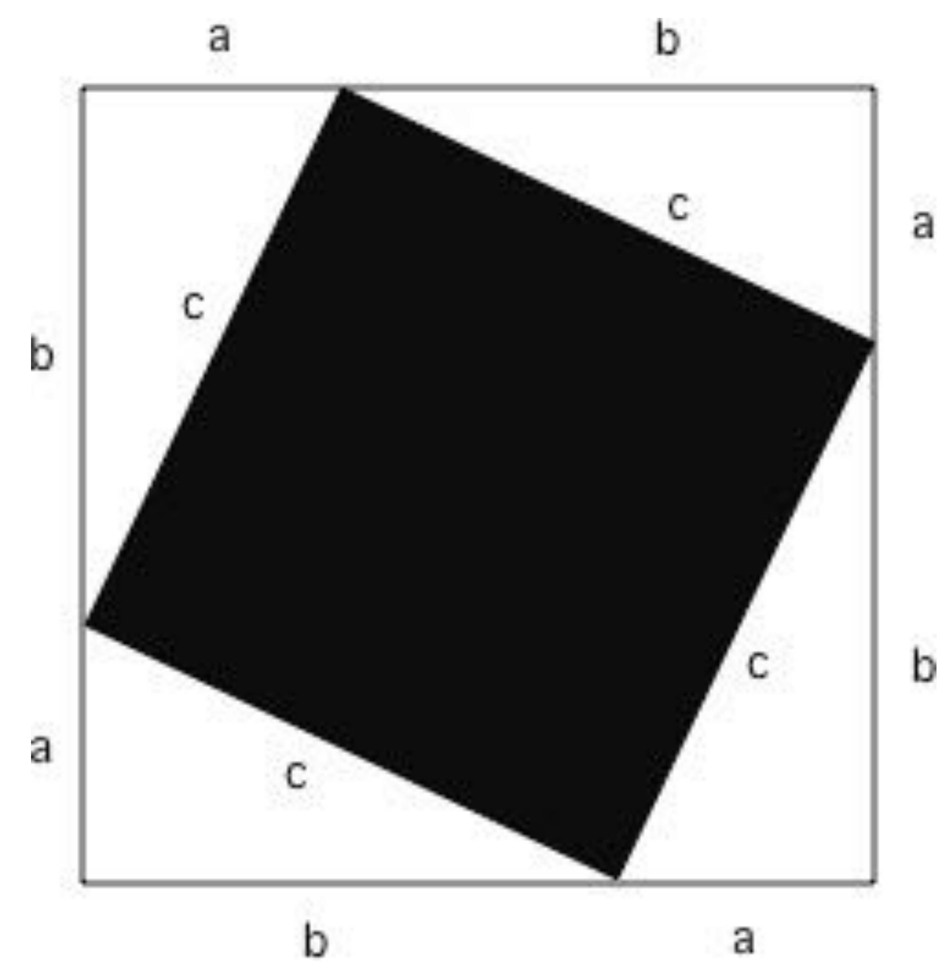
Pourquoi s'intéresser au rôle des représentations (externes, publiques…) en mathématiques

« ARISTIPPE, philosophe de l'école de Socrate, ayant été jeté par la tempête sur les côtes de l'île de Rhodes, et ayant aperçu des figures géométriques (geometrica schemata) tracées sur le sable, s'écria, dit-on : « Ayons bon espoir, mes amis! car je vois des indices qui me révèlent qu'il y a ici des hommes ». »

M. Vitruve Pollion, *De l'Architecture*, Livre Sixième (30-15 BC)

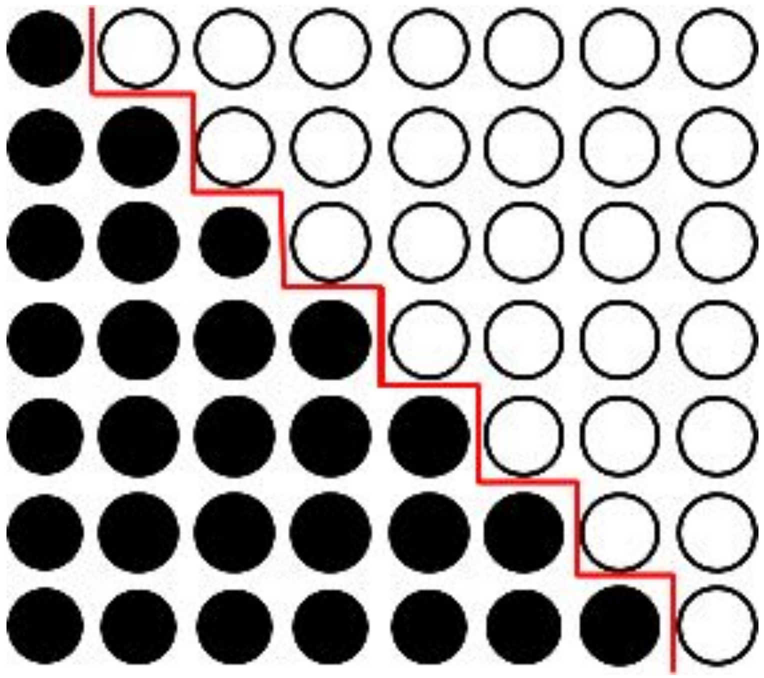
Quelques examples de *preuves en images* (« picture proofs »)





Le Théorème de Pythagore

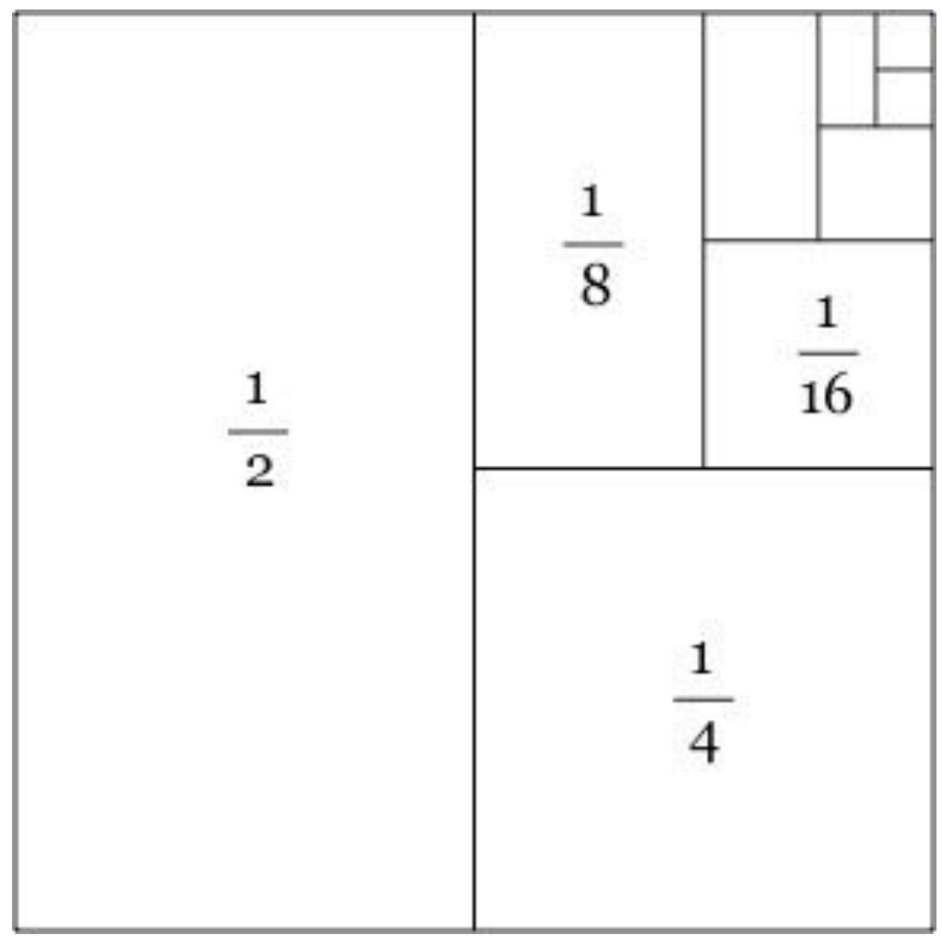
Quelques examples de *preuves en images* (« picture proofs »)



La série infinite dont les termes sont les nombre naturels $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

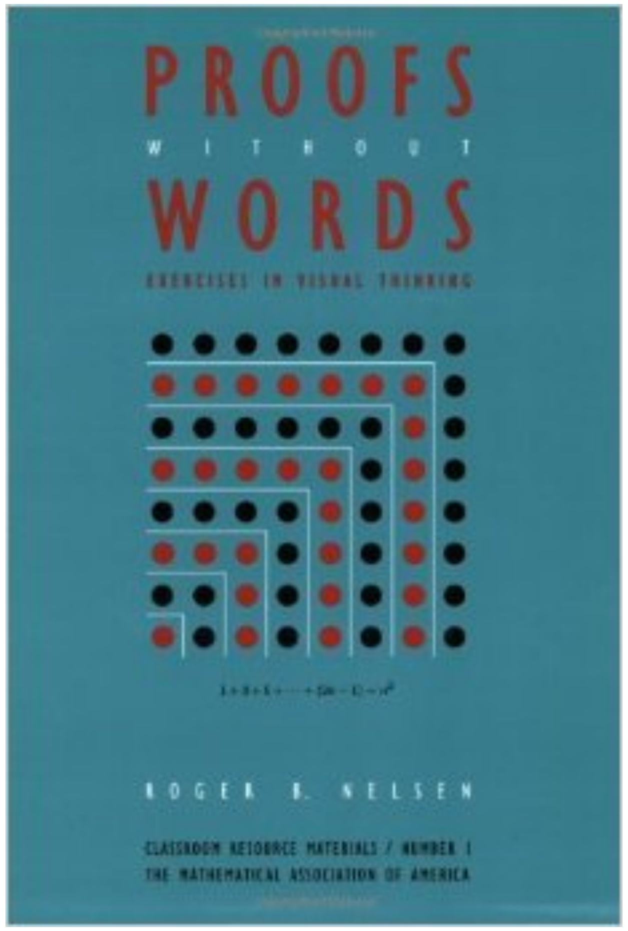
$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

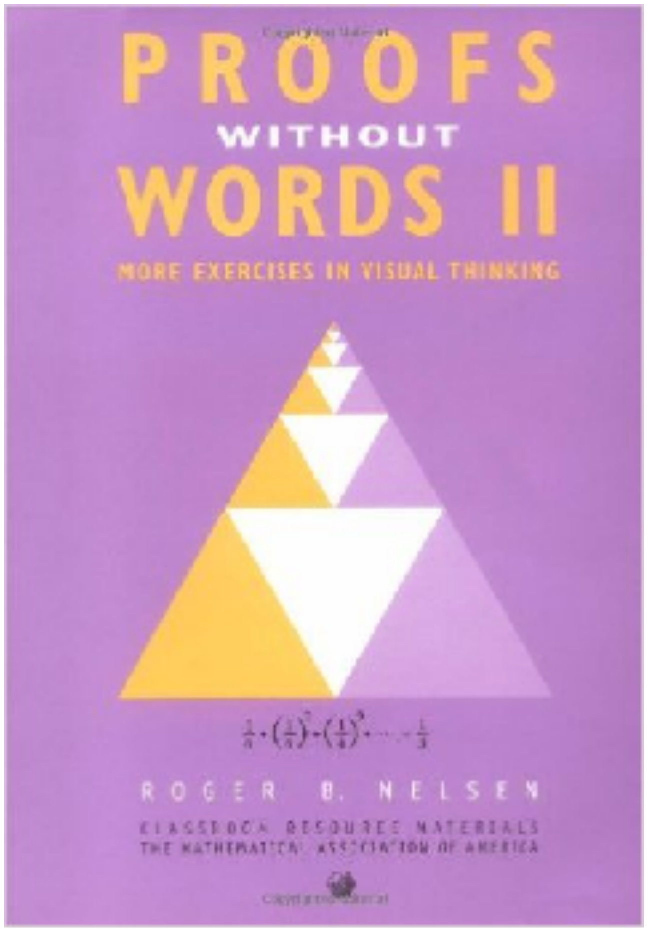
Quelques examples de *preuves en images* (« picture proofs »)



La série géométrique $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ converges vers 1

Si vous voulez en savoir plus...





