

Mathématiques et Philosophie

Contemporaine XII

Relais des quatre vents, Lac de Saint-Ferréol (31)

Jun 23 – 27, 2025

La compréhension en mathématique

May 6, 2025

valeria.giardino@ens.psl.eu

Plan de l'exposé

- Partie I

Débats récents sur la compréhension en philosophie

- Partie II

Compréhension en mathématiques

Partie I : Débats récents sur la compréhension en philosophie

« Understanding »

- Un sujet de recherche « perdu et retrouvé » dans les discussions contemporaines en épistémolog(y) et en philosophie des sciences
- En épistémolog(y) > compréhension et connaissance (« knowledge »)
- En philosophie des sciences > compréhension et explication (« explanation »)
 - ➔ Éléments subjectifs et objectifs

Epistémologie

- Compréhension et connaissance
- Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing *that* »)

Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours

- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ?
- 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ?
- 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
 - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

Epistémologie

- Compréhension et connaissance
- Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing *that* »)

Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours

- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
- 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ?
- 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
 - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

Epistémologie

- Compréhension et connaissance
- Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing *that* »)

Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours

- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
- 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ? **L'acte de croire ou de donner son assentiment**
- 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ?
 - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

Epistémologie

- Compréhension et connaissance
- Philosophie analytique > elle s'est intéressé à la nature de la connaissance, en particulier à la *connaissance propositionnelle* (« knowing *that* »)

Valeria sait que aujourd'hui c'est son dernier cours

- 1) Qu'est-ce que l'objet de la connaissance ? **Une proposition vraie**
- 2) Quelle est la psychologie de la connaissance ? **L'acte de croire ou de donner son assentiment**
- 3) Quelle est la relation normative entre le croyant et la chose crue ? **Une quelque forme de justification**
 - L'analyse de la connaissance comme « croyance vraie justifiée »

Epistémologie

- Compréhension et connaissance
- Mais qu'en est-il de la « compréhension » ?

Valeria comprend qu'aujourd'hui c'est son dernier cours
- Avons-nous besoin de quelque chose de « plus » ici ? Si oui, quoi ?
- Il semble que la connaissance soit plus « facile » à obtenir que la compréhension :
 - ✓ Il suffit d'aller voir la réalité
 - ✓ La connaissance en tant qu'élément isolé et atomistique
- Comprendre > « saisir » ou « voir » « *comment les choses se tiennent* »

Philosophie des sciences

- Compréhension et explication
- Carl Hempel: la compréhension est « not adequate for the purpose of science » (1966)
 - ➔ l'idée de compréhension qui prévalait à son époque était hautement *subjective* et *psychologique*
 - ➔ Henk de Regt (2004, 2009) > il faut distinguer entre la compréhension en tant que « sentiment » (la phénoménologie de la compréhension) et en tant qu'état épistémique (la compréhension « authentique »)

Philosophie des sciences

- Compréhension et explication
- La compréhension précède-t-elle l'explication OU suffit-il de connaître une explication correcte pour comprendre ?
 - ➔ Une explication est bonne lorsqu'elle génère la compréhension vs. il suffit de rendre compte de ce que sont une bonne explication et la connaissance

Quelques idées sur l'« objet » de la compréhension

- Que pourrait-on « saisir » ou « voir » lorsqu'il s'agit de comprendre ?
- Perspectives *internalistes*
 - ✓ Connexions ou relations « logico-linguistiques » entre le contenu des croyances ou des attitudes d'une personne
- Perspectives *externalistes*
 - ✓ Relations qui existent dans le monde « indépendantes de l'esprit »

Quelques idées sur l'« objet » de la compréhension

- Que pourrait-on « saisir » ou « voir » lorsqu'il s'agit de comprendre ?
- Perspectives *hybrides* !
 - ✓ La saisie des relations logico-linguistiques « reflète » les relations *réelles* qui existent dans le monde, et fournit donc un véhicule pour appréhender ces relations (Strevens 2008)
 - ✓ Une distinction intéressante : l'**objet** de la compréhension vs. le **véhicule** de la compréhension, c'est-à-dire « between the thing understood and its representation » (Greco 2014 : 293)

Artefacts cognitifs

- Une « bonne » carte
 - ➔ Un véhicule et pas un objet de la compréhension



Artefacts cognitifs



- La jauge de carburant d'une voiture
 - ➔ La jauge n'est pas l'objet de votre croyance mais le moyen par lequel vous formez votre croyance sur la présence du carburant dans votre voiture (voir Dretske 1981)

