Sur l'algèbre catégorique et homotopique

Clemens Berger

Mathématiques et Philosophie Contemporaines XII,
Lac de St. Ferréol, 23-27 juin 2025.

$$\mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha - \pi\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$$

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$

Définition (cardinalité)

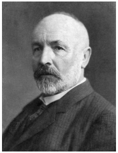
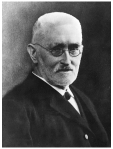
X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une bijection $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité.

Corollaire (dénombrable & non-dénombrable)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Georg Cantor 1845-1918 Richard Dedekind 1831-1916

"... Cardinalzahl einer Menge M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird ... Da aus jedem Element m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine Eins wird, so ist die Cardinalzahl selbst eine *aus lauter Einsen bestehende Menge*, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge in unserem Geiste Existenz hat."

Cantor, Beiträge sur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, 1895.

"... Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt es *endlich*."

Dedekind, Was sind und was sollen Zahlen ? Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1887.

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC
\end{tikzcd}
$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A,B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A,A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C) : (f,g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

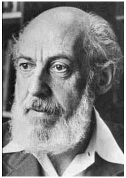
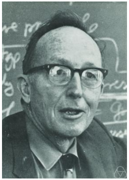
Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Samuel Eilenberg 1913-1998 Saunders Mac Lane 1909-2005

"In a metamathematical sense our theory provides concepts applicable to all branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides opportunities for the comparison of constructions and of isomorphisms occurring in different branches of mathematics; *in this way it may occasionally suggest new results by analogy.*"

"This may be considered as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings."

"... it should be observed first that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one; our basic concepts are essentially those of a functor and a natural transformation."

Eilenberg-Mac Lane, General theory of natural equivalences 1945.

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X$ tq. $f \circ h = f \circ k$, on a $h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y'$ tq. $h \circ f = k \circ f$, on a $h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top_{sep} ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres
- propriétés universelles (par ex. produit/coproduit catégoriels)

Nicolas Bourbaki 1935-1968

H. Cartan, R. de Possel, J. A. Dieudonné, A. Weil, L. Olivier; T. Mirles, C. Chevalley, S. Mandelbrojt.
"En résumé, nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leur propres erreurs et d'en voir leur propre science enrichie, non appauvrie; cela leur donne le droit d'envisager leur avenir avec sérénité."
Bourbaki, Introduction à la Théorie des Ensembles (édition 1970).

"Mon identfication à ce milieu a été très forte ... c'était le premier groupe, au-delà du groupe familial, où j'ai été accueilli avec chaleur, et accepté comme un des leurs. Autre lien, d'une autre nature : ma propre approche des mathématiques trouvait confirmation dans celle du groupe, et dans celle des membres de mon nouveau milieu. Elle n'était pas identique à l'approche "bourbachique", mais il était clair que les deux étaient frères."

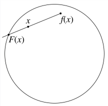
Grothendieck, Récoltes et Semailles 1981, pg. 161.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue du disque dans lui-même a un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D \to D$ sans point fixe existait, alors le disque D se rétracterait via F sur son bord S^1, ce qui est impossible. $\square$



Définition (Poincaré 1895)

Le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

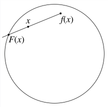
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i = 1_{S^1}"'] & D \arrow[r, "F"] & S^1 \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1(-)}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F\circ i) = \pi_1(F)\circ\pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue du disque dans lui-même a un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D \to D$ sans point fixe existait, alors le disque D se rétracterait via F sur son bord S^1, ce qui est impossible. $\square$



Définition (Poincaré 1895)

Le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

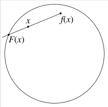
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F \circ i = 1_{S^1}"'] & D \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F \circ i) = \pi_1(F) \circ \pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue du disque dans lui-même a un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D \to D$ sans point fixe existait, alors le disque D se rétracterait via F sur son bord S^1, ce qui est impossible.



