Livre des Résumés

8^e Colloque, Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie et Maroc

TAMTAM 2017

10-13 mai 2017
Hammamet, Tunisie

Comité d'organisation

Hend Ben Ameur (IPEST-LAMSIN, Chair)
Nehla Abdellatif (ENSI-LAMSIN)
Skander Belhaj (ISAMM-LAMSIN)
Nejla Harigua Tlatli (INAT-LAMSIN)
Sondes Khabthani (FST-LIM)
Moncef Mahjoub (ENIT-LAMSIN)
Yomna Rebai (EPT-LIM)
Ibrahim Trabelsi (ISAMM-LAMSIN)

Comité scientifique

Rajae Aboulaïch (Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc)
Saloua Aouadi (Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie)
Mohamed Amara (Université de Pau et des pays de l'Adour, France)
Mourad Bellassoued (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Tunisie)
Amel Ben Abda (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Tunisie)
Hend Ben Ameur (Institut Préparatoire aux Etudes Scientifiques et Techniques, Tunis, Tunisie)
Assia Benabdallah (Université Aix-Marseille)
Lassaad El Asmi (Ecole Polytechnique de Tunisie, Tunisie)
Nabil Gmati (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Tunisie)
Houssem Haddar (CMAP, Ecole Polytechnique)
Mohamed Jaoua (ESPRIT, Tunisie)
Zoubida Mghazli (Université de Kenitra, Maroc)
Abdelhafid Mokrane (Ecole Normale Supérieure de Kouba, Alger, Algérie)
Ouahiba Zair (Université de Sciences et Technologie Houari Boumedienne Alger)

Livre des résumés du 8^e Colloque, Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie et Maroc (TAMTAM 2017)

10-13 mai 2017, Hammamet, Tunisie

Page d'accueil web
http://tamtam2017.enit-lr.tn/

Table des Matières

I. Conférences Plénières 1

Flux and potential reconstructions for guaranteed error bounds in numerical approximations of model PDEs
Martin Vorahlik 3

Global Stability for a class of functional Differntiel equations
Mohamed Tarek Touaoula 5

Tensorisation de données multidimensionnelles Application à la réduction de modèles
Mejdi Azaïez 7

Un modèle stochastique pour la quantification des incertitudes en Électrocardiographie.
Rajae Aboulaïch 9

Relaxation d'énergies à croissance linéaire
Hamdi Zorgati 11

Some stability results for stochastic conservation laws
Guy Vallet 13

On some PDEs models for geomtery inpainting problems
Zakaria Belhechmi 15

II. Minisymposium 17

2.1 **Inverse and imaging problems for PDE with applications** 19

Differential imaging for locally perturbed periodic layers
Houssem Haddar 21

Résultat de stabilité d'un problème inverse en électrophysiologie cardiaque
Moncef Mahjoub 25

Dipole localization in Moon rocks from sparse magnetic data
Konstantinos Mavreas 27

Inverse conductivity recovery problem in a spherical geometry from EEG data : uniqueness, reconstruction and stability results
Christos Papageorgakis 29

2.2 **Completion de données** 31

Data completion in linear elasticity : fading regulatization
Franck Delvare 33

Missing boundary data recovery using Nash games : The Stokes system
Faten Khayat 35

A data completion algorithm using boundary integral equations
Yosra Boukari 37

2.3 **Propagation d'ondes** 39

Réduction de l'erreur de dispersion dans la résolution numérique de l'équation d'Helmholtz
Abderrahmane Bendali (avec H. Barucq, J. Diaz et S. Tordeux) 41