R. Nelsen

- ✓ *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials (The Mathematical Association of America, Washington 1997)
- ✓ *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials (The Mathematical Association of America, Washington 2001)

De nombreuses questions à se poser

- Quelques questions générales
    - ➡ Ces représentations font-elles vraiment partie intégrante de la pratique mathématique ?
    - ➡ Si c'est le cas, que peut-on dire de leurs caractéristiques, de leur utilisation et de leurs relations avec d'autres éléments de la pratique ?
    - ➡ Ces preuves « sans paroles » le sont-elles vraiment ??
- Des questions plus épistémologiques
    - ➡ Une croyance mathématique obtenue par la manipulation d'un diagramme peut-elle être considérée connaissance en l'absence des raisons indépendantes du diagramme ?

Plan de l'exposé

- Partie I

  La philosophie de la pratique mathématique : un nouveau (?) regard sur de vieux problèmes

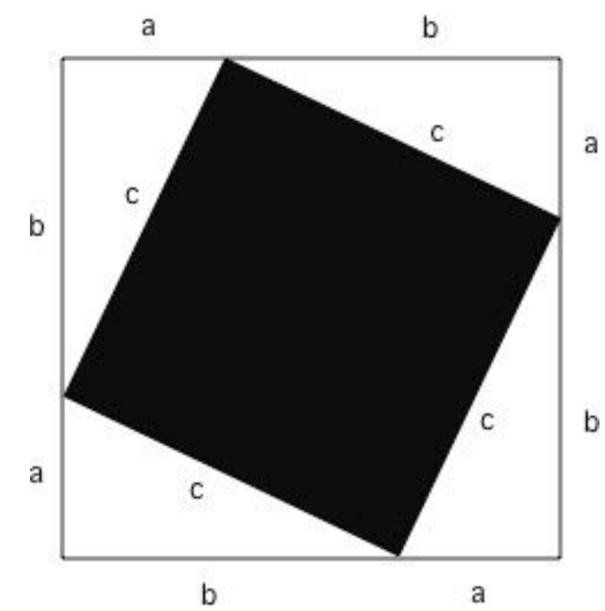
- Partie II

  Pratiques diagrammatiques dans les mathématiques contemporaines

Partie I : un nouveau (?) regard sur de vieux problèmes

Retour sur le Théorème de Pythagore

- un cas de *changement d’aspect* (« aspect shifting »)
- d'abord nous raisonnons *géométriquement*
- ensuite nous raisonnons *algébriquement*



$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

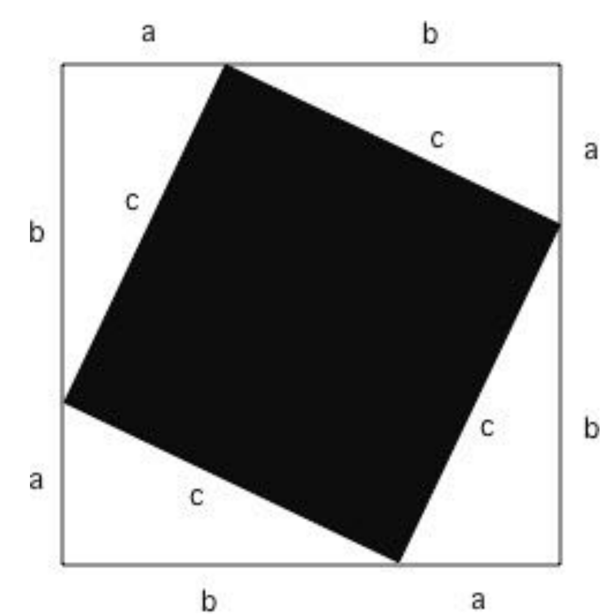
- Cet argument dans son ensemble doit-il être considéré comme *premièrement algébrique ou géométrique* ? Il semble qu'*aucune de ces deux catégories* soit appropriée.

Giaquinto, 2007

« Trafficking in heterogeneity »

- Grosholz (2011)
  - ➡ la tradition Russell-Carnap > un idéal épistémologique selon lequel l'objectif est d'unifier les mathématiques, ou les mathématiques et les sciences, en une seule théorie formalisée, et donc d'exiger de la logique qu'elle soit un idiome homogène en tant que véhicule de l'inférence déductive
  - ➡ Théorème d'incomplétude de Gödel :

    « … he [Gödel] is exploiting a carefully controlled and fruitful ambiguity, which multiplies the information available to the mathematician; it is hard for a logician to admit that he is **trafficking in heterogeneity**. »



$(a + b)^2 = 2ab + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

Les représentations et (la philosophie de) la pratique des mathématiques

- Kant (1781/9: A715/B743) : « Tandis que la philosophie s'en tient simplement à des concepts généraux, les mathématiques ne peuvent rien faire avec un simple concept, mais elles se hâtent de recourir à l'intuition, où elles considèrent le concept *in concreto* […]. »

- Gauss (1816) : « anybody who is acquainted with the essence of geometry knows that [the logical principles of identity and contradiction] are able to accomplish nothing by themselves, and that they put forth sterile blossoms unless the fertile living intuition of the object itself prevails everywhere. »

- *Anschauung*

Les représentations et (la philosophie de) la pratique des mathématiques

- Fin du 19e siècle
- Pasch (1882): « the theorem is only truly demonstrated if the proof is completely independent of the figure »
    - ✓ L'insatisfaction de Dedekind quant à l'appel à l'intuition géométrique dans l'analyse infinitésimale de base
    - ✓ Russell (1901): « In the best books, there are no figures at all »
- l'opinion prédominante : penser en termes des figures facilite la compréhension des formules et du texte, mais seuls les raisonnements qui sont exprimés au moyen de formules et de textes peuvent avoir un poids épistémologique
- 20e siècle
    - ✓ Tennant (1986): « [the diagram] has no proper place in the proof as such. For the proof is a syntactic object consisting only of sentences arranged in a finite and inspectable array »

Les représentations et (la philosophie de) la pratique des mathématiques

- Début du 21e siècle

  ✓ Mancosu (2005) :

  l'accent doit être mis sur « what mathematicians are actually doing when they produce mathematics » ; « Questions concerning concept-formation, understanding, heuristics, changes in style of reasoning, the role of analogies and diagrams etc. have become the subject of intense interest. […] How are mathematical objects and concepts generated? How does the process tie up with justification? What role do visual images and diagrams play in mathematical activity? »

  le « single-minded focus on the problem of access to mathematical objects » has « reduced the epistemology of mathematics to a *torso* »; L'épistémologie des mathématiques peut s'aventurer au-delà des limites actuelles et aborder des questions épistémologiques liées à « fruitfulness, evidence, visualization, diagrammatic reasoning, understanding, explanation and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of access to *abstract objects*. »

Les représentations et (la philosophie de) la pratique des mathématiques

- Début du 21e siècle

  ✓ Mancosu (**2005**) :

  l'accent doit être mis sur « what mathematicians are actually doing when they produce mathematics » ; « Questions concerning concept-formation, understanding, heuristics, changes in style of reasoning, the role of analogies and diagrams etc. have become the subject of intense interest. […] How are mathematical objects and concepts generated? How does the process tie up with justification? What role do visual images and diagrams play in mathematical activity? »

  le « single-minded focus on the problem of access to mathematical objects » has « reduced the epistemology of mathematics to a *torso* »; L'épistémologie des mathématiques peut s'aventurer au-delà des limites actuelles et aborder des questions épistémologiques liées à « fruitfulness, evidence, visualization, diagrammatic reasoning, understanding, explanation and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of access to *abstract objects*. »