$\square$

Définition (Poincaré 1895)

Le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

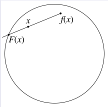
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F \circ i = 1_{S^1}"'] & D \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F \circ i) = \pi_1(F) \circ \pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue du disque dans lui-même a un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D \to D$ sans point fixe existait, alors le disque D se rétracterait via F sur son bord S^1, ce qui est impossible. $\square$



Définition (Poincaré 1895)

Le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

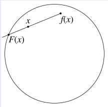
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F \circ i = 1_{S^1}"'] & D \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F \circ i) = \pi_1(F) \circ \pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue du disque dans lui-même a un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D \to D$ sans point fixe existait, alors le disque D se rétracterait via F sur son bord S^1, ce qui est impossible.



$\square$

Définition (Poincaré 1895)

Le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i=1_{S^1}"'] & D \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}}=\pi_1(F\circ i)=\pi_1(F)\circ\pi_1(i)=0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Définition (Hausdorff 1914)

Un *espace topologique* (X, τ_X) est un ensemble X muni d'une famille τ_X de parties de X dites les *"ouverts"* de X de sorte qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Un espace topologique est *séparé* si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Remarque (adhérence $\bar{A}$)

Le complémentaire d'un ouvert s'appelle un *fermé*.
Toute partie A de X est contenue dans un plus petit fermé $\bar{A}$.

Définition

Une application $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est dite *continue* si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ouvert V de Y est un ouvert de X.

Définition (Hausdorff 1914)

Un *espace topologique* (X, τ_X) est un ensemble X muni d'une famille τ_X de parties de X dites les *"ouverts"* de X de sorte qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Un espace topologique est *séparé* si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Remarque (adhérence $\bar{A}$)

Le complémentaire d'un ouvert s'appelle un *fermé*.
Toute partie A de X est contenue dans un plus petit fermé $\bar{A}$.

Définition

Une application $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est dite *continue* si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ouvert V de Y est un ouvert de X.

Définition (Hausdorff 1914)

Un *espace topologique* (X, τ_X) est un ensemble X muni d'une famille τ_X de parties de X dites les *"ouverts"* de X de sorte qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Un espace topologique est *séparé* si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Remarque (adhérence $\bar{A}$)

Le complémentaire d'un ouvert s'appelle un *fermé*.
Toute partie A de X est contenue dans un plus petit fermé $\bar{A}$.

Définition

Une application $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est dite *continue* si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ouvert V de Y est un ouvert de X.

Définition (Hausdorff 1914)

Un *espace topologique* (X, τ_X) est un ensemble X muni d'une famille τ_X de parties de X dites les *"ouverts"* de X de sorte qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Un espace topologique est *séparé* si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Remarque (adhérence $\bar{A}$)

Le complémentaire d'un ouvert s'appelle un *fermé*.
Toute partie A de X est contenue dans un plus petit fermé $\bar{A}$.

Définition

Une application $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est dite *continue* si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ouvert V de Y est un ouvert de X.

H. Poincaré	F. Hausdorff	L. Brouwer
1854-1912	1868-1942	1881-1966

"La logique, qui peut seule donner la certitude, est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention." Poincaré, La valeur de la science 1905.
"Les faits mathématiques ne sont ni des faits d'observation ni des faits expérimentaux ; ce sont des faits du sens intérieur, des faits de l'intuition." Poincaré, La valeur de la science 1905.
"La croyance à la continuité, croyance qu'il serait difficile de justifier par un raisonnement apodictique, mais sans laquelle toute science serait impossible." Poincaré, La science et l'hypothèse 1908.

"In der mathematischen Konstruktion ist der Geist souverän; er wählt aus dem unendlichen Chaos seiner Vorstellung das Form-element heraus ... Gedanken entstehen nicht aus dem Nichts, sondern ergreifen die in uns lauernden Machtlinien, die das Chaos strukturieren." Hausdorff, Sant'Ilario 1897.
"Von der Welt selbst ... wissen wir nichts und wir können nichts wissen. Wir müssen die Welt selbst als unbestimmt und unerkennbare annehmen, als reines Chaos. Die Welt unseres Erlebens ist das Ergebnis der Auslese durch unser Verstehen." Hausdorff, Das Chaos in kosmischer Auslese 1898.