Coupling The Discontinuous Galerkin method to an integral representation for Three dimensions Maxwell equations
Nabil Gmati, Stéphane Lanteri, Anis Mohamed 43
Modélisation de la propagation d'Ondes dans les Milieux Dissipatifs-Modèle avec Dérivée Fractionnaire
AbdelAziz Ezziani 45
Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de diffraction d'ondes par une couche mince fortement absorbante
Khaled El-ghaouti Boutarene (avec Pierre-Henri Cocquet) 47
2.4 **Microbial ecosystems and bioprocesses** 49
Mathematical Modelling and analysis of microbial ecosystems and bioprocesses
Nahla Abdellatif 51
How intra- and interspecific competitions affect the coexistence in the chemostat
Claude Lobry 55
On a three-step model of Anaerobic digestion with biomass mortality
Nahla Abdellatif 61
The effect of a new input concentration substrate on a syntrophic relationship of two species in a chemostat
Yessmine Daoud 69
Analysis of a model of flocculation in the chemostat
Radhouane Fekih-Saleh 75
2.5 **Problèmes structurés** 81
Recent developments on Toeplitz matrix computations
Skander Belhaj 83
A note on the numerical method for skew-Hamiltonian eigenvalue problem with symplectic JSVD like decomposition
Said Agoujil 85
A new reduction of a matrix to upper J-Hessenberg form
Haithem Ben Kahla 87
Numerical methods for computing the approximate GCD of polynomials
Hajer Rejeb 89
2.6 **Problèmes inverses** 91
Sur les équations de diffusion d'ordre variable et non-entier en temps
Eric Soccorsi 93
Optimal stability for a first order coefficient in a non-self-adjoint wave equation from Dirichlet-to-Neumann map
Ibtissem Ben Aïcha 95
Stability for the aligned magnetic field by the Dirichlet-to-Neumann map for the Schrödinger equation in a periodic quantum waveguide
Youssef Mejri 97
Stability estimate in the determination of a time dependent coefficient for a wave equation by finite boundary data
Imen Rassas 99
2.7 **Biomath** 101
On a mathematical model for monocytes transmigration
Soumaya Boujena 103
Implémentation d'un modèle de diffusion non-linéaire pour la détection de contours et la reconstruction tridimensionnelle d'images
El Mahdi El Guarmah 105

Modeling activated and inhibited wound healing assays with time-dependent F-KPP equations
Abderrahmane Habbal (avec Boutheina Yahyaoui, Mekki Ayadi) 107
Nonlinear dynamics of infection spreading in tissues
Vitaly Volpert 109
2.8 **Cardiac electrophysiology** 111
Complétion de Données. Régularisation et éléments finis
Faker Ben Belgacem 113
Modelling Purkinje-Myocardium coupling in cardiac electrophysiology
Saloua Aouadi 115
Stability analysis of the POD reduced order method in cardiac electrophysiology
Jamila Lassoued 117
A Nash-game approach to solve a coupled problem of conductivity identification and data completion in cardiac electrophysiology
Rabeb Chamekh 119
2.9 **EDP et Problèmes inverses** 121
Stability inequalities and inverse problems for some hyperbolic systems
Bochra Riahi 123
Carleman estimates for the magnetoelasticity system
Chaima Moufid 125
Discrétisation spectrale des équations de Navier-Stokes couplées avec les équations de Darcy
Yacine Mabrouki 127
Elliptic problems with variable exponents and measure data
Fares Mokhtari 133
2.10 **Finance and renewable energy** 135
Mean Field Games : an application to optimal energy storage in a grid with distributed generation
Imen Ben Tahar and Anis Matoussi 137
Wellposdness of XVA equations
Wissal Sabbagh 139
Robust utility maximization problem with a general penalty term
Wahid Faidi 141
Robust optimal contracts a BSDE approach
Mohamed Anis Ben Lasmar 143
2.11 **Modélisation des écoulements complexes** 145
Parallélisation d'ADAPT Calculs parallèles 3D en physique des plasmas réactifs
Fayssal Benkhaldoun 147
Schéma FVC : Implémentation sur GPU pour l'approximation des équations de Saint-Venant
Mohammed Boubekeur 155
Un algorithme BEM-FMM pour l'évaluation des interactions électrostatiques
Lassaad Elasmi 161
2.12 **Optimisation** 169
Couverture par sommets dans un graphe : une version colorée
Mohamed-Yahya Mohamed-Salem Dah 171
Problème d'optimisation combinatoire issu de l'étude des réseaux biologiques
Hafedh Mohamed Babou 173

THE BEHAVIOR OF AN ELASTICITY PROBLEM WITH A CONVEX ENERGY FUNCTIONAL
MOHAMED VERID ABDELKADER 175

III. Résumés des contributions 177

CONDITIONS DE TRANSMISSION DE TYPE VENTCEL POUR UN PROBLÈME DE DIFFRACTION D'ONDES PAR UNE COUCHE MINCE FORTEMENT ABSORBANTE
BOUTARENE KHALED EL-GHAOUTI, COCQUET PIERRE-HENRI 179

ETUDE NUMÉRIQUE DE L'INSTABILITÉ BAROTROPE SUR LE PLAN BÊTA ÉQUATORIAL
KACIMI ABDERRAHIM, KHOUIDER BOUALEM 183

ELLIPTIC PROBLEMS WITH VARIABLE EXPONENTS AND MEASURE DATA
MOKHTARI FARES 191

NEW RESULTS ON ASYMPTOTIC EXPANSION OF INTEGRALS
KAMOUCHE NESRINE 199

ANALYSIS OF AN ANTIPLANE CONTACT PROBLEM
DALAH MOHAMED AND DERBAZI AMMAR 203

A REGULARIZED NUMERICAL SOLUTION OF AN INVERSE EIGENVALUE PROBLEM OF COMPUTING GUIDED MODES IN A CLASS OF OPTICAL FIBERS
REZGUI HAYAT AND CHOUTRI ABDELAZIZ 213

