

*Mathématiques et Philosophie  
Contemporaine XII*  
Relais des quatre vents, Lac de Saint-Ferréol (31)  
Jun 23 – 27, 2025

# La compréhension en mathématique

---

May 6, 2025  
[valeria.giardino@ens.psl.eu](mailto:valeria.giardino@ens.psl.eu)

# Plan de l'exposé

---

- Partie I
  - Débats récents sur la compréhension en philosophie
- Partie II
  - Compréhension en mathématiques

# Partie I : Débats récents sur la compréhension en philosophie

# « Understanding »

---

- Un sujet de recherche « perdu et retrouvé » dans les discussions contemporaines en épistémolog(y) et en philosophie des sciences
- En épistémolog(y) > compréhension et connaissance (« knowledge »)
- En philosophie des sciences > compréhension et explication (« explanation »)
  - Eléments subjectifs et objectifs

# Epistémologie

---

- Compréhension et connaissance
  - Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing that »)  
Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours
- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ?
  - 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ?
  - 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
- L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

# Epistémologie

---

- Compréhension et connaissance
  - Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing that »)  
Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours
- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
  - 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ?
  - 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
- L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

# Epistémologie

---

- Compréhension et connaissance
  - Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing that »)  
Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours
- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
  - 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ? **L'acte de croire ou de donner son assentiment**
  - 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
    - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

# Epistémologie

---

- Compréhension et connaissance
  - Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing that »)  
Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours
- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
  - 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ? **L'acte de croire ou de donner son assentiment**
  - 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ? **Une quelque forme de justification**
    - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

# Epistémologie

---

- Compréhension et connaissance
- Mais qu'en est-il de la « compréhension » ?

Valeria comprend qu'aujourd'hui c'est son dernier cours
- Avons-nous besoin de quelque chose de « plus » ici ? Si oui, quoi ?
- Il semble que la connaissance soit plus « facile » à obtenir que la compréhension :
  - ✓ Il suffit d'aller voir la réalité
  - ✓ La connaissance en tant qu'élément isolé et atomistique
- Comprendre > « saisir » ou « voir » « *comment les choses se tiennent* »

# Philosophie des sciences

---

- Compréhension et explication
- Carl Hempel: la compréhension est « not adequate for the purpose of science » (1966)
  - l'idée de compréhension qui prévalait à son époque était hautement *subjective* et *psychologique*
  - Henk de Regt (2004, 2009) > il faut distinguer entre entre la compréhension en tant que « sentiment » (la phénoménologie de la compréhension) et en tant qu'état épistémique (la compréhension « authentique »)

# Philosophie des sciences

---

- Compréhension et explication
- La compréhension précède-t-elle l'explication OU suffit-il de connaître une explication correcte pour comprendre ?
  - ➔ Une explication est bonne lorsqu'elle génère la compréhension vs. il suffit de rendre compte de ce que sont une bonne explication et la connaissance

# Quelques idées sur l'« objet » de la compréhension

---

- Que pourrait-on « saisir » ou « voir » lorsqu'il s'agit de comprendre ?
- Perspectives *internalistes*
  - ✓ Connexions ou relations « logico-linguistiques » entre le contenu des croyances ou des attitudes d'une personne
- Perspectives *externalistes*
  - ✓ Relations qui existent dans le monde « indépendantes de l'esprit »

# Quelques idées sur l'« objet » de la compréhension

---

- Que pourrait-on « saisir » ou « voir » lorsqu'il s'agit de comprendre ?
- Perspectives *hybrides* !
  - ✓ La saisie des relations logico-linguistiques « reflète » les relations réelles qui existent dans le monde, et fournit donc un véhicule pour apprécier ces relations (Strevens 2008)
  - ✓ Une distinction intéressante : l'**objet** de la compréhension vs. le **véhicule** de la compréhension, c'est-à-dire « between the thing understood and its representation » (Greco 2014 : 293)

# Artefacts cognitifs

---

- Une « bonne » carte
  - ➔ Un véhicule et pas un objet de la compréhension



# Artefacts cognitifs

---



- La jauge de carburant d'une voiture
  - La jauge n'est pas l'objet de votre croyance mais le moyen par lequel vous formez votre croyance sur la présence du carburant dans votre voiture (voir Dretske 1981)

# Artefacts cognitifs

---



- la carte ou la jauge pourrait devenir un objet de compréhension, mais cela reviendrait à « impliquer une représentation d'une représentation » (Greco 2014 : 293)