"Si on veut remonter à l'origine de l'intuition qu'on a des nombres il faut revenir à l'intuition qu'on a du temps."

Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde 1907.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_1 \Rightarrow F_2$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_1(A) \to F_2(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes* : $F_1 \cong F_2$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_1 \Rightarrow F_2$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_1(A) \to F_2(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes* : $F_1 \cong F_2$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_1 \Rightarrow F_2$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_1(A) \to F_2(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes* : $F_1 \cong F_2$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_1 \Rightarrow F_2$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_1(A) \to F_2(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes* : $F_1 \cong F_2$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\mathcal{C} \underset{F_2}{\overset{F_1}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_1 \Rightarrow F_2$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_1(A) \to F_2(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes* : $F_1 \cong F_2$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong id_{\mathcal{D}}$.

Définition (Kan 1958)

Les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont *adjoints* si pour tous objets A de $\mathcal{C}$ et B de $\mathcal{D}$ il existe une bijection *naturelle* en A et B:

$$\mathcal{D}(F(A), B) \cong \mathcal{C}(A, G(B)).$$

Proposition

Il y a adjonction $F \dashv G$ si et seulement s'il existe

1. $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ (l'unité de l'adjonction)
2. $\epsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ (la co-ünité de l'adjonction)

telles que $(\epsilon F) \circ (F\eta) = 1_F$ et $(G\epsilon) \circ (\eta G) = 1_G$.

Remarque

F et G se déterminent mutuellement *à isomorphisme unique près*.

Définition (Kan 1958)

Les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont *adjoints* si pour tous objets A de $\mathcal{C}$ et B de $\mathcal{D}$ il existe une bijection *naturelle* en A et B:

$$\mathcal{D}(F(A), B) \cong \mathcal{C}(A, G(B)).$$

Proposition

Il y a adjonction $F \dashv G$ si et seulement s'il existe

1. $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ (l'unité de l'adjonction)
2. $\epsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ (la co-ünité de l'adjonction)

telles que $(\epsilon F) \circ (F\eta) = 1_F$ et $(G\epsilon) \circ (\eta G) = 1_G$.

Remarque

F et G se déterminent mutuellement *à isomorphisme unique près*.

Définition (Kan 1958)

Les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont *adjoints* si pour tous objets A de $\mathcal{C}$ et B de $\mathcal{D}$ il existe une bijection *naturelle* en A et B:

$$\mathcal{D}(F(A), B) \cong \mathcal{C}(A, G(B)).$$

Proposition

Il y a adjonction $F \dashv G$ si et seulement s'il existe

1. $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ (l'unité de l'adjonction)
2. $\epsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ (la co-ünité de l'adjonction)

telles que $(\epsilon F) \circ (F\eta) = 1_F$ et $(G\epsilon) \circ (\eta G) = 1_G$.

Remarque

F et G se déterminent mutuellement *à isomorphisme unique près.*

Définition (Kan 1958)

Les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont *adjoints* si pour tous objets A de $\mathcal{C}$ et B de $\mathcal{D}$ il existe une bijection *naturelle* en A et B:

$$\mathcal{D}(F(A), B) \cong \mathcal{C}(A, G(B)).$$

Proposition

Il y a adjonction $F \dashv G$ si et seulement s'il existe

1. $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ (l'unité de l'adjonction)
2. $\epsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ (la co-ünité de l'adjonction)

telles que $(\epsilon F) \circ (F\eta) = 1_F$ et $(G\epsilon) \circ (\eta G) = 1_G$.

Remarque

F et G se déterminent mutuellement *à isomorphisme unique près*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Exemples (foncteurs-oubli admettant des adjoints)

1. $Gr \to Ens$ admet adjoint à gauche
2. $Top \to Ens$ admet adjoint à gauche et adjoint à droite

Exemple (produits/coproduits dans une catégorie $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C}$ admet des produits/coproduits si et seulement si la diagonale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^2 : C \mapsto (C, C)$ admet un adjoint à droite/adjoint à gauche

1. les couples $(C, C) \to (A, B)$ sont en bijection avec $C \to A \times B$
2. les couples $(A, B) \to (C, C)$ sont en bijection avec $A \sqcup B \to C$

Proposition (Asymétrie fondamentale de la théorie des catégories)

Les foncteurs adjoints à droite *préservent* les *limites*.
Les foncteurs adjoints à gauche *préservent* les *colimites*.