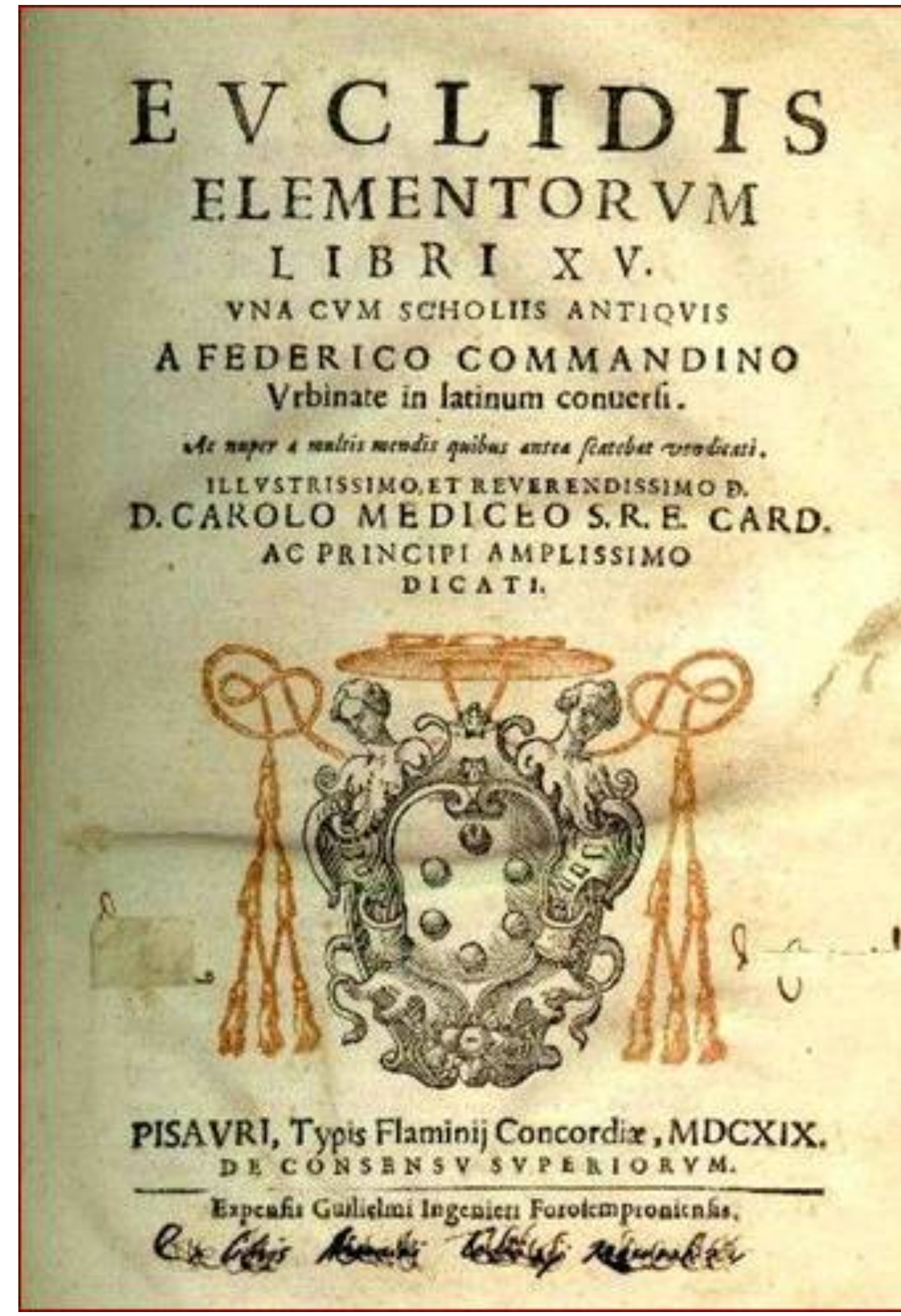
Le diagramme d'Euclide

- Euclide, *Elements* (300 AEC)

- le diagramme euclidien comme *paradigme* du raisonnement par diagrammes en mathématiques

- en géométrie euclidienne, le recours aux diagrammes est <u>si naturel et spontané</u> que l'on a tendance à considérer la présence et l'efficacité des diagrammes comme allant de soi

- la plupart des diagrammes de la géométrie euclidienne font partie de notre *répertoire visuel* depuis notre plus jeune âge à l'école.


EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.
Ac nuper a multis mendis quibus antea scatebat vindicati.
ILLVSTRISSIMO, ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.

PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.
Expensis Guilielmi Ingenieri Forolempronitensis.

Le diagramme d'Euclide

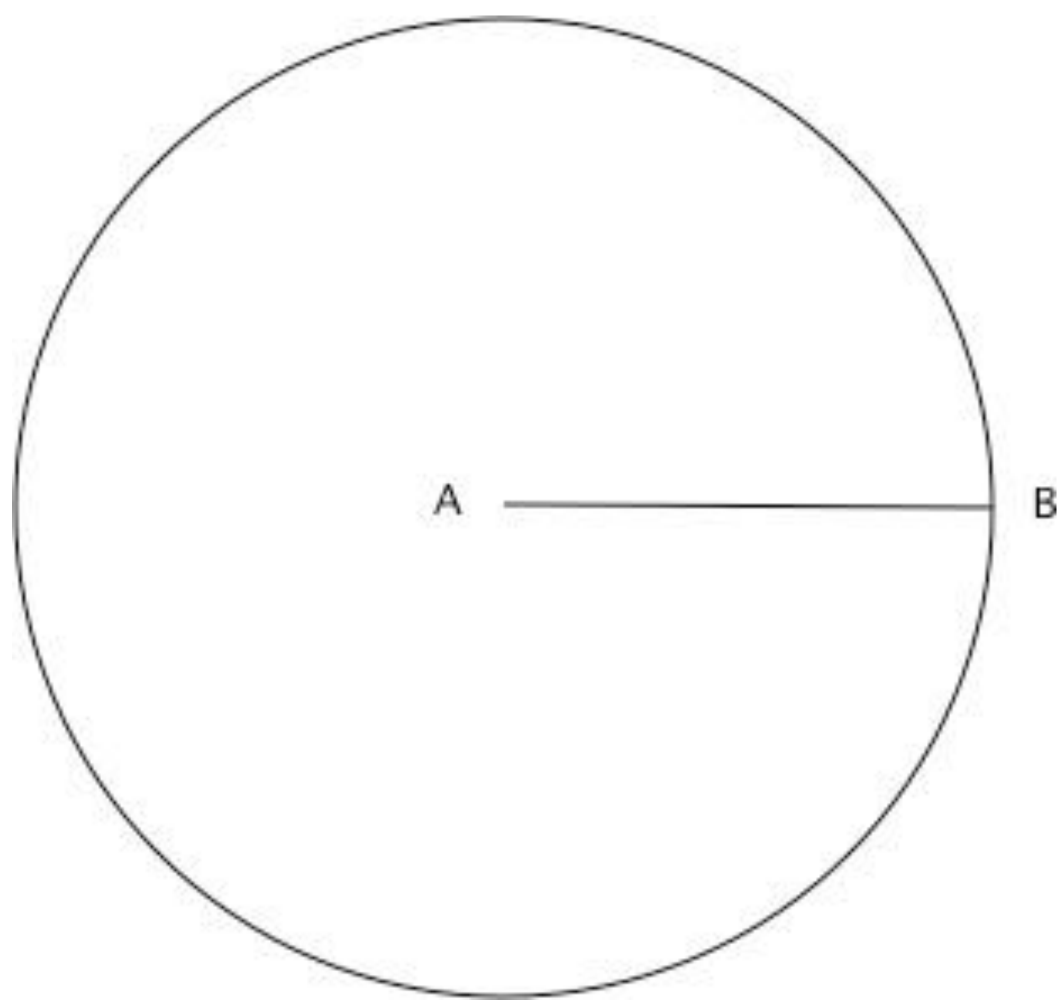
Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*

Le diagramme d'Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*

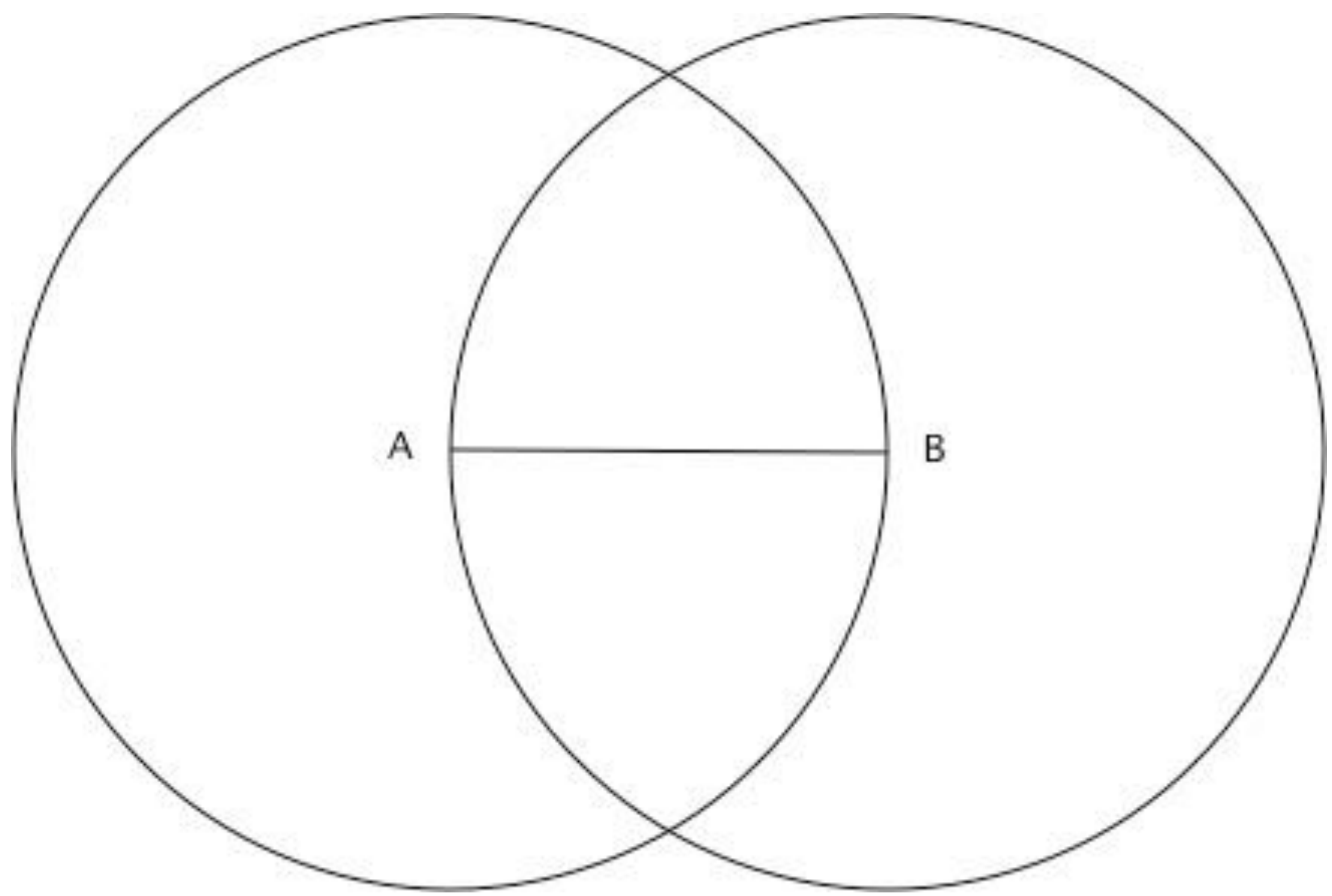
Le diagramme d’Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*