AN EFFICIENT PROJECTIVE APPROACH FOR THE LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM
EL AMIR DJEFFAL 221

A WEAK SOLUTION FOR A BVP WITH TIME DEPENDING OPERATOR ON THE HOLE-LINE
ZAHAR SAMIRA 227

ESTIMATION DE LA MOYENNE D'UNE DISTRIBUTION À QUEUE LOURDE SOUS CENSURE ALÉATOIRE
SOLTANE LOUIZA, MERAGHNI DJAMEL ET NECIR ABDELHAKIM 231

COUPLING PARAREAL WITH FETI METHOD
SALOUA AOUADI, RIM GUETAT 237

HOMOGENIZATION VIA UNFOLDING IN THREE PHASE COMPOSITES
AHMED BOUGHAMMOURA, YOSRA BRAHAM 243

STUDY OF A FOURTH-ORDER PARABOLIC EQUATION IN TIME-DEPENDENT DOMAINS
KHELOUFI AREZKI 249

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTION FOR SYSTEMS OF ϕ-LAPLACIAN THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON THE POSITIVE HALF-LINE
MEBARKI KARIMA 255

QUELQUES REMARQUES SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉQUATION STOCHASTIQUE D'UN GAZ VISQUEUX DANS UN DOMAINE DISCRÉTISÉ
HISAO FUJITA YASHIMA, IBTISSEM ANNAKA 261

DESIGN OF HEAT CONDUCTION USING TOPOLOGICAL SENSITIVITY ANALYSIS METHOD
KALLEKH AFEF, MAATOUG HASSINE 267

ESTIMATION A POSTERIORI OPTIMALE ET GARANTIE POUR UN MODÈLE RÉDUIT D'ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX FRACTURÉ.
MGHAZLI ZOUBIDA, NAJI ILYAS 273

STATISTICAL INFERENCE OF A PARALLEL SYSTEM UNDER THE ARI MODELS
SOUMAYA GHNIMI, SOUFIANE GASMI 279

ALMOST PERIODIC SOLUTION FOR STEPANOV-ORLICZ ALMOST PERIODIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
FATIHA BOULAHIA, YOUSRA DJABARI AND FAZIA BEDOUHENE 289