Artefacts cognitifs



- ➔ la carte ou la jauge pourrait devenir un objet de compréhension, mais cela reviendrait à « impliquer une représentation d'une représentation » (Greco 2014 : 293)

La « psychologie » de la compréhension

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »
- *Acquérir* ou *saisir* un concept (ex. l'amour ou la douleur chronique) (point de vue à la première personne)

La « psychologie » de la compréhension

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »
- Saisir *mentalement* comment les différents aspects d'un système dépendent les uns des autres, c'est être capable d'*anticiper* comment des changements dans une partie du système entraîneront (ou non) des changements dans une autre partie
- ➔ *Et si* les choses avaient été différentes ?
- Apprécier le **fonctionnement** d'une structure (et non pas simplement donner son assentiment à son existence)

La « psychologie » de la compréhension

- Au-delà du « croire » : « saisir » ou « voir »

Marie comprend le système du métro de New York

➔ l'objet de la compréhension ici : un type de système ou de structure dont les parties ou les éléments *dépendent* les uns des autres de diverses manières

- ✓ la structure réelle et concrète OU
- ✓ une représentation abstraite du système OU
- ✓ une variété d'objets, à la fois concrets et abstraits.



Compréhension et savoir-faire (« knowing-how »)

- Comprendre et acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
- Les structures sont représentées sous forme de cartes « mobiles » et « non saturées » (Grimm, 2017)
 - ✓ elles peuvent s'adapter et changer au fur et à mesure que les variables représentées par la carte prennent des valeurs différentes
 - ✓ l'esprit qui s'approprie de ces cartes est capable d'anticiper ces changements (cf. Woodward 2003)
 - ✓ artefacts cognitifs en tant qu'« ancrés » conceptuelles

Compréhension et savoir-faire (« knowing-how »)

- Comprendre et acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
- Comprendre, c'est *savoir comment faire des choses épistémiques* (« *how to do epistemic things* »), c'est simplement la connaissance prise *au sens actif* (Chang, 2008)

Partie II : Compréhension en mathématiques

Comprendre en mathématiques ?

- Plusieurs possibles projets de recherche :
 - ➔ Comprendre en tant que « saisir » ou « voir » « comment les choses se tiennent » (exemple de hier !)
 - ➔ Compréhension et explication > perspectives *internalistes* / *externalise*
 - ➔ Rôle des artefacts cognitifs et en particulier diagrammes et visualisations (objet vs véhicule)
 - ➔ Comprendre en tant que savoir-faire > acquérir de nouvelles capacités (cognitives)
 - ➔ Pédagogie des mathématiques

Carter (manuscrit)

- « I remember one theorem that I proved, and yet I couldn't see **why** it was true. It worried me for years and years...I kept worrying about it, and five or six years later I understood why it had to be true. **Then I got an entirely different proof...** » (Atiyah 1984, p. 17)
- « Rather, as a more explicit (and leading) form of the question, I prefer : How do mathematicians advance human understanding of mathematics? This question brings to the fore something that is fundamental and pervasive: that what we are doing is finding ways for **people** to understand and think about mathematics. » (Thurston 1994, p. 339, italique dans l'original)

Carter (manuscrit)

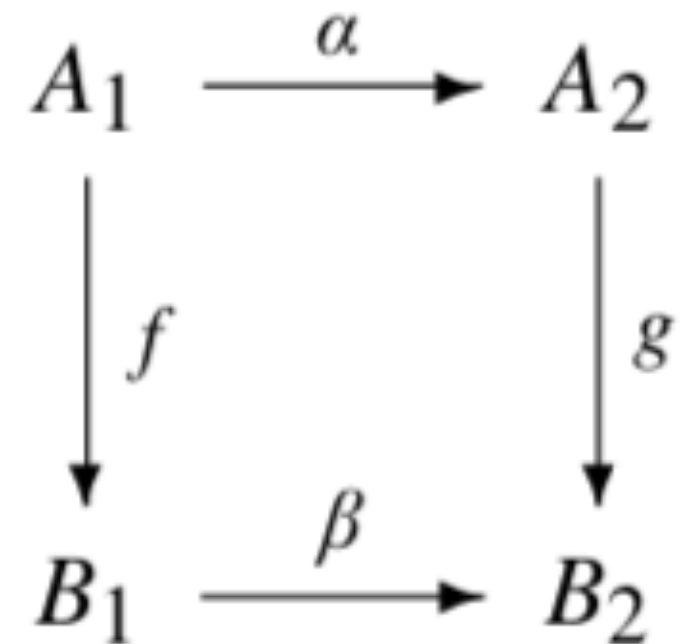
- Plusieurs variétés de la compréhension en mathématiques
- Un cadre général pour capturer la différence entre les descriptions différentes
- Cinq éléments : « **Agent**, **mathematics**, **purpose** (or *aim*), **quality** (such as abstraction, unification, visualisation, and structure) and **temporality** »