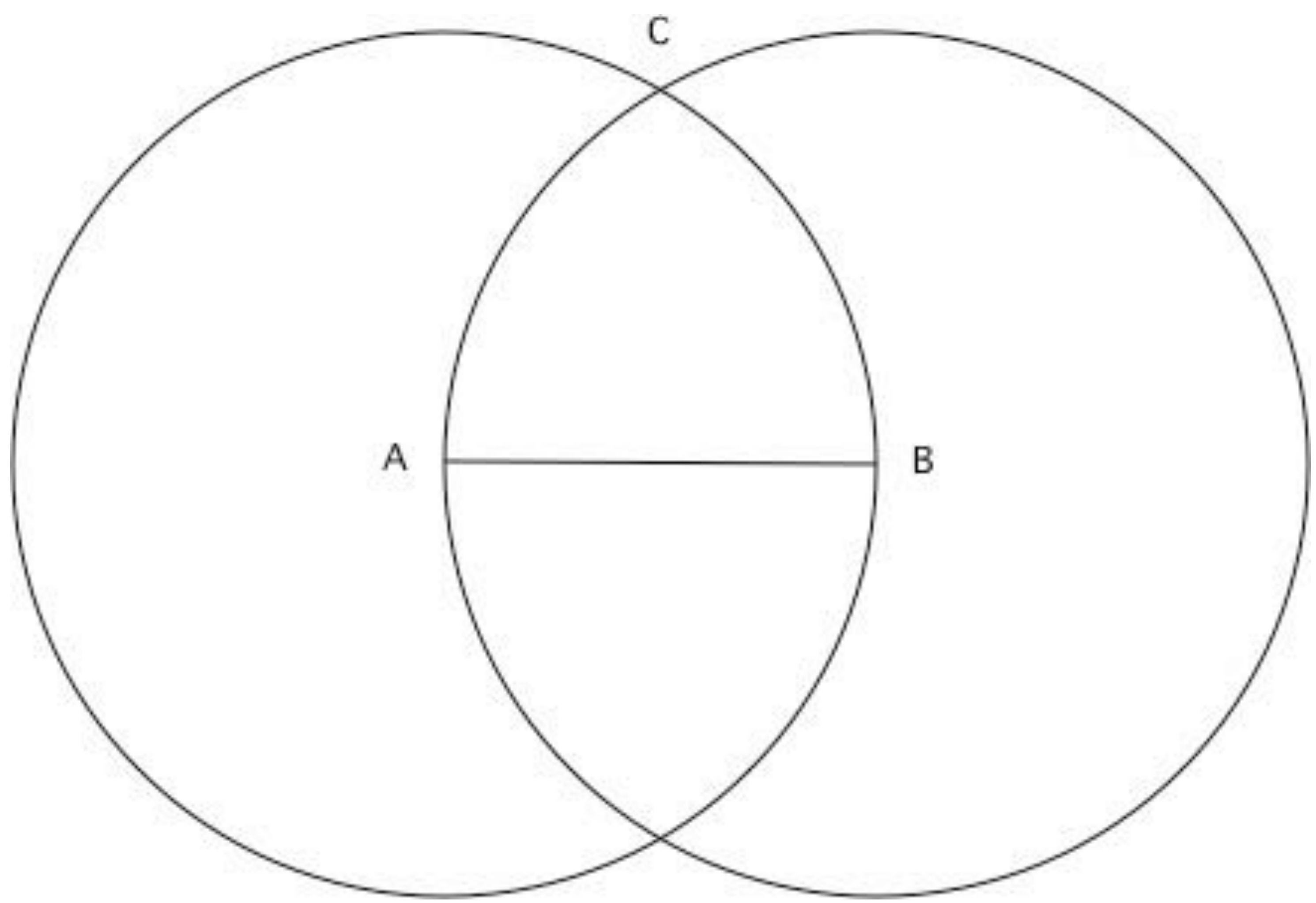
Le diagramme d’Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*



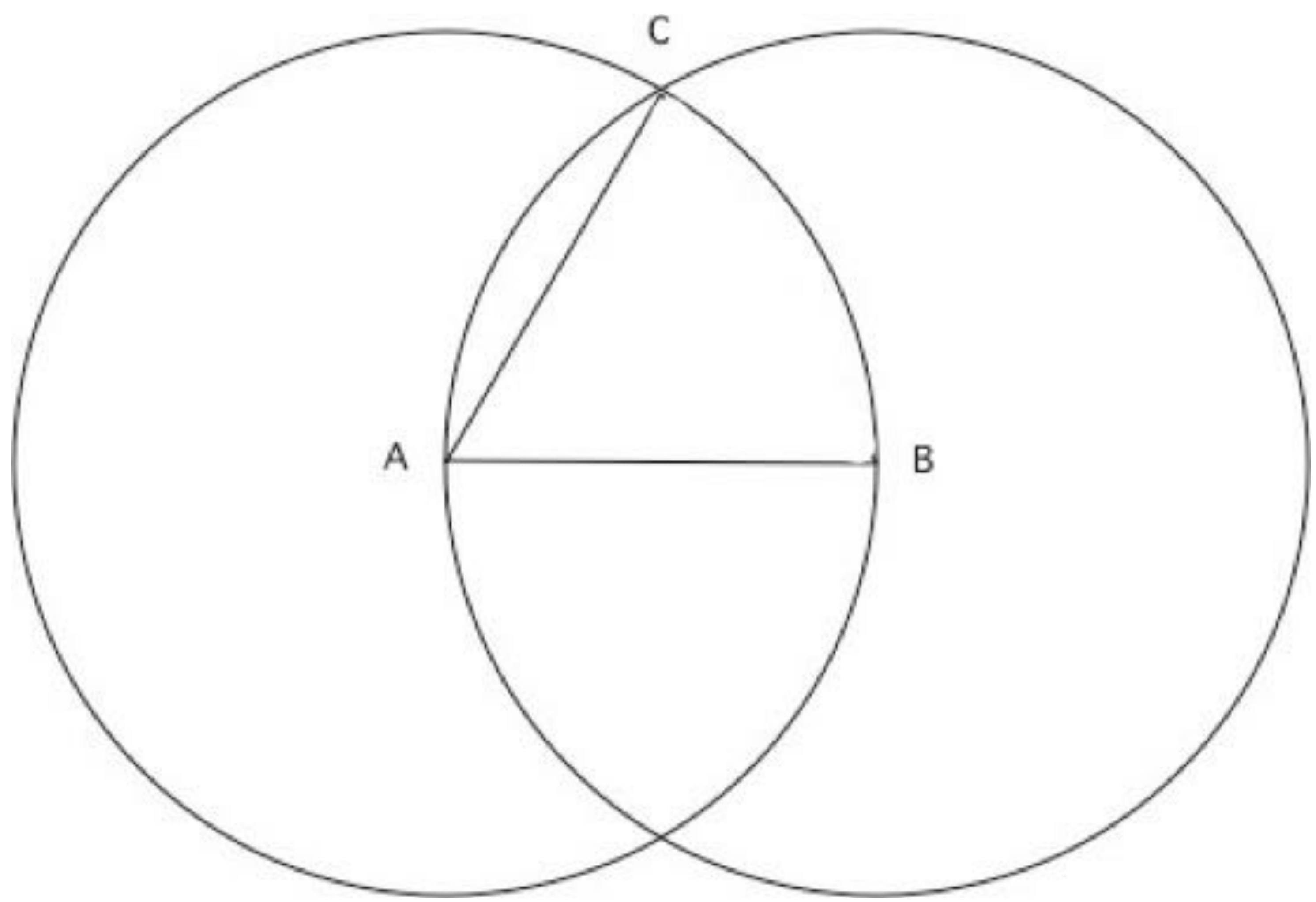
Le diagramme d'Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*



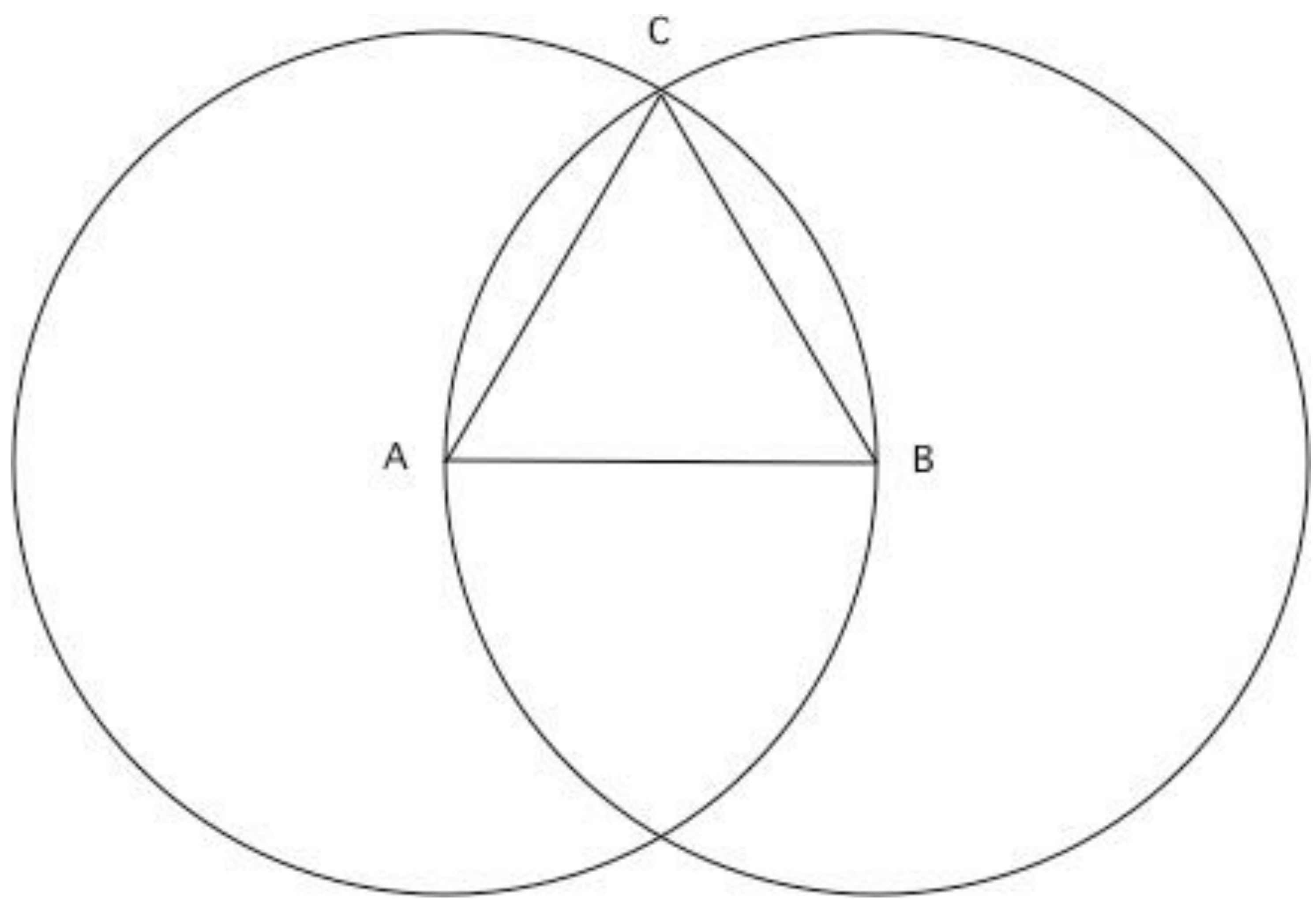
Le diagramme d’Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*



Le diagramme d’Euclide

Euclide, *Éléments*, Livre I, Proposition première: *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral*