AN OPTIMAL L^∞-ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A FINITE ELEMENT APPROXIMATION IN SYSTEM OF PARABOLIC QUASI-VARIATIONAL INEQUALITIES RELATED TO MANAGEMENT OF ENERGY PRODUCTION PROBLEMS
MOHAMED EL AMINE BENCHEIKH LE HOCINE, MOHAMED HAIOUR 295
AN EXISTENCE RESULT FOR A QUASILINEAR PROBLEM IN A LIMIT CASE.
BOUSSAD HAMOUR 301
APPLICATION OF GARCH MODELS IN ENERGY MARKETS : OIL PRICE
FATIMA ZOHRA BOUSEBA AND HALIM ZEGHDOUDI 307
MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINU : CAS DE L'ANALYSE ISOGÉOMÉTRIQUE
A. GDHAMI, R. DUVIGNEAU, M. MOAKHER 313
ON ALMOST AUTOMORPHIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS
CHIKH BOUZAR AND FATIMA ZAHRA TCHOUAR 319
VARIABLE-EXPONENT KIRCHHOFF MODEL FOR IMAGE RESTORATION AND THIN-STRUCTURES DETECTION USING THE TOPOLOGICAL GRADIENT METHOD.
HAMDI HOUICHET, ANIS THELJANI, BADREDDINE RJAIBI, MAHER MOAKHER 325
ASYMPTOTIC EXPANSION OF TRANSMISSION EIGENVALUE PROBLEM IN A DOMAIN WITH THIN LAYER
BOUJLIDA HANEN 333
BIO-MECHANICAL SYSTEM TO STUDY SOME PREDICTIONS ON THE HEALING OF WOUND CELL SHEET
BOUTHEINA YAHYAOUI, MEKKI AYADI, ABDERRAHMANE HABBAL 339
UNE NOTE SUR LES MODÈLES INAR À CHANGEMENT DE RÉGIMES MARKOVIEN
OUZZANI FARES ET BENTARZI MOHAMED 347
IDENTIFICATION D'UN ARC DE FRONTIÈRE POUR L'ÉQUATION DE LAPLACE DANS UNE BANDE PERTURBÉE
CHORFI LAHCÈNE ET KHÉLIFA IMÈNE 353
ESTIMATIONS D'ERREUR DU PROBLÈME DE STOKES AVEC CONDITION DE GLISSEMENT DE TYPE TRESCA
MEKKI AYADI, HELA AYED, LEONARDO BAFFICO , TAOUFIK SASSI 359
ESTIMATION EFFICACE D'UN PROCESSUS INAR(1) PÉRIODIQUE : CAS PARAMÉTRIQUE
SADOUN MOHAMED ET BENTARZI MOHAMED 365
IDENTIFICATION DE PARAMÈTRES ET DE POSITIONS DE PUITS DANS UN MILIEUX POREUX
THOURAYA NOURI BARANGER, HEND BEN AMEUR , WAFA MANSOURI ET NEJLA TLATLI 371
IDENTIFICATION DE FISSURES EN MILIEU THERMOÉLASTIQUE
ELKAMEL MAAYOUFI, HEND BEN AMEUR 377
INDICATEURS D'ERREUR A POSTERIORI POUR L'ESTIMATION DE PARAMÈTRES DANS UN MILIEU POREUX
HEND BEN AMEUR, NIZAR KHARRAT, MOHAMED HÉDI RIAHI 383
EFFECT OF INHIBITION ON A SYNTROPHIC RELATIONSHIP MODEL IN THE ANAEROBIC DIGESTION PROCESS
R. FEKIH-SALEM, N. ABDELLATIF, ASMA YAHMADI 391
UN RESULTAT D'INPAINTING PAR TENSEUR DE STRUCTURE NON-LINÉAIRE
M. BENSEGHIR AND F.Z. NOURI 397
MODÉLISATION MULTICOUCHE COUPLÉE HYDRODYNAMIQUE MORPHODYNAMIQUE EN ÉCOULEMENTS DE RECIRCULATION
S. SARI, F. BENKHALDOUN, M. SEAID 405
LA DÉTECTION DES CONTOURS ET LA RECONSTRUCTION TRIDIMENSIONNELLE D'IMAGES PAR UN ALGORITHME OPTIMAL
S. BOUJENA, K. BELLAJ, E. EL GUARMAH ET O. GOUASNOUANE 411

HOMOGENEIZATION THEORY FOR THE DERIVATION OF HIGHER-ORDER MACROSCOPIC MODELS FOR DIFFUSION MRI
MARWA KCHAOU, HOUSSEM HADDAR, MAHER MOAKHER 419
A NEW STABILITY NUMBER OF THE BRESSE-CATTANEO SYSTEM
LEILA DJOUAMAI AND BELKACEM SAID-HOUARI 427
DÉTECTION DE POINTS SOURCES DANS LES MODÈLES DE TRANSPORT DISPERSIF DE CONTAMINANTS. OBSERVABILITÉ ET IDENTIFIABILITÉ.
KHIARI SOUAD 431
NEW APPROACH FOR SOLVING ELECTROCARDIOGRAPHY IMAGING INVERSE PROBLEM WITH MISSING DATA ON THE BODY SURFACE
MOHAMMED ADDOUCHE, NADRA BOUARROUDJ, JACQUES HENRY, FADHEL JDAY, NEJIB ZEMZEMI 439
ON GOF TESTS FOR PERTURBED DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON A MDE
BEN ABDEDDAIEM MAROUA 447
SCHEDULING PROBLEM FOR UNLOADING OPERATIONS IN A RAILWAY TERMINAL
SANAE KOUISMI 453
SALT DOME DISSOLUTION : COUPLING FLOW, TRANSPORT AND GEOCHEMISTRY
M. BEN REFIFA, A. CANOT, L. GUELLOUZ, R. BOUHLILA 459

Index des auteurs **465**

Conférences Plénières

Flux and potential reconstructions for guaranteed error bounds in numerical approximations of model PDEs

Martin VORAHLIK

Flux and potential reconstructions for guaranteed error bounds in numerical approximations of model PDEs We review how to bound the error between the unknown weak solution of a partial differential equation and its numerical approximation via a fully computable a posteriori estimate. We present a unified framework based on primal-conforming potential reconstructions, obtained via local Dirichlet finite element problems, and on dual-conforming equlilibrated flux reconstructions, obtained via local Neumann mixed finite element problems. The framework covers at once all standard numerical methods like the conforming, nonconforming, discontinuous Galerkin, and mixed finite elements. Model linear/nonlinear and steady/unsteady problems are considered, as well as the Laplace eigenvalue problem. We show how to achieve robustness both with respect to problem data such as the size of the nonlinearity or the final simulation time, as well with respect to the approximation polynomial degree. The derived estimates are valid on each iteration of a linearization procedure, as well as on each algebraic solver iteration. We use them to design fully adaptive algorithms including adaptive stopping and balancing criteria. Numerical experiments illustrate the theoretical developments.