D'autres exemples dans la littérature

- Manders (unpublished)
 - ✓ une reformulation d'une théorie, éventuellement accompagnée du développement de nouveaux *outils*, peut faire progresser la compréhension
 - Tappenden (2005)
 - ✓ associe la compréhension à la *fécondité*
 - Folina (2018)
 - ✓ une perspective *structuraliste* large couvre une variété de caractéristiques que les mathématiciens passés et contemporains ont tendance à associer with mathematical understanding
- ➔ Explication (en) mathématiques (avec ou sans compréhension ??)

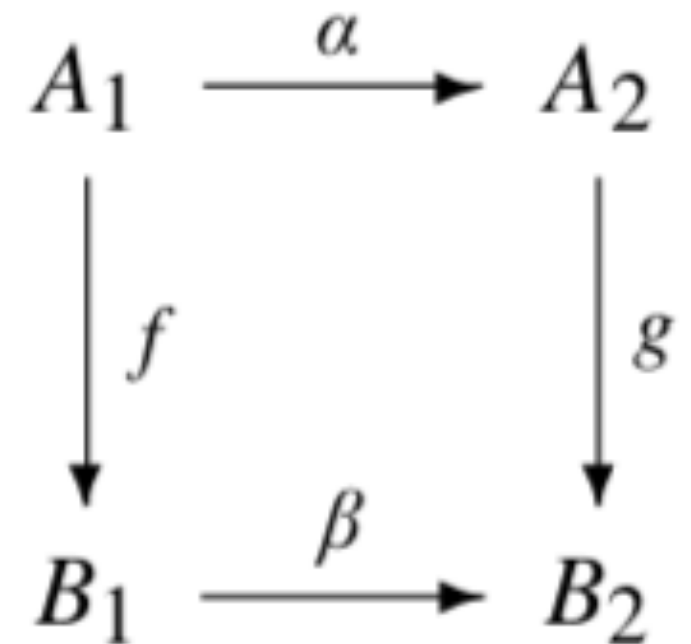
D'autres exemples dans la littérature

- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is a method for capturing structure, in compressed and manipulable forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation simultaneously and calculate directly through the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)



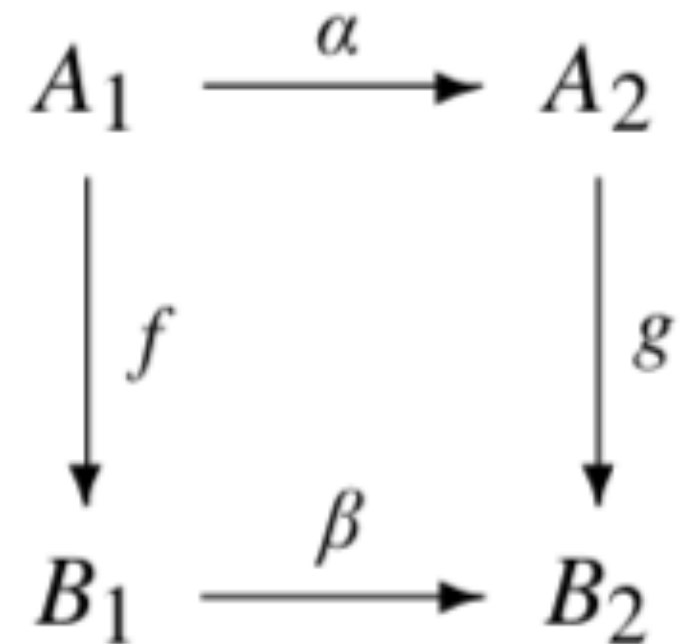
D'autres exemples dans la littérature

- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is **a method for capturing structure**, in compressed and manipulable forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation **simultaneously** and calculate directly through the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)