Proposition

Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une *T-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.
Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.
Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Proposition

Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une *T-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.

Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.

Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Proposition

Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une *T-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.
Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.
Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Proposition

Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une T*-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.
Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.
Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Proposition

Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une *T-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.
Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.
Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Proposition

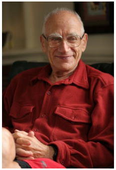
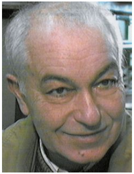
Toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ induit une *monade* $(GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \mu : GFGF \Rightarrow GF)$ sur $\mathcal{C}$.

Définition

Une *monade* (T, μ, η) sur $\mathcal{C}$ est un *monoïde* dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Une *T-algèbre* est un objet X de $\mathcal{C}$ muni d'une action $\xi : TX \to X$ compatible avec μ et η.
Les T-algèbres (X, ξ) forment une catégorie $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$.
Un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est *monadique* s'il admet un adjoint à gauche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induisant une *équivalence* $\mathrm{Alg}_{GF}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D}$.

Remarque (Les structures algébriques classiques ...)

sont monadiques au-dessus de la catégorie des ensembles.

Daniel Kan 1927-2013 Jean Bénabou 1932-2022

"If it rattles it is not quite right." Daniel Kan.

"Parfois, on a l'intuition qu'il doit exister un lien entre 'très' et 'presque'. Nous montrerons qu'ils sont adjoints. Nous nous concentrerons d'abord sur 'très', en décrivant qualitativement quelques-unes des propriétés importantes qu'il revêt dans le langage courant, et montrerons que toute tentative de modéliser ces propriétés dans un contexte de théorie des ensembles ... sera trop grossière pour les capturer fidèlement. Mais les toposes élémentaires suffiront." Bénabou 2015.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. *Ens* est cartésiennement close, car $C^B = \mathit{Ens}(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to \mathit{Ens}(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. *Ens* est cartésiennement close, car $C^B = Ens(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to Ens(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. Ens est cartésiennement close, car $C^B = Ens(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to Ens(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. *Ens* est cartésiennement close, car $C^B = \mathit{Ens}(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to \mathit{Ens}(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. *Ens* est cartésiennement close, car $C^B = Ens(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to Ens(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (catégorie cartésiennement close)

$\mathcal{C}$ est *cartésiennement close* si, pour tout objet B, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $(-)^B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Exemple (catégorie des ensembles - classifiant des sous-objets)

1. *Ens* est cartésiennement close, car $C^B = Ens(B, C)$ a les propriétés requises: une application $f : A \times B \to C$ équivaut à une application $\tilde{f} : A \to Ens(B, C) : a \mapsto \tilde{f}(a)(b) = f(a, b)$.
2. Les parties X de A sont en bijection avec les fonctions indicatrices $\phi_X : A \to \{0, 1\}$ définies par $\phi_X(a) = 1$ ssi $a \in X$. On dit que $\Omega = \{0, 1\}$ est un *classifiant des sous-objets*.
3. tout ensemble est un *coproduit* de singletons. On dit que le singleton est un *générateur* de la catégorie des ensembles.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Définition (Lawvere 1969)

Un *topos élémentaire* est une catégorie cartésiennement close avec limites finies et classifiant des sous-objets.

Théorème (Giraud 1968)

Un topos élémentaire avec colimites et système de générateurs est équivalent à une catégorie de faisceaux sur un site de Grothendieck.