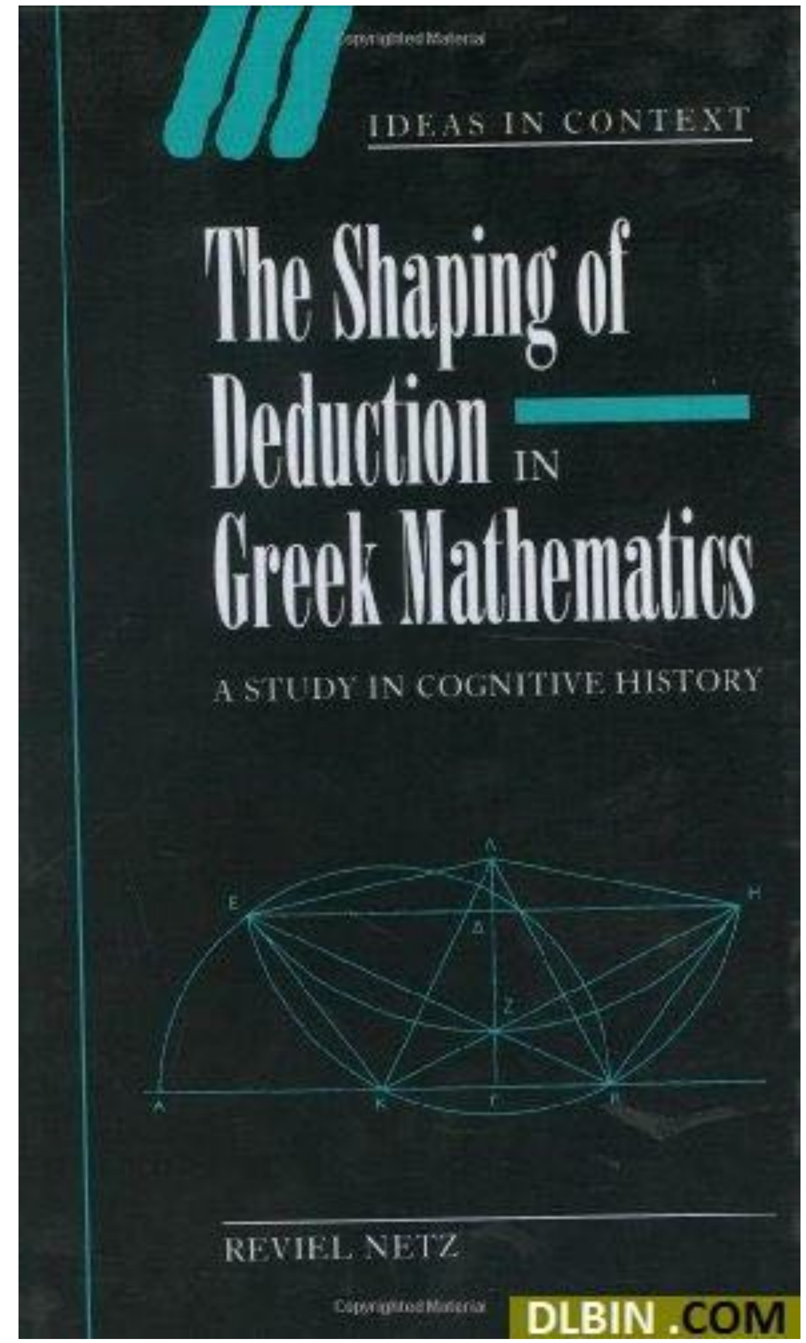
Pas rigoureux !

- La critique de Russell (1903) :
  - ➡ « There is no evidence whatever that the circles which we are told to construct intersect, and if they do not, the whole propositions failed »
- Comment sauver la géométrie euclidienne de ses possibles erreurs : *Les axiomes de Pasch*
- Jusqu'alors, de telles hypothèses étaient généralement considérées comme « diagrammatically obvious » (Netz, 1999, p. 46)

Netz (1999)

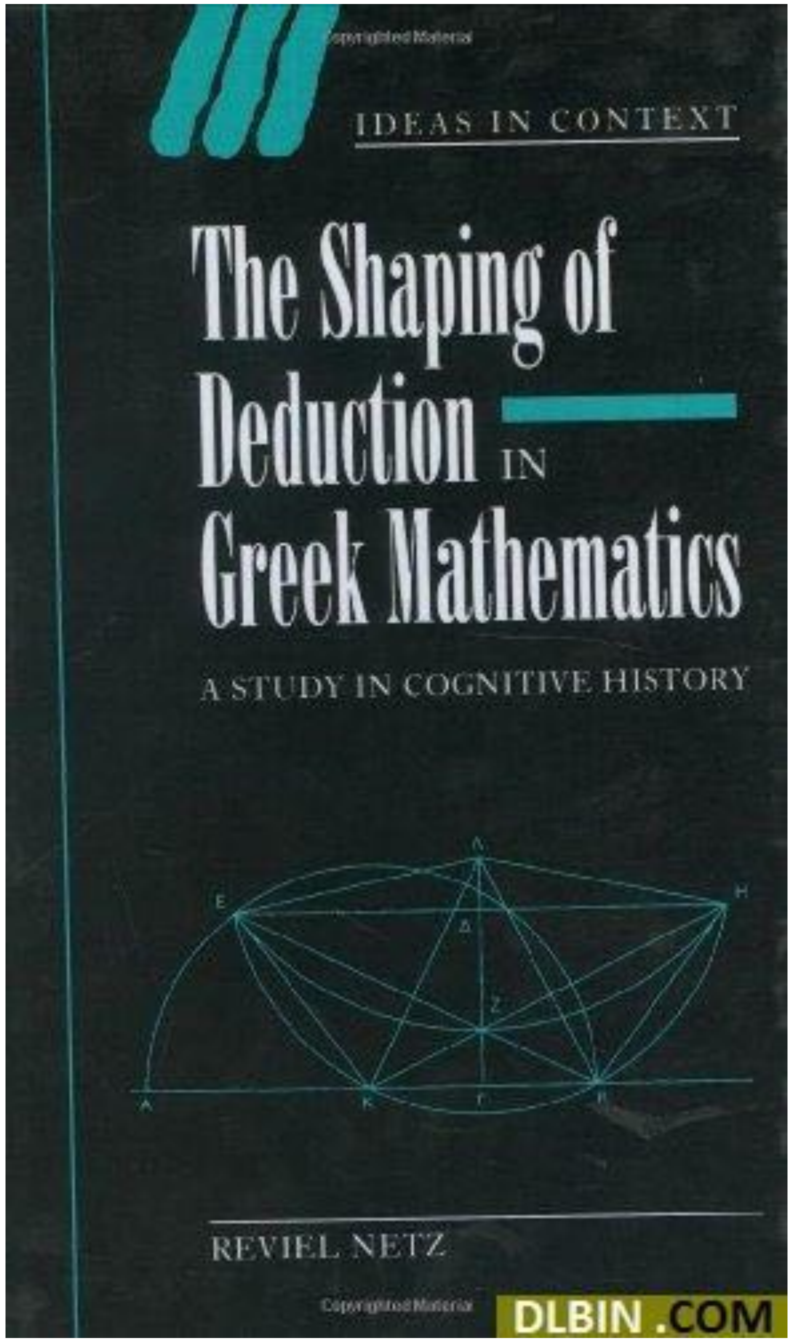
- reconstruire une *histoire cognitive*

- « Cognitive history lies at the intersection of history of science and the cognitive science. Like the history of sciences, it studies a cultural artefact. Like the cognitive science, it approaches knowledge not through its specific propositional contents but through its forms and practices. An intersection is an interesting but dangerous place to be in. I fear cognitive scientists may see this study as too ‘impressionistic’ while historians may see it as over-theoretical and too eager to generalise. Perhaps both are right; I beg both to remember I am trying to do what is neither cognitive science nor the history of ideas. Whether I have succeeded, or whether this is worth trying, I leave for the reader to judge. » (p. 7)



Netz (1999)

- reconstruire une *histoire cognitive*
- « Cognitive history lies at the intersection of history of science and the cognitive science. Like the history of sciences, it studies a cultural artefact. Like the cognitive science, it approaches knowledge not through its specific propositional contents but through its forms and practices. An intersection is an interesting but dangerous place to be in. I fear cognitive scientists may see this study as too 'impressionistic' while historians may see it as over-theoretical and too eager to generalise. Perhaps both are right; I beg both to remember I am trying to do what is neither cognitive science nor the history of ideas. Whether I have succeeded, or whether this is worth trying, I leave for the reader to judge. » (p. 7)



Netz (1999)

- étude de cas : Géométrie grecque

- Lorsque l'on fait de la géométrie euclidienne, on a du mal à trouver des solutions « to *unsee* the diagram, to teach oneself to disregard it and to imagine that the only information there is is that supplied by the text. Visual information is compelling itself in an unobtrusive way. » (p. 23)

- La marque distinctive des mathématiques grecques, un élément qui n'a été développé indépendamment par aucune autre culture : l'utilisation du *diagramme avec des lettres* (« lettered diagram »)

Le *diagramme avec des lettres*

- Les mathématiques grecques > tout un ensemble de procédures d'argumentation basées sur le diagramme, qui sert de source de preuve

  ✓ le diagramme avec des lettres fournit <u>un univers de discours</u>, sans se référer à aucun principe ontologique

  ✓ la preuve se fait <u>au niveau de l'objet</u> - le niveau du diagramme lettré - et il n'est pas nécessaire de supposer des objets abstraits qui lui correspondent

La preuve en géométrie grecque (selon Netz)

- Euclide, Éléments, Livre I, Proposition 1 : grâce à la *procédure* décrite dans le texte accompagnant le diagramme avec des lettres, on sait que les cercles vont se rencontrer en effet au point d'intersection

- un événement survenu sur un papyrus ou dans une communication orale donnée

- la preuve peut être considérée comme *invariante* sous la variabilité de l'action singulière de dessiner un diagramme sur le papyrus ou de présenter la preuve particulière oralement

- ce qui compte est sa répétabilité (sur le plan du sytème des mathématiques dans sa globalité) plutôt que la généralisabilité du résultat (pour plus de détails, voir Chap. 5)

    - le diagramme est un objet statique, mais il devient *kinesthésique* grâce au langage qui le désigne comme un objet <u>construit</u> et <u>manipulable</u>

Partie II : Pratiques diagrammatiques dans les mathématiques contemporaines

Qu'en est-il des mathématiques contemporaines ?

- Géométrie euclidienne et autres cas de l'histoire des mathématiques
- Peu de travaux philosophiques sur les mathématiques contemporaines (mais ça commence à changer)
  - ➡ Analyse : Diagrammes pour définir la stratégie d'une preuve
  - ➡ Algèbre : Diagrammes pour découvrir de nouvelles propriétés d'un objet mathématique
  - ➡ Topologie : Diagrammes permettant d'explorer les propriétés des objets mathématiques (et éventuellement de prouver des théorèmes à leur sujet)
  - ➡ Algèbre homologique : Diagrammes comme cartes
  - ➡ Combinatoire : Diagrammes comme un élément d'une « boîte à outils »

Qu'en est-il des mathématiques contemporaines ?