# La « psychologie » de la compréhension

---

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »
- *Acquérir ou saisir* un concept (ex. l'amour ou la douleur chronique) (point de vue à la première personne)

# La « psychologie » de la compréhension

---

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »
  - Saisir *mentalement* comment les différents aspects d'un système dépendent les uns des autres, c'est être capable d'*anticiper* comment des changements dans une partie du système entraîneront (ou non) des changements dans une autre partie
- *Et si les choses avaient été différentes ?*
- Apprécier le **fonctionnement** d'une structure (et non pas simplement donner son assentiment à son existence)

# La « psychologie » de la compréhension

---

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »

Marie comprend le système du métro de New York

→ l'objet de la compréhension ici : un type de système ou de structure dont les parties ou les éléments *dépendent* les uns des autres de diverses manières

- ✓ la structure réelle et concrète OU
- ✓ une représentation abstraite du système OU
- ✓ une variété d'objets, à la fois concrets et abstraits.



# Compréhension et savoir-faire (« knowing-how »)

---

- Comprendre et acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
- Les structures sont représentées sous forme de cartes « mobiles » et « non saturées » (Grimm, 2017)
  - ✓ elles peuvent s'adapter et changer au fur et à mesure que les variables représentées par la carte prennent des valeurs différentes
  - ✓ l'esprit qui s'approprie de ces cartes est capable d'anticiper ces changements (cf. Woodward 2003)
  - ✓ artefacts cognitifs en tant qu'« ancrés » conceptuelles

# Compréhension et savoir-faire (« knowing-how »)

---

- Comprendre et acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
- Comprendre, c'est savoir *comment faire des choses épistémiques* (« *how to do epistemic things* »), c'est simplement la connaissance prise au sens *actif* (Chang, 2008)

## Partie II : Compréhension en mathématiques

# Comprendre en mathématiques ?

---

- Plusieurs possibles projets de recherche :
  - ➔ Comprendre en tant que « saisir » ou « voir » « comment les choses se tiennent » (exemple de hier !)
  - ➔ Compréhension et explication > perspectives *internalistes* / *externalise*
  - ➔ Rôle des artefacts cognitifs et en particulier diagrammes et visualisations (objet vs véhicule)
  - ➔ Comprendre en tant que savoir-faire > acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
  - ➔ Pédagogie des mathématiques

# Carter (manuscrit)

---

- « I remember one theorem that I proved, and yet I couldn't see **why** it was true. It worried me for years and years...I kept worrying about it, and five or six years later I understood why it had to be true. **Then I got an entirely different proof...** » (Atiyah 1984, p. 17)
- « Rather, as a more explicit (and leading) form of the question, I prefer : How do mathematicians advance human understanding of mathematics? This question brings to the fore something that is fundamental and pervasive: that what we are doing is finding ways for **people** to understand and think about mathematics. » (Thurston 1994, p. 339, italique dans l'original)

# Carter (manuscrit)

---

- Plusieurs variétés de la compréhension en mathématiques
- Un cadre général pour capturer la différence entre les descriptions différentes
- Cinque éléments : « **Agent**, **mathematics**, **purpose** (or *aim*), **quality** (such as abstraction, unification, visualisation, and structure) and **temporality** »