Global stability for a class of functional differential equations

TARIK MOHAMED TOUAOULA
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université de Tlemcen and Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées, BP 119 TLEMCEN 13000, ALGERIE

Much is unknown about the global dynamics of non-monotone functional differential equations. These models need more attention to understand the complex dynamics of their solutions. In this talk we present a new approach, based on the monotone semi-flow theory, for investigating the global stability of equilibria for the following class of functional differential equations with distributed delay,

$$x'(t) = -\gamma x(t) + \int_0^\tau h(a)g(x(t-a))da$$

We illustrate our results, by studying the well-known integro-differential Nicholson's blowflies and Mackey-Glass equations.

Tensorisation de données multidimensionnelles Application à la réduction de modèles

M. Azaïez[*] F. Ben Belgacem [†] T. Chacón Rebollo[‡] L. Lestandi [§]

May 3, 2017

L'exposé commence par la présentation de quelques techniques de tensorisation de données à deux paramètres en suite de leurs extensions aux cas de données multiparamètres. Quand les données sont le résulat de simulations numériques de EDP linéaires nous présenterons des résulats de convergence que nous validerons par des expériences numériques. Dans la seconde partie de l'exposé nous utiliserons la tensorisation des solutions des équations de Navier-Stokes incmopressibles pour rédiger un modèle réduit. Par une techniques de projection (Galerkin) stabilisée nous montrerons comment le modèle réduit est capable de produire des solutions stables et précises. Des résulats de convergence mathmatiques et numériques seront présentés pour expliquer notre approche.

References

[1] Azaïez, M. and Ben Belgacem, F., Karhunen-Loève's truncation error for bivariate functions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 290, pp 57-72, 2015

[2] M. Azaïez, F. Ben Belgacem and T. Chacón Rebollo., Error Bounds for POD expansions of parameterized transient temperatures Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 305 (2016) 501-511

[3] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, T. Chacón Rebollo, Recursive POD expansion for reaction-diffusion equation, Adv.Model. and Simul. in Eng. Sci. (2016) 3:3. DOI 10.1186/s40323-016-0060-1

[4] E. Ahusborde, M. Azaïez, F. Ben Belgacem, E. Palomo Del Barrio, Mercer's spectral decomposition for the characterization of thermal parameters Journal of Computational Physics, V. 294, Pages 1-19, (2015)

[*]Bordeaux INP, I2M (UMR CNRS 5295), Université de Bordeaux, 33607 Pessac (France)
[†]Université Technologique de Compiègne, LMAC (France)
[‡]Departamento EDAN & IMUS, Universidad de Sevilla, C/Tarfia, s/n, 41012 Sevilla (Spain)
[§]Bordeaux INP, I2M (UMR CNRS 5295), Université de Bordeaux, 33607 Pessac (France)

Un modèle stochastique pour la quantification des incertitudes en Électrocardiographie.

Rajae Aboulaich

Dans ce e travail on s'intéresse aux effets des incertitudes introduites par les données (conductivité des organes, données aux bords) sur la solution du problème inverse de l'électrocardiographie (ECG), en d'autres termes sur la reconstruction des données manquantes.

Relaxation d'énergies à croissance linéaire

Hamdi Zorgati

On étudie des problèmes de minimisation d'énergies décrivant les états d'équilibre de modèles issus de la mécanique des solides. Relaxer une énergie revient à la remplacer par son enveloppe semicontinue inférieure dans le bon espace, ce qui garantit l'existence de minimiseurs. On s'intéresse ici au cas limite des énergies à croissance linéaire.

Some stability results for stochastic conservation laws

Guy Vallet

Our aim in this communication is to present some stability results for the stochastic entropy solution to some first order stochastic conservation laws. Some error estimates of the approximation are also given.