- Géométrie euclidienne et autres cas de l'histoire des mathématiques
- Peu de travaux philosophiques sur les mathématiques contemporaines (mais ça commence à changer)

➡ Analyse : Diagrammes pour définir la stratégie d'une preuve

➡ ~~Algèbre : Diagrammes pour découvrir de nouvelles propriétés d'un objet mathématique~~

➡ ~~Topologie : Diagrammes permettant d'explorer les propriétés des objets mathématiques (et éventuellement de prouver des théorèmes à leur sujet)~~

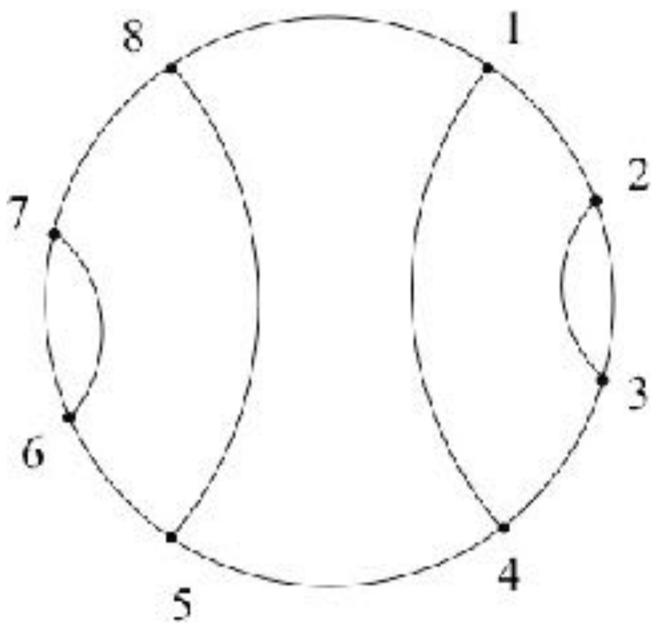
➡ ~~Algèbre homologique : Diagrammes comme cartes~~

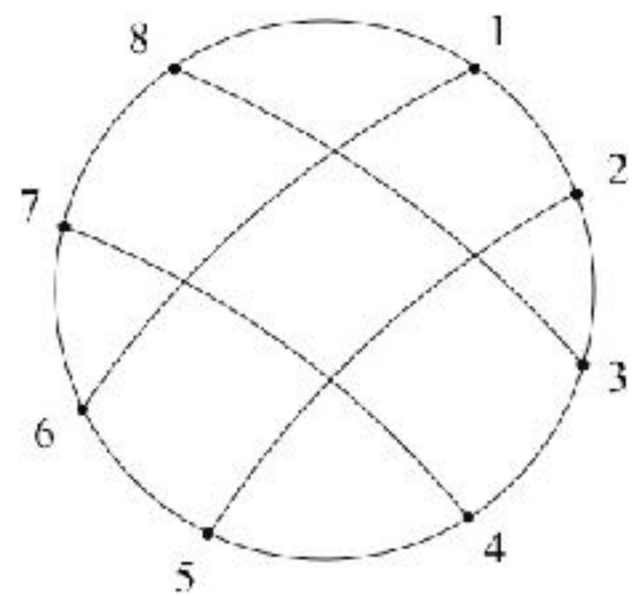
➡ Combinatoire : Diagrammes comme un élément d’une « boîte à outils »

Analyse: Carter (2010)

- Une section d'un article (Haagerup et Thorbjørnsen (1999) sur la « free probability theory »
- Des diagrammes sont introduits pour représenter des permutations qui peuvent être étudiées indépendamment du fait qu'elles sont des indices du GRM
- Ces diagrammes facilitent l'étude des propriétés pertinentes des permutations

Analyse: Carter (2010)





Le diagramme de la permutation $\boldsymbol{\pi}$ (13)(24) e son $\boldsymbol{\pi}$ correspondant (avec un ^ (désolée…))

- Ce que l'on peut voir dans le diagramme :
  - ✓ si la permutation est croisée / non croisée
  - ✓ paires de voisins
  - ✓ une opération possible : l'annulation des paires de voisins

Analyse: Carter (2010)

- Ces diagrammes :
  - ✓ suggèrent des *définitions* et des *stratégies* de preuve
  - ✓ *inspirent* au moins une partie de la version formelle des preuves
  - ✓ servent de *cadre* (« framework ») pour la preuve
  - ✓ aident à décomposer les preuves en parties *gérables*

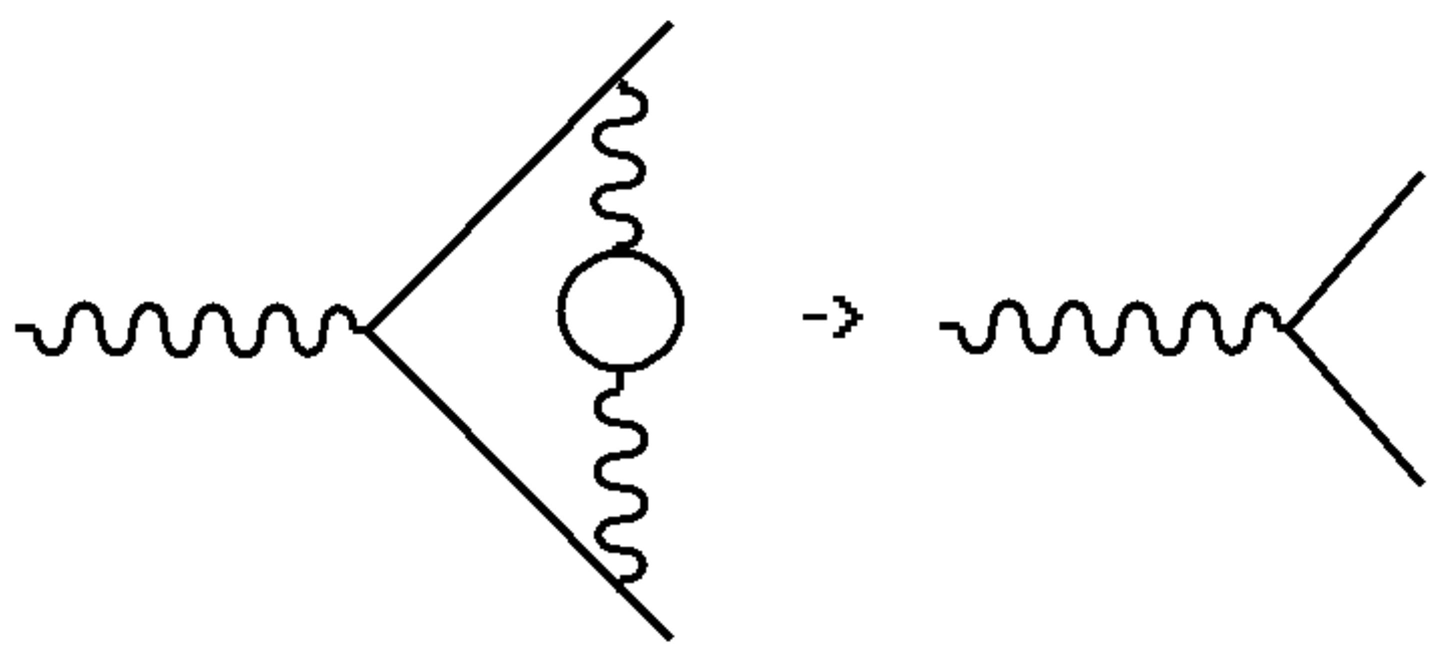
- Points importants :
  - ✓ certaines propriétés des diagrammes correspondent à des définitions formelles
  - ✓ des *expériences* sont réalisées sur le diagramme
  - ✓ les relations utilisées dans la preuve basée sur les diagrammes représentent des relations qui sont également valables dans le cadre algébrique
  - ✓ les paires de croisements et de voisins sont des propriétés coexactes
  - ➡ les diagrammes <u>ne sont pas publiées dans l'article final</u> !!!!

Giardino & Patras (à paraître !!!)

- A. Connes and D. Kreimer (2002). “Insertion and Elimination: the Doubly Infinite Lie Algebra of Feynman Graphs.” Annales Henri Poincar´e 3, 411-433.
- Une preuve portant sur les diagrammes de Feynman, l'un des objets centraux de la physique des particules et des domaines connexes depuis leur introduction en 1948

Giardino & Patras (à paraître)

- Les diagrammes de Feynman sont des graphes composés de sommets et d'arêtes, avec des règles de construction spécifiques
- Dans la pratique, les graphes sont introduits lors de l'expansion formelle de certaines expressions analytiques
- En mathématiques, on peut les considerer comme de <u>purs symboles</u> ne correspondant pas nécessairement à une signification physique claire



Elimination d’un sous-graphe et le « *residue* »

Giardino & Patras (à paraître)

- L'article traite en particulier de l'insertion de graphes les uns dans les autres :
  - ➡ Deux opérations duales sont les plus naturelles lorsque l'on considère la structure mathématique de la QFT : l'*élimination* et l'*insertion* de sous-graphes.
  - ➡ Elles apparaissent lors de la résolution des équations du mouvement et sont également essentielles au processus de *renormalisation* (l'élimination des infinis), car ce processus est en général effectué de manière itérative.

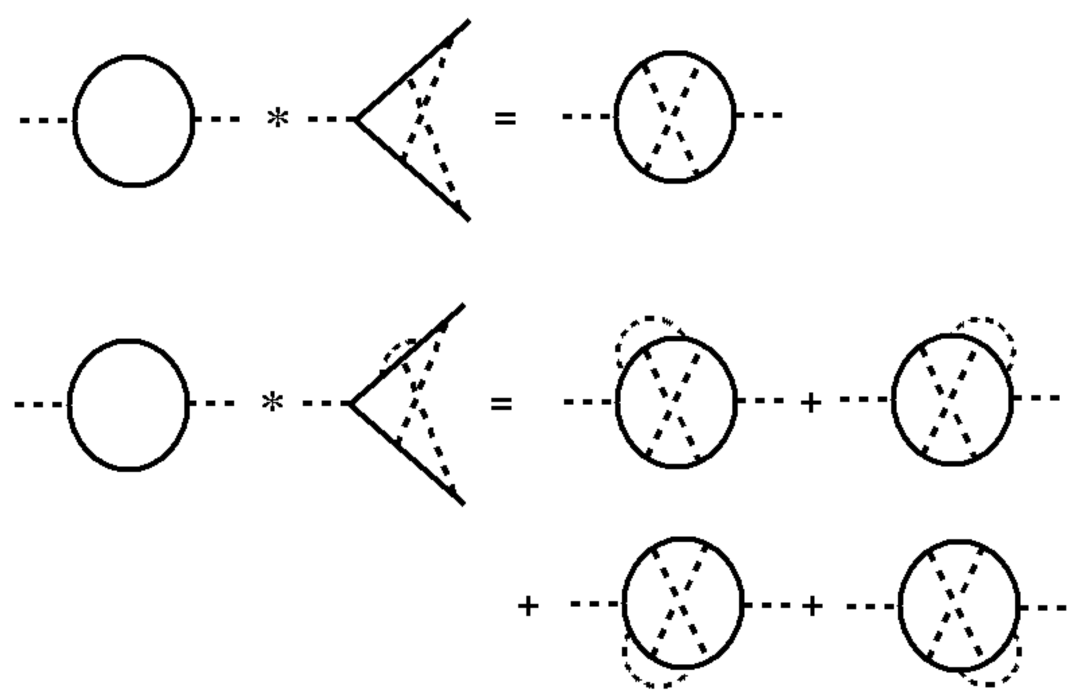
Giardino & Patras (à paraître)