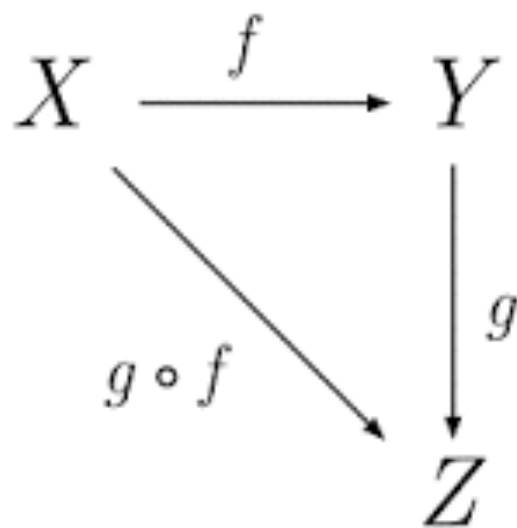


D'autres exemples dans la littérature

- « all this pure syntax is not just bookkeeping. It is **a method for capturing structure**, in compressed and **manipulable** forms. » (Weber, 2013)
- « the point is not only that a diagram makes us save space. The important aspect is that with diagrams we can access to the whole situation **simultaneously** and **calculate directly through** the representations.[...] The record of the same information via equations may obscure the overall situation. » (De Toffoli 2017)

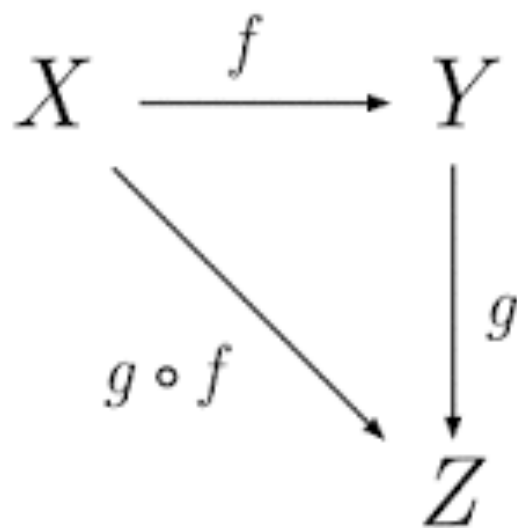


D'autres exemples dans la littérature



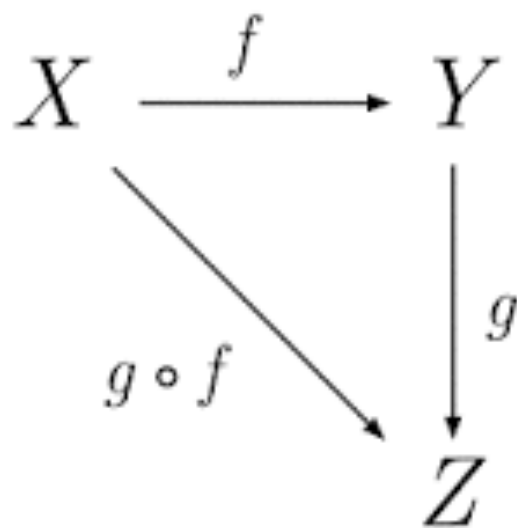
- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams do not represent mathematical objects once and for all; rather, they can be *manipulated* and *enriched* for the purpose of unfolding mathematical properties of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

D'autres exemples dans la littérature



- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams **do not represent mathematical objects once and for all**; rather, they can be *manipulated* and *enriched* for the purpose of **unfolding mathematical properties** of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

D'autres exemples dans la littérature



- « evolving diagrams » (Halimi 2012)
- « many mathematical diagrams do not represent mathematical objects once and for all; rather, they can be **manipulated** and **enriched** for the purpose of unfolding mathematical properties of the respective objects which they represent. » (Halimi 2012)

Comprendre une preuve mathématique

- Comprendre une preuve revient à reconstruire *rationnellement* son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)

Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? De même comprendre une définition, est-ce seulement reconnaître qu'on sait déjà le sens de tous les termes employés et constater qu'elle n'implique aucune contradiction ?



Comprendre une preuve mathématique

- Comprendre une preuve revient à reconstruire *rationnellement* son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)