On some geometry inpainting problems

Z. Belhachmi

Laboratoire De Mathématiques, Informatique et Applications (LMIA), Université de Haute Alsace, France

zakaria.belhachmi@uha.fr

Abstract

We present some ideas on modelling with diffusion operators for geometry inpainting problems. The framework is the variational PDEs methods and their discrete counterpart and the objective is to provide simple but accurate reconstruction procedures. A central difficulty in the inpainting problems is to recover missing data with non trivial singularities (edges, corners). Our method consists in building a family of linear energies depending on some parameters which converges ((in the Gamma-convergence sense) to a sophisticated, necessarily nonlinear, limit model that capture the singularities in the restaured image. We show several numerical examples and extension ideas.

Minisymposium

2.1 Inverse and imaging problems for PDE with applications

Minisymposium organisé par Juliette LEBLOND

Differential imaging for locally perturbed periodic layers.

Houssem Haddar and Thi-Phong Nguyen

INRIA, Ecole Polytechnique and Université Paris Saclay, Palaiseau, France

Abstract

We investigate a sampling method to recover the support of a local perturbation in a periodic layer from measurements of scattered waves at a fixed frequency without knowledge of the geometry of the periodic background media. We analyze the method in a simplified case where the infinite domain is truncated using periodic boundary conditions (which would correspond with the semi-discretized version of the continuous model with respect to the Floquet-Bloch (FB) variable [2]). As a data for the inverse problem, (propagative and evanescent) plane waves are used to illuminate the structure and measurements of the scattered wave at a parallel plane to the periodicity directions are performed. We introduce the near field operator and the near field operator associated with single FB-mode measurements then exploit them to built an indicator function of the defect. Numerical validating results are provided for synthetic data in dimension 2.

Keywords: Inverse scattering, locally perturbed period layer, sampling methods

1 The direct problem

Let $L > 0$ and M be a positive number, $M > 1$. For simplicity, we present the problem only in $\mathbb{R}^2$ but the results remain valid in dimension 3. In what follows periodicity is understood to hold only with respect to the first space coordinate. We consider the $ML-$periodic Helmhlotz equation for which the total field u is an $ML-$periodic (with respect to the first variable) function and satisfies

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

where the wavenumber k is positive and real valued. We assume that the index of refraction $n \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ has a non negative imaginary part and is $ML-$periodic. Moreover, we assume in addition that $n = n_p$ outside a compact domain Ω where $n_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ is L-periodic and there exists $h > 0$ such that $n = 1$ for $|x_d| > h$. We denote by $D := supp(n-1)$ (respectively $D_p := supp(n_p - 1)$) such that $D = D_p \cup \overline{\Omega}$. Let u^i be an $ML-$periodic incident wave satisfying $\Delta u^i + k^2 n u^i = 0$ in $\mathbb{R}^2$. Then the scattered wave $u^s := u - u^i$ is $ML-$periodic, verifies

$$\Delta u^s + k^2 n u^s = -k^2(n-1)u^i \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

and is assumed to satisfy the Rayleigh radiation condition

$$u^s = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{u}^{s,\pm}(\ell) e^{i\alpha_\#(\ell)\cdot\overline{x} + i\beta_\#(\ell)(x_d \mp h)}, \forall \pm x_2 \geq h$$

where $\alpha_\#(\ell) := \frac{2\pi\ell}{ML}$, $\beta_\#(\ell) := \sqrt{k^2 - \alpha_\#(\ell)^2}$ with non negative imaginary part, $\{\widehat{u}^{s,\pm}(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ are the Rayleigh sequences at $x_d = \pm h$ and $h > 0$ is such that $D \subset \{|x_2| \leq h\}$.

Assumption 1 *We assume that n and k are such that for all $u^i \in L^2(D)$, problem (2)-(1) has a unique solution $u^s \in H^1(|x_2| \leq h, |x_1| \leq ML)$ for all $h > 0$.*

2 The inversion algorithm

The main goal is to build an indicator function for Ω without reconstructing D or D_p. We use incident plane waves defined as

$$u^i(x;j) = \frac{-i}{2\,\overline{\beta}_{\#}(j)} e^{i\alpha_{\#}(j)\overline{x} + i\overline{\beta}_{\#}(j)(x_d - h)},\ j \in \mathbb{Z}.$$

We then consider the near field operator $N : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ defined by

$$[Na]_\ell = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\widehat{u}^{s,+}(\ell, j),\ \forall\, a = \{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

where $\widehat{u}^{s,+}(\cdot, j)$ are the Rayleigh coefficients associated with the scattered field generated by the incident field $u^i(.; j)$.