# D'autres exemples dans la littérature

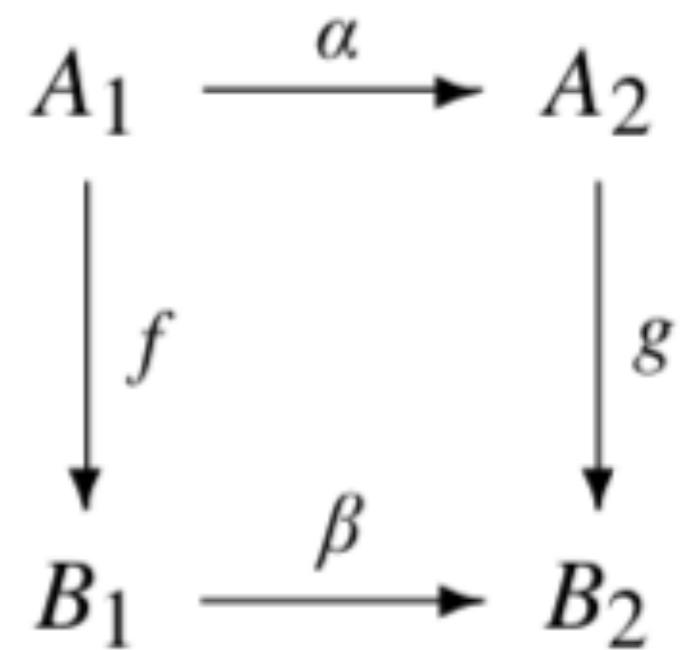
---

- Manders (unpublished)
  - ✓ une reformulation d'une théorie, éventuellement accompagnée du développement de nouveaux *outils*, peut faire progresser la compréhension
- Tappenden (2005)
  - ✓ associe la compréhension à la *fécondité*
- Folina (2018)
  - ✓ une perspective *structuraliste* large couvre une variété de caractéristiques que les mathématiciens passés et contemporains ont tendance à associer with mathematical understanding
- Explication (en) mathématiques (avec ou sans compréhension ??)

# D'autres exemples dans la littérature

---

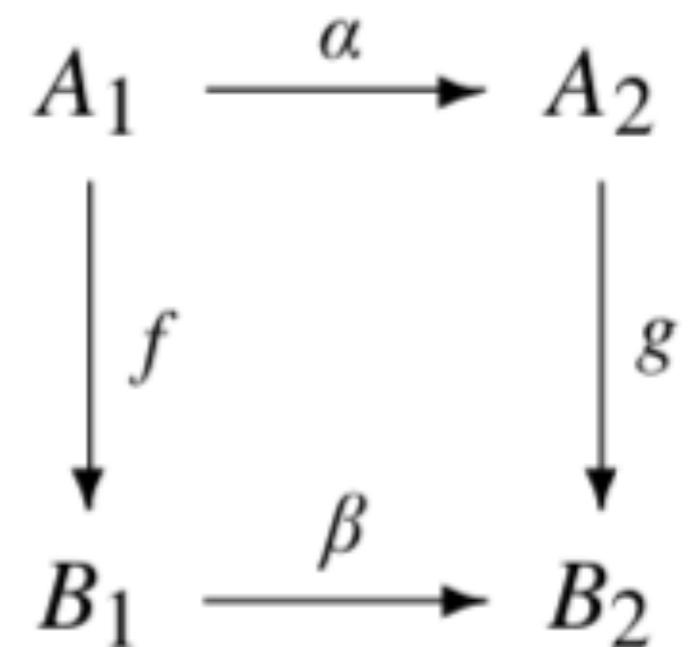
- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is a method for capturing structure, in compressed and manipulable forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation simultaneously and calculate directly through the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)



# D'autres exemples dans la littérature

---

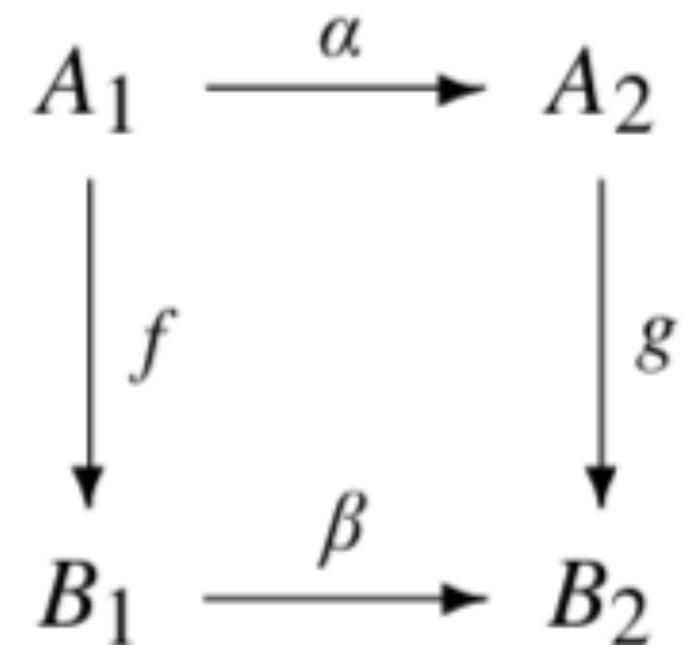
- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is **a method for capturing structure**, in compressed and manipulable forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation **simultaneously** and calculate directly through the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)