- Différents outils visuels
- Section 2 : les graphes tels qu'ils sont définis et utilisés pour prouver qu'une opération de « collage » est *pré-Lie*.
  - ✓ Ceci relie les diagrammes de Feynman à une série de structures et de propriétés intéressantes
  - ✓ par exemple, les espaces vectoriels L équipés d'un produit $\star$ tel que pour x , y ,$z \in L$

$$x \star (y \star z) - (x \star y) \star z = x \star (z \star y) - (x \star z) \star y \qquad (1)$$

Giardino & Patras (à paraître)

« A further important notion is the **gluing** of graphs into each other. It is the opposite of the **shrinking** of a graph to its residue. While in that process, a graph is reduced to a vertex of a specified type, we can replace a vertex by a graph which has external edges compatible with its type. […] The following picture *illustrates* this process. » (Connes & Kreimer, 2002, pp. 424-425)



Giardino & Patras (à paraître)

« **Proposition.** This gluing operation is *pre-Lie*.

<u>Proof</u>: It suffices to show that for 1PI graphs Γ_i, i = 1, 2, 3, we have

$$\Gamma_3 \star (\Gamma_2 \star \Gamma_3) - (\Gamma_1 \star \Gamma_2) \star \Gamma_3 = \Gamma_1 \star (\Gamma_3 \star \Gamma_2) - (\Gamma_1 \star \Gamma_3) \star \Gamma_2. \quad (2)$$

This is *elementary using* that both sides reduce to the sum over all ways of gluing Γ_2 and Γ_3 simultaneously into Γ_1 at disjoint places. »

(Connes & Kreimer, 2002, 424-425)

Giardino & Patras (à paraître)

- Comparaison avec Carter (2010).
  - ➡ Les graphiques sont :
    - non simplement une heuristique qui permet la formation de concepts
    - le sujet de l'article
    - les objets directement impliqués dans les preuves
  - ➡ Aucune traduction n'est proposée ou suggérée dans un cadre formel
  - ➡ S'agit-il d'icônes ? C'est l'inverse !

Giardino & Patras (à paraître)

- L'argument qui sous-tend la preuve de la validité de la formule (2) est *graphique* :

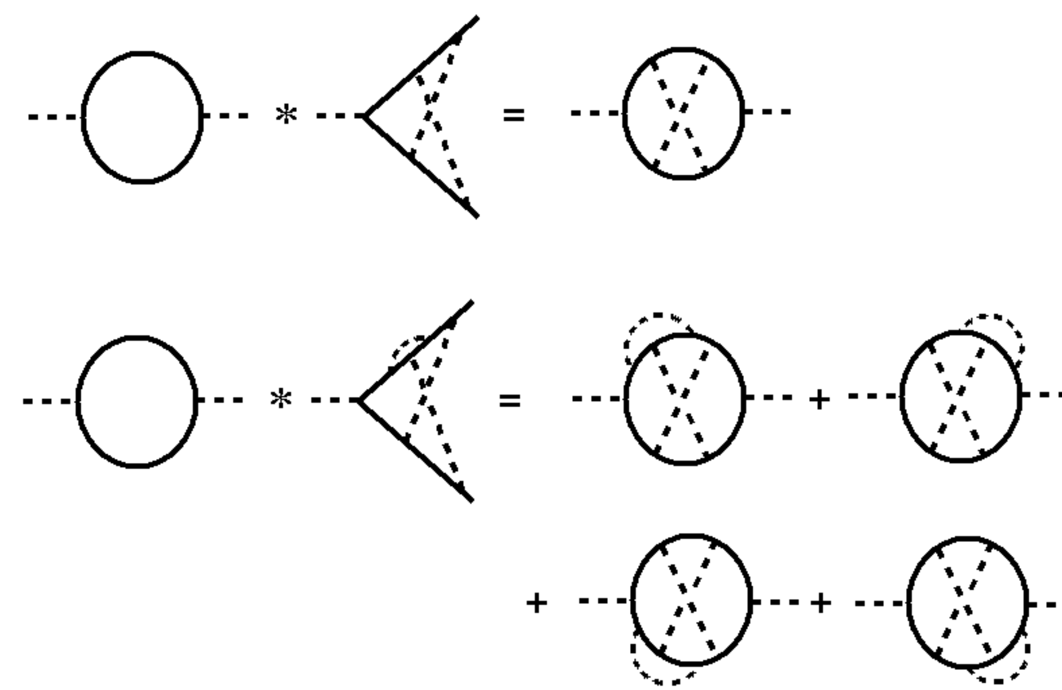
✓ il est obtenu en examinant toutes les insertions possibles impliquées dans les côtés gauche et droit de l'équation

✓ il est basé sur la topologie des diagrammes

✓ aucune couche formelle n'est ajoutée : les objets qui apparaissent dans la preuve sont les graphes eux-mêmes

Toutes les insertions possibles. Mais…

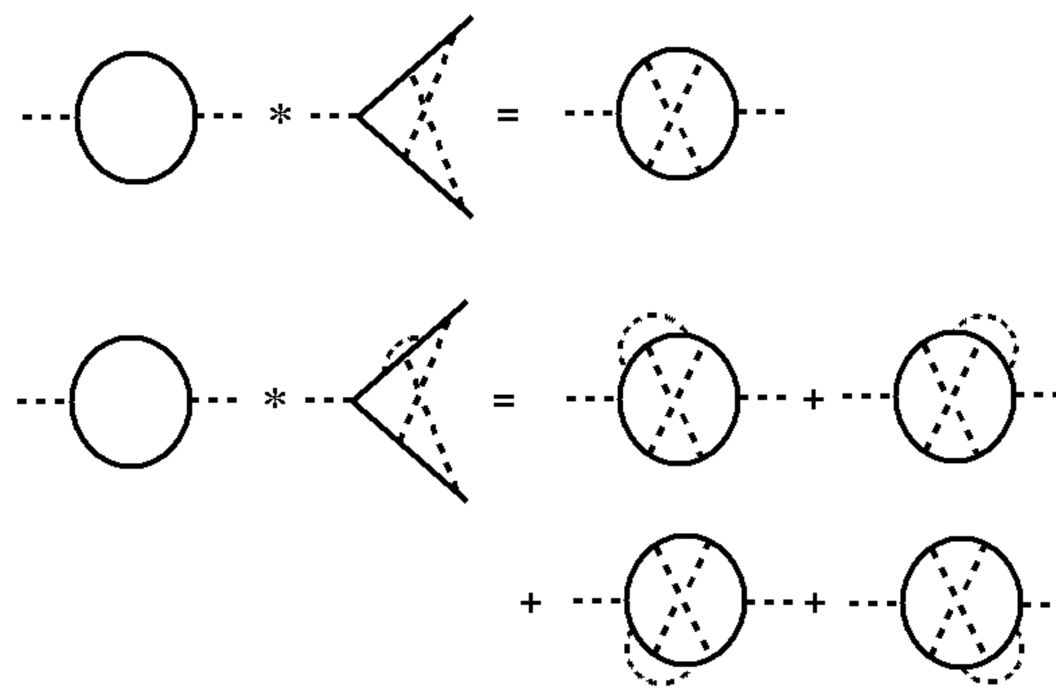
« Summing over all places and bijections defines an operation $\Gamma \star \gamma$ which sums over all ways of inserting γ into Γ. **We impose a normalization such that topologically different graphs are generated with unit multiplicity.** » (Connes & Kreimer, 2002, pp. 424-425)



- Ambiguités
- Une question de *symmetries*

La topologie des diagrammes

- seules les insertions dans Γ_1 à des endroits disjoints doivent être prises en compte
- la notion d'identité topologique est laissée indéterminée, elle doit être *extrapolée* à partir des exemples eux-mêmes
- il n'est pas complètement évident, même intuitivement, que la condition de normalisation associée se distribue correctement lorsque des produits de pré-Lie itérés sont impliqués, comme dans la formule (2)
- « `elementary` » ?????



Pourquoi cette preuve a été acceptée ??

- un « coup » non classique de la part de personnes prestigieuses, qui fait référence à une « boîte à outils » :

  « We give an account of these **actions** here as a further tool in the mathematician’s **toolkit** for a comprehensible description of QFT [p. 411] »

Pourquoi cette preuve a été acceptée ??

- des intuitions visuelles et topologiques et une imagination manipulatoire, mais aussi une « boîte à outils » diagrammatique
- grâce à de cette « boîte à outils », les mathématiciens (et les physiciens) peuvent se référer à l'argumentation graphique **sans entrer dans les détails ni donner d'explications**
- une preuve « classique » (toujours possible) peut prendre plusieurs pages mais surtout elle peut **dissimuler** le véritable cœur de l'argumentation
    - ➡ « Context-dependent criteria » (De Toffoli, 2020)
    - ➡ Cette preuve est « robuste » (Granville, 2023) : le développement d'une syntaxe et une grammaire graphiques appropriées, à l'intérieur des mathématiques sera intéressant principalement dans le but d'*améliorer* la connaissance et la compréhension

« Patterns of thought »

- les inférences qui découlent des diagrammes de Feynman reposent en grande partie sur des « patterns » de pensée qui combinent des caractéristiques géométriques avec des caractéristiques combinatoires, algébriques et symboliques