Exemple (Faisceaux sur le site des ouverts d'un espace topologique)

- Soit Ouv_X l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X. C'est un *site de Grothendieck*. Un faisceau sur X est un foncteur $F : \mathrm{Ouv}_X^{\mathrm{op}} \to \mathit{Ens}$ "avec recollement".
- Les faisceaux ensemblistes sur X forment un *topos* $\mathrm{Sh}(X)$.
- Toute fonction continue $X \to Y$ induit une *adjonction* $\mathrm{Sh}(X) \rightleftarrows \mathrm{Sh}(Y)$ tel que l'adjoint à gauche est *exact à gauche*.

Remarque

Un topos de Grothendieck possède plusieurs représentations en tant que topos de faisceaux sur un site.

Théorème

Le foncteur $\mathrm{Top}_{sobre} \to \mathrm{Topos} : X \mapsto \mathrm{Sh}(X)$ est une inclusion de catégories *pleinement fidèle*.

Définition (Les *points* d'un topos $\mathcal{E}$ sont ...)

les adjonctions géométriques $\mathrm{Ens} \rightleftarrows \mathcal{E}$ où $\mathrm{Ens} = \mathrm{Sh}(*)$.

Remarque

Il existe des topos *sans points*. Il existe des topos ayant des points avec un *groupe de symétries* non-trivial.

Remarque

Un topos de Grothendieck possède plusieurs représentations en tant que topos de faisceaux sur un site.

Théorème

Le foncteur $\mathrm{Top}_{sobre} \to \mathrm{Topos} : X \mapsto \mathrm{Sh}(X)$ est une inclusion de catégories *pleinement fidèle*.

Définition (Les *points* d'un topos $\mathcal{E}$ sont ...)

les adjonctions géométriques $\mathrm{Ens} \rightleftarrows \mathcal{E}$ où $\mathrm{Ens} = \mathrm{Sh}(*)$.

Remarque

Il existe des topos *sans points*. Il existe des topos ayant des points avec un *groupe de symétries* non-trivial.

Remarque

Un topos de Grothendieck possède plusieurs représentations en tant que topos de faisceaux sur un site.

Théorème

Le foncteur $\mathrm{Top}_{sobre} \to \mathrm{Topos} : X \mapsto \mathrm{Sh}(X)$ est une inclusion de catégories *pleinement fidèle*.

Définition (Les *points* d'un topos $\mathcal{E}$ sont ...)

les adjonctions géométriques $\mathrm{Ens} \rightleftarrows \mathcal{E}$ où $\mathrm{Ens} = \mathrm{Sh}(*)$.

Remarque

Il existe des topos *sans points*. Il existe des topos ayant des points avec un *groupe de symétries* non-trivial.

Remarque

Un topos de Grothendieck possède plusieurs représentations en tant que topos de faisceaux sur un site.

Théorème

Le foncteur $\mathrm{Top}_{sobre} \to \mathrm{Topos} : X \mapsto \mathrm{Sh}(X)$ est une inclusion de catégories *pleinement fidèle*.

Définition (Les *points* d'un topos $\mathcal{E}$ sont ...)

les adjonctions géométriques $\mathrm{Ens} \rightleftarrows \mathcal{E}$ où $\mathrm{Ens} = \mathrm{Sh}(*)$.

Remarque

Il existe des topos *sans points*. Il existe des topos ayant des points avec un *groupe de symétries* non-trivial.

A. Grothendieck 1928-2014 W. Lawvere 1937-2023

"... cette idée de topos englobe, dans une idée topoloqique commune, aussi bien les traditionnels espaces incarnant le monde de la grandeur continue, ainsi que les (soi-disant) 'espaces' (ou 'variétés') des géomètres algébristes, ainsi que d'innombrables d'autres structures qui jusque là avaient semblé rivées irrémédiablement au monde arithmétique des agrégats 'discontinus' ou 'discrets'. Grothendieck, Récoltes et Semailles 1981, pg. 54.

"Avec le dédain qui a frappé la notion de topos même et tout le 'non-sens catégorique', il n'est pas étonnant que

Giraud ait eu une désaffectation totale pour ce qui avait été son premier grand thème de travail." Grothendieck,

Récoltes et Semailles 1981, pg. 391-2.