We shall also consider a single FB near field operator. We remark that an $ML-$periodic function has decomposition into the sum of M quasi-periodic functions with period L and quasi-periodicity factors $\alpha_q := 2\pi q/(ML)$, with $q = 0, \cdots, M-1$. This can be seen by arranging the Fourier coefficients modulo M so that

$$u = \tfrac{1}{M}\textstyle\sum_{q=0}^{M-1} u_q$$

where u_q has a Fourier expansion only on $q + Mj$ Fourier modes. Let $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$, we define for $q = 0, \cdots, M-1$, the element $a_q \in \ell^2(\mathbb{Z})$ by $a_q(j) = a(q + Mj)$. We then define the operator $I_q : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ which transforms a to $\tilde{a}$ such that $\tilde{a}_q = a$ and $\tilde{a}_{q'} = 0$ if $q \neq q'$. We then remark that the dual of I_q, $I_q^* a = a_q$. The single FB near field operator is defined as $N_q = I_q^* N I_q$. The justification of the sampling method introduced below relies on the solvability of the so-called *interior transmission problem* defined as: Seek $(u, v) \in L^2(D) \times L^2(D)$ such that $u - v \in H_0^2(D)$ and

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n u = 0 & \text{in } D, \\ \Delta v + k^2 v = 0 & \text{in } D, \\ u - v = \varphi & \text{on } \partial D, \\ \partial(u-v)/\partial\nu = \psi & \text{on } \partial D, \end{cases} \tag{3}$$

for given $(\varphi, \psi) \in H^{3/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D)$ where ν denotes the outward normal on ∂D. In the following q is a fixed number between 0 and $M-1$. We assume that $\mathbb{R}^2 \setminus D$ is connected, Ω does not intersect D_p and Ω lies within a period of size L. Moreover, we recall that M should be greater than 1 meaning in particular that there exists one period of size L that does not contain Ω.

Our algorithm uses the farmework of the Generalized Linear Sampling Method [1, 3] to built an indicator function for identifying the domain Ω (we also provide indicator functions for D and D_p). We introduce two functionals $J_\alpha(\phi, \cdot)$ and $J_{\alpha,q}(\phi, \cdot) : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ defined by

$$J_\alpha(\phi, a) := \alpha(N_\sharp a, a) + \|Na - \phi\|^2,$$

$$J_{\alpha,q}(\phi, a) := \alpha(N_\sharp I_q a, I_q a) + \|I_q^* N I_q a - \phi\|^2$$

where $N_\sharp := |\Re N| + |\Im N|$. Let us denote by ϕ^z and ϕ_q^z the Rayleigh sequences of respectively $\Phi(\cdot, z)$ and $\Phi_q(\cdot, z)$, which are respectively to the $ML-$periodic and α_q-quasiperiodic fundamental solutions of $\Delta v + k^2 v = -\delta_z$ satisfying the Rayleigh radiation condition. We then consider $a^{\alpha,z}$, $a_q^{\alpha,z}$ and $\tilde{a}_q^{\alpha,z}$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$ verifying

$$J_\alpha(\phi^z, a^{\alpha,z}) \leq \inf_{a\in\ell^2(\mathbb{Z})} J_\alpha(\phi^z; a) + c(\alpha)$$

$$J_\alpha(\phi_q^z, a_q^{\alpha,z}) \leq \inf_{a\in\ell^2(\mathbb{Z})} J_\alpha(\phi_q^z; a) + c(\alpha)$$

$$J_{\alpha,q}(I_q^*\phi_q^z, \tilde{a}^{\alpha,z}) \leq \inf_{a\in\ell^2(\mathbb{Z})} J_{\alpha,q}(I_q^*\phi_q^z; a) + c(\alpha)$$

with $c(\alpha)/\alpha \to 0$ when $\alpha \to 0$. We introduce

$$I_\alpha(z) = (N_\sharp a^{\alpha,z}, a^{\alpha,z})\left(1 + \frac{(N_\sharp a^{\alpha,z}, a^{\alpha,z})}{D(a_q^{\alpha,z}, \tilde{a}_q^{\alpha,z})}\right)$$

where for a and b in $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$D(a,b) = \big(N_\sharp(a - I_q b), (a - I_q b)\big).$$

Theorem 2 *Assume that Assumption 1 holds, that* (3) *defines a well posed problem and that* $\Re(n) - 1$ *or* $1 - \Re(n)$ *is positive definite in a neighborhood of* ∂D*. Then,*

- $z \in D$ *iff* $\lim_{\alpha\to 0}(N_\sharp a^{\alpha,z}, a^{\alpha,z}) < \infty$
- $z \in D_p$ *iff* $\lim_{\alpha\to 0}(N_\sharp a_q^{\alpha,z}, a_q^{\alpha,z}) < \infty$
- $z \in \Omega$ *iff* $\lim_{\alpha\to 0} I_\alpha(z) < \infty$.