# D'autres exemples dans la littérature

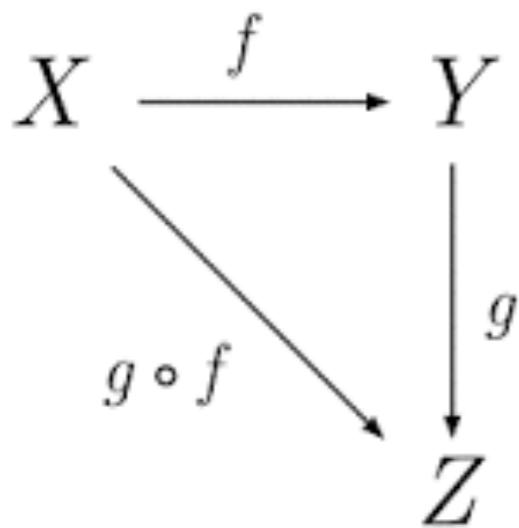
---

- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is **a method for capturing structure**, in compressed and **manipulable** forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation **simultaneously** and **calculate directly through** the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)



# D'autres exemples dans la littérature

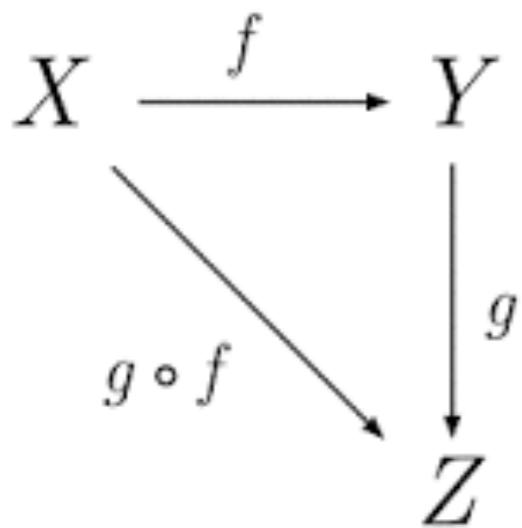
---



- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams do not represent mathematical objects once and for all; rather, they can be *manipulated* and *enriched* for the purpose of unfolding mathematical properties of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

# D'autres exemples dans la littérature

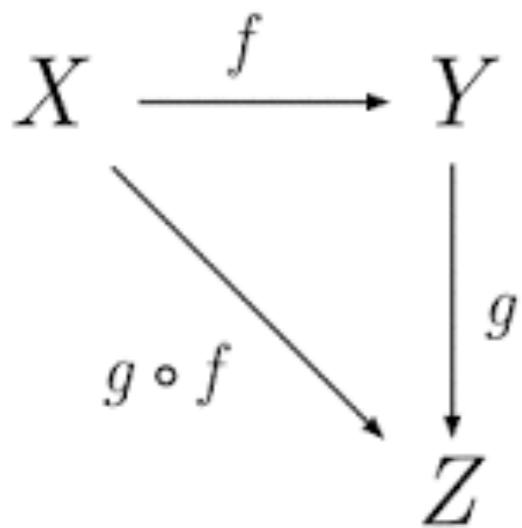
---



- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams **do not represent mathematical objects once and for all**; rather, they can be *manipulated* and *enriched* for the purpose of **unfolding mathematical properties** of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

# D'autres exemples dans la littérature

---



- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams **do not represent mathematical objects once and for all**; rather, they can be **manipulated** and **enriched** for the purpose of **unfolding** mathematical properties of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

# Comprendre une preuve mathématique

---

- Comprendre une preuve revient à reconstruire *rationnellement* son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)

*Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? De même comprendre une définition, est-ce seulement reconnaître qu'on sait déjà le sens de tous les termes employés et constater qu'elle n'implique aucune contradiction ?*



# Comprendre une preuve mathématique

---

- Comprendre une preuve revient à reconstruire *rationnellement* son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)

*Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non, pour le plus grand nombre. Presque tous sont [125] beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais **pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre, plutôt que dans tel autre**. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice, et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris. (Poincaré, 1908, p. 118)*