"... Thus we seem to have partially demonstrated that even in foundations, not substance but invariant form is the carrier of the relevant mathematical information."

Lawvere, ETCS = An elementary theory of the category of sets, 1964.

Définition (Hurewicz 1941, Serre 1951)

Une fonction continue $f : Y \to X$ d'espaces topologiques est une fibration de Hurewicz (resp. fibration de Serre) si pour tout triangle (resp. les triangles avec Z une n-boule, $n \geq 0$)

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "g"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sim"] & X \end{tikzcd}$$

l'homotopie $H_t : Z \times [0,1] \to X : f \circ k \sim g$ se relève à Y.

Remarque (les fibres $f^{-1}(x) \subset Y$ d'une fibration $f : Y \to X$)

ne changent pas de type d'homotopie si $x \in X$ reste dans la même composante connexe par arcs de X.

Définition (Hurewicz 1941, Serre 1951)

Une fonction continue $f : Y \to X$ d'espaces topologiques est une fibration de Hurewicz (resp. fibration de Serre) si pour tout triangle (resp. les triangles avec Z une n-boule, $n \geq 0$)

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "g"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\sim"] & X \end{tikzcd}$$

l'homotopie $H_t : Z \times [0,1] \to X : f \circ k \sim g$ se relève à Y.

Remarque (les fibres $f^{-1}(x) \subset Y$ d'une fibration $f : Y \to X$)

ne changent pas de type d'homotopie si $x \in X$ reste dans la même composante connexe par arcs de X.

Définition (Hurewicz 1941, Serre 1951)

Une fonction continue $f : Y \to X$ d'espaces topologiques est une fibration de Hurewicz (resp. fibration de Serre) si pour tout triangle (resp. les triangles avec Z une n-boule, $n \geq 0$)

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "k"] \arrow[ur, phantom, "\sim"'] \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

l'homotopie $H_t : Z \times [0, 1] \to X : f \circ k \sim g$ se relève à Y.

Remarque (les fibres $f^{-1}(x) \subset Y$ d'une fibration $f : Y \to X$)

ne changent pas de type d'homotopie si $x \in X$ reste dans la même composante connexe par arcs de X.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\
CX \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\
\star \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \quad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \qquad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \qquad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \xrightarrow{\sim} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \quad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.

La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \xrightarrow{\sim} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \quad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \quad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.

Définition (suspension Σ & espace de lacets Ω)

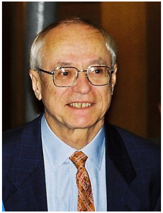
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & \star \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ \star \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Théorème (homologie & homotopie)

$$H_n(X) \cong H_{n+1}(\Sigma X) \quad \pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$$

Définition (catégories de modèles, Quillen 1969)

Une catégorie de modèles possède trois classes de morphismes: *cofibrations* $\rightarrowtail$, *équivalences faibles* $\xrightarrow{\sim}$ et *fibrations* $\twoheadrightarrow$.
La relation d'homotopie y est intrinsèque. Un objet I tel que $(1_*, 1_*) : \star \sqcup \star \rightarrowtail I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \star$ sert d'*intervalle* et joue le rôle de $[0, 1]$.



Jean-Pierre Serre 1926- Dan Quillen 1940-2011

"Le but essentiel de ce mémoire est d'étudier l'espace ΩX des lacets sur un espace X donné ... on peut utiliser ΩX pour donner une définition récurrente des *groupes d'homotopie* de X et, par suite, tout renseignement sur les groupes d'homologie de ΩX entraînera une meilleure connaissance des groupes d'homotopie de X."

Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, 1951.

"Part I raises some interesting questions ... in order to answer these questions we introduced the notion of model category, which is short for a 'category of models for a homotopy theory'. A model category is a category endowed with three families of maps called cofibrations, weak equivalences and fibrations satisfying certain axioms. To a model category $\mathcal{C}$ is associated a homotopy category $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ (obtained by localizing with respect to the family of weak equivalences) and extra structure on $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ such as suspension functors and loop functors."

Quillen, Rational homotopy theory, 1969.