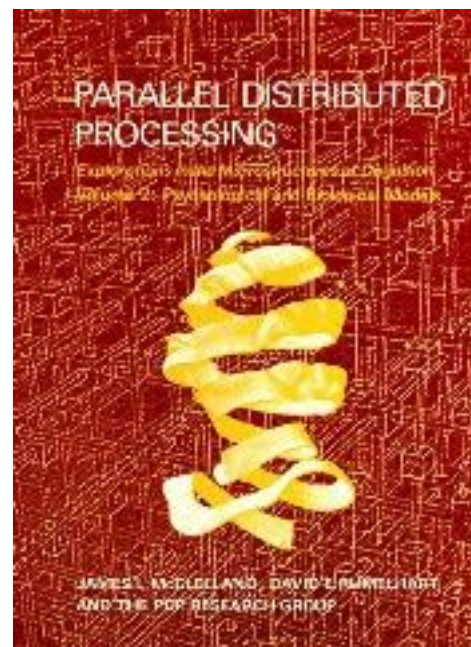
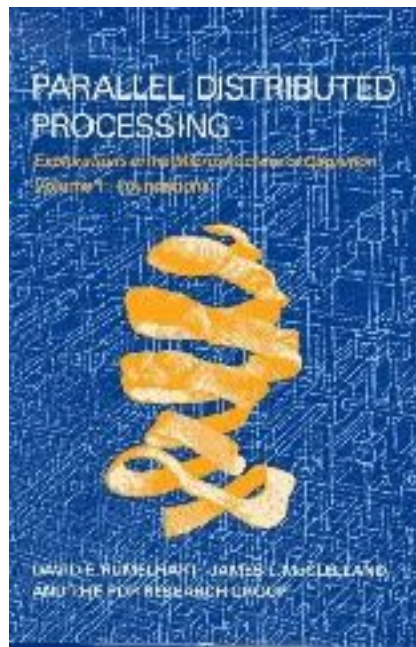
*Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non, pour le plus grand nombre. Presque tous sont [125] beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais **pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre, plutôt que dans tel autre**. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice, et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris.* (Poincaré, 1908, p. 118)



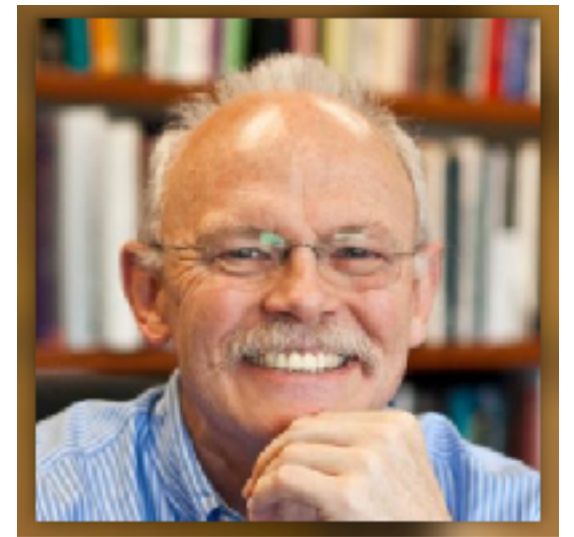
Comprendre une preuve mathématique

- Comprendre une preuve revient à reconstruire rationnellement son plan sous-jacent (Hamami et Morris, 2024)
- Michael Bratman (1987, 2010) > théorie de la « *planning agency* »
 - ➔ un plan est un réseau complexe d'*intentions* liées de manière spécifique
- (1) Reconstruire l'arborescence du plan sous-jacent à une preuve mathématique revient à suivre *les intentions de preuve* (« proving intentions »)
- (2) Le processus de reconstruction rationnelle s'intéresse aux *décisions pratiques* qui sous-tendent le choix de chacune de ces étapes (décision concernant la ou les action(s) à mener pour atteindre l'*objectif*)

Capacités cognitives humaines avancées et réseaux neuronaux profonds



McClelland (2022)



« Extending these models with visual input systems and effectors that allow them **to perceive and manipulate external depictions** (e.g., diagrams) of idealized mathematical objects may allow these systems to exploit visuospatial intuitions [...]. However, these systems remain challenged when a structured argument must be assembled over a series of intermediate steps. This is where, I argue, explicit **goal-directed thinking** should come in. »

Capacités cognitives humaines avancées et réseaux neuronaux profonds

- Seulement des perroquets (stochastiques) ? > toujours une question de compréhension
- La « goal-directness » et les aspects *collectifs* des mathématiques
 - ➡ deux exemples : comment choisir parmi des énoncés corrects produits au hasard (pas de préférence !)
 - ➡ comment distinguer entre deux preuves différentes du même théorème (pas de style)

Le message à retenir pour aujourd'hui

- D'un cadre descriptif à un cadre normatif pour la compréhension en mathématique
- Pourquoi ne pas apprendre des débats en philosophie des sciences ou même en épistémolog(y) ? (pas le seul cas)
- Philosophie de la pratique mathématique et pédagogie des mathématiques
- Le futur (le présent ?) > le rôle de LLM en mathématiques (et dans les sciences)

Merci de votre attention