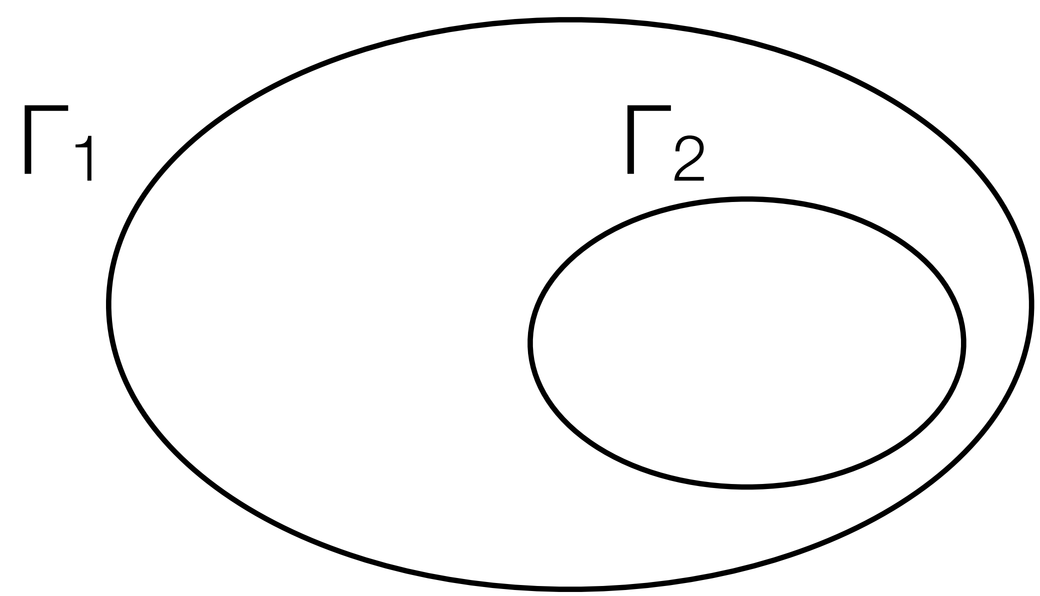
Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
  - La relation structurale (1) peut être représentée dans différentes manières.
  - Un codage pictural rappelant la théorie des ensembles

$$x \star (y \star z) - (x \star y) \star z = x \star (z \star y) - (x \star z) \star y \qquad (1)$$

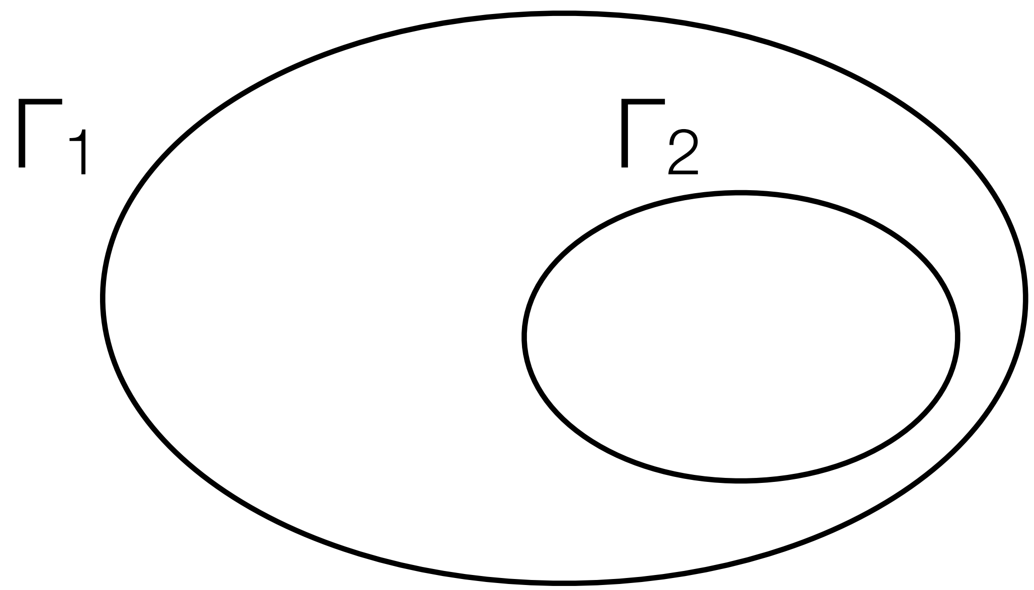
Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
    - L'operation fondamentale pre-Lie $\Gamma_1 * \Gamma_2$ est représentée comme insertion de Γ_2 en Γ_1



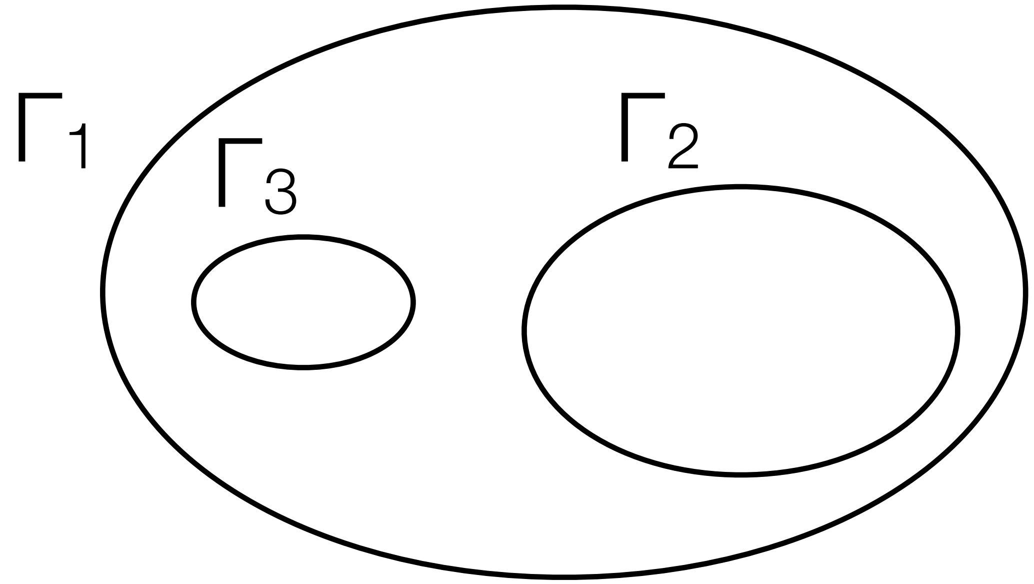
Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
  - Or, l'insertion de Γ_3 en $\Gamma_1 * \Gamma_2$ peut être effectuée de deux manières



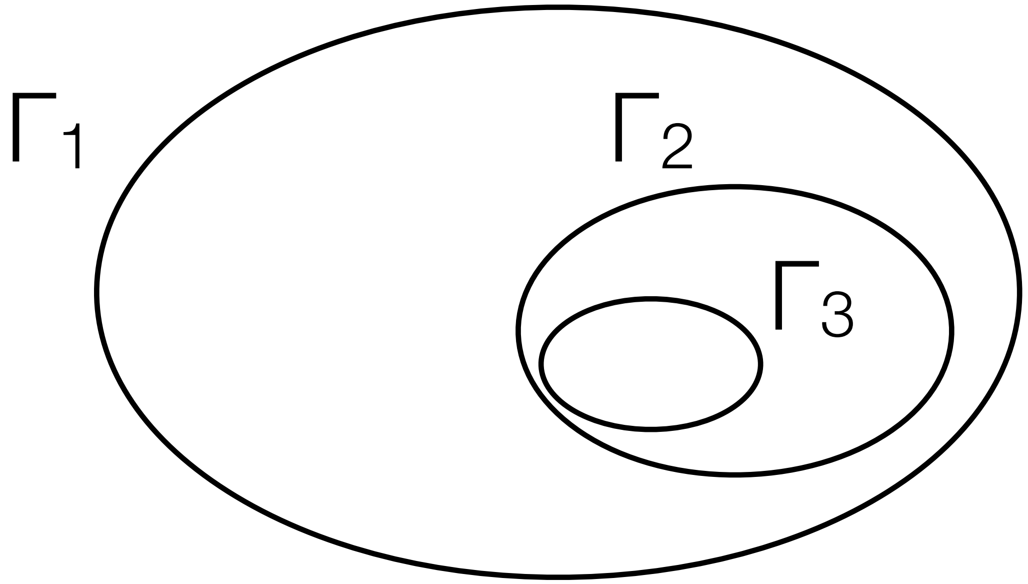
Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
  - dehors de Γ_2



Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
    - ou dans Γ_2:



Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
  - La somme de deux cas: $(\Gamma_1 * \Gamma_2) * \Gamma_3$
  - Le deuxième cas: $\Gamma_1 * (\Gamma_2 * \Gamma_3)$
  - La différence $(\Gamma_1 * \Gamma_2) * \Gamma_3 - \Gamma_1 * (\Gamma_2 * \Gamma_3)$ correspond au première cas
  - Ce processus est symétrique en Γ_2 et Γ_3, d'où l'*identité pre-Lie*

$$(\Gamma_1 * \Gamma_2) * \Gamma_3 - \Gamma_1 * (\Gamma_2 * \Gamma_3) = (\Gamma_1 * \Gamma_3) * \Gamma_2 - \Gamma_1 * (\Gamma_3 * \Gamma_2)$$

Le paradigme pré-Lie

- Cartier, 2010
  - diagrammes permettent de dessiner *simultanément* plusieurs choses
  - il ne s'agit pas ici d'une preuve mais d'une « explication »
  - on « voit » le pattern

Giardino & Patras (à paraître)

- Collaboration entre un mathématicien—Alain Connes—et un physicien théorique—Dirk Kreimer
- Le cas de Connes comme non standard
- En physique ('t Hooft and Veltman,1974), « Diagrammar »:

  « Few physicists object nowadays to the idea that diagrams contain more truth than the underlying formalism [...]. The situation must be reversed: diagrams form the basis from which everything must be derived. »

Giardino & Patras (à paraître)

- Cartier (fin années 90):

  « Les Bourbaki étaient des puritains, et les puritains sont fortement opposés aux représentations picturales des vérités de leur foi. [...] Et il y avait cette idée qu'il y a une opposition entre l'art et la science. L'art est fragile et mortel, parce qu'il en appelle aux émotions, à la signification visuelle, et à des analogies informulées. »

- Atiyah (1984):

  « The Russian tradition in mathematics has been less formalized and structured than the Western tradition, which is under the influence of French mathematics. French mathematics has been dominant and has led to a very formal school. I think it is very unfortunate that most books tend to be written in this overly abstract way and don't try to communicate understanding. »

Giardino & Patras (à paraître)

- la plupart des diagrammes mathématiques ne sont pas utilisés indépendamment d'une culture mathématique particulière
- une argumentation graphique peut être disponible pour que les mathématiciens construisent leur raisonnement
- les mathématiciens qui lisent l'article sont déjà familiarisés avec ces règles implicites schématiques, et s'ils ne le sont pas, ils devraient l'être s'ils veulent comprendre la preuve
- utilisation d'une terminologie spécifique

Le message à retenir pour aujourd’hui

- la pratique des mathématiques, y compris la démonstration, est une activité de trafic dans l’*hétérogénéité* !
- ceci est évident non seulement dans la géométrie euclidienne (texte d'interaction/ diagrammes) mais aussi, et de façon encore plus frappante, dans les mathématiques contemporaines (boite à outils)
- trafic dans l’*interdisciplinarité* : mathématiques et physique (José > l’interaction des pratiques !)

Remerciements

- Scenes de la philosophie de la pratique mathématiques
  - Le richesse des preuves par diagrammes : un long chemin à parcourir
  - Merci à mes amis ET mathématiciens ET philosophes Silvia, Frédéric et Christophe

Merci de votre attention

Valeria Giardino (CNRS - Institut Jean Nicod)
valeria.giardino@ens.psl.eu