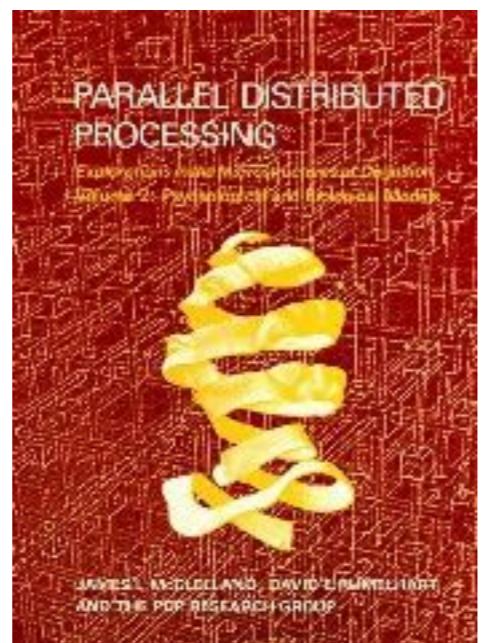
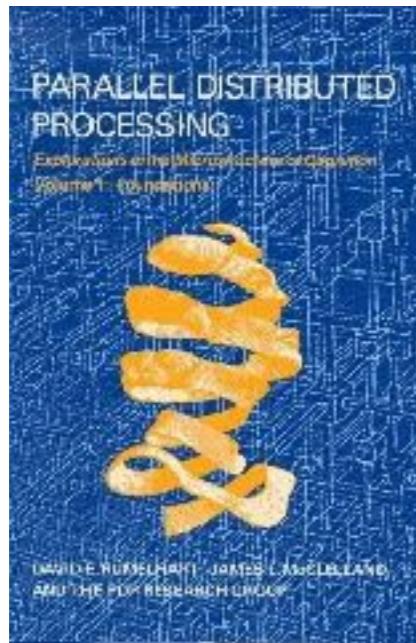
# Comprendre une preuve mathématique

---

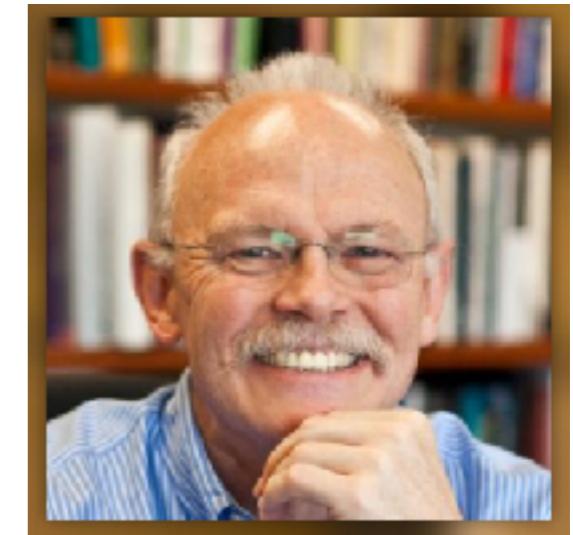
- Comprendre une preuve revient à reconstruire rationnellement son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)
  - Michael Bratman (1987, 2010) > théorie de la « *planning agency* »
    - un plan est un réseau complexe d'*intentions* liées de manière spécifique
- (1) Reconstruire l'arborescence du plan sous-jacent à une preuve mathématique revient à suivre *les intentions de preuve* (« *proving intentions* »)
- (2) Le processus de reconstruction rationnelle s'intéresse aux *décisions pratiques* qui sous-tendent le choix de chacune de ces étapes (décision concernant la ou les action(s) à mener pour atteindre l'*objectif*)

# Capacités cognitives humaines avancées et réseaux neuronaux profonds

---



McClelland (2022)



« Extending these models with visual input systems and effectors that allow them **to perceive and manipulate external depictions** (e.g., diagrams) of idealized mathematical objects may allow these systems to exploit visuospatial intuitions [...]. However, these systems remain challenged when a structured argument must be assembled over a series of intermediate steps. This is where, I argue, explicit **goal-directed thinking** should come in. »

# Capacités cognitives humaines avancées et réseaux neuronaux profonds

---

- Seulement des perroquets (stochastiques) ? > toujours une question de compréhension
- La « goal-directness » et les aspects *collectifs* des mathématiques
  - ➔ deux exemples : comment choisir parmi des énoncés corrects produits au hasard (pas de préférence !)
  - ➔ comment distinguer entre deux preuves différentes du même théorème (pas de style)

# Le message à retenir pour aujourd’hui

---

- D'un cadre descriptif à un cadre normatif pour la compréhension en mathématique
- Pourquoi ne pas apprendre des débats en philosophie des sciences ou même en épistémolog(y) ? (pas le seul cas)
- Philosophie de la pratique mathématique et pédagogie des mathématiques
- Le futur (le présent ?) > le rôle de LLM en mathématiques (et dans les sciences)

Merci de votre attention