3 A numerical example

We here present a numerical example that shows how one can reconstruct Ω even though the reconstruction of D is not accurate. The parameters setting is: $k = \pi/3.14$, $n_p = 2$ in D_p, and $n = 4$ in Ω; set $\lambda = 2\pi/k$ and choose $L = 2\pi$. Index of incident waves: $\mathbb{Z}_{inc} := \{j = q + M\ell, 0 \le q \le M - 1, -N_{min} \le N_{max}\}$ with $N_{min} = N_{max} = 5$.

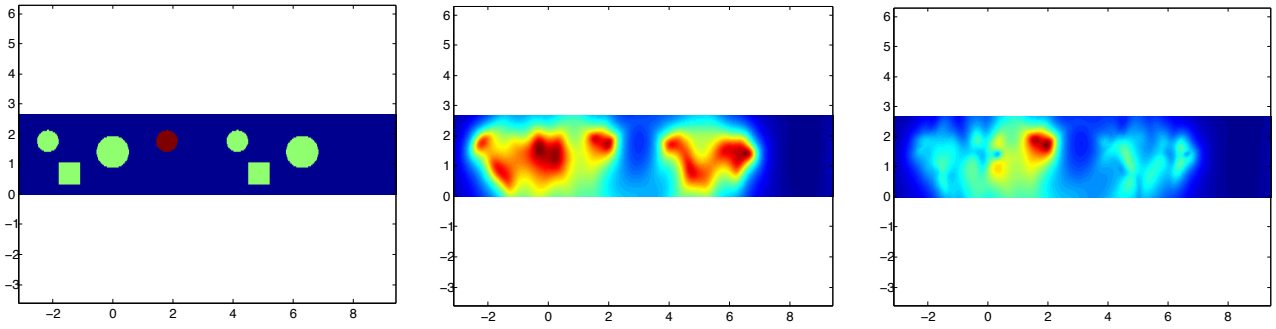


Figure 1: Exact geometry (left), reconstruction of D (middle) and reconstruction of Ω (right).

References

[1] F. Cakoni, D. Colton and H. Haddar, *SIAM*, CBMS Series **vol. 88** (2016).

[2] H. Haddar and Thi-Phong Nguyen, Applicable Analysis, 2016

[3] L. Audibert and H. Haddar, Inverse Problems, 2014

Stability results for the parameter identification inverse problem in cardiac electrophysiology

Lassoued Jamila [1], Mahjoub Moncef [2] and Zemzemi Nejib [3]

[1] *LAMSIN-ENIT, B. P. 37,1002 Tunis-Belvedere, Tunis,Tunisia, lassoued.jamila@enit.rnu.tn*
[2] *LAMSIN-ENIT, B. P. 37,1002 Tunis-Belvedere, Tunis,Tunisia, moncef.mahjoub@lamsin.rnu.tn*
[3] *INRIA Bordeaux Sud-Ouest, 200 avenue de la vieille tour, 33405 Talence, France, nejib.zemzemi@inria.fr*

The aim of this work is to establish stability estimates for the parameter identification problem in cardiac electrophysiology modeling. The propagation of the electrical wave in the heart is described by the monodomain equation. The model consists of a reaction-diffusion non linear equation coupled to an ODE system representing the electrical activity of the cell membrane.

$$\begin{cases} \chi_m \dfrac{\partial V_m}{\partial t} - div(\sigma \nabla V_m) = I_{app} - I_{ion}(V_m, w) & in\ \ \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + G(V_m, w) = 0 & in\ \ \Omega \times (0,T) \\ \sigma \nabla V_m . n = 0 & on\ \ \Sigma. \end{cases} \tag{1}$$

where Ω and Σ denote respectively the domain and the boundary of the heart. The time domain is given by $[0,T]$ and χ_m the membrane capacitance per area unit. The variable V_m denote the action potential, and σ is the bulk conductivity. The term I_{app} is a given external current stimulus, w represents the concentrations of different chemical species, and variables representing the openings or closures of some gates of the ionic channels. And the ionic current I_{ion} and the function $G(V_m, w)$ depends on the considered ionic model. In this study, the dynamics of w and I_{ion} are described by the Mitchell and Schaeffer model :

$$I_{ion}(v,w) = \frac{w}{\tau_{in}} v^2 (v-1) - \frac{v}{\tau_{out}} \quad and \quad G(v,w) = \begin{cases} \dfrac{w-1}{\tau_{open}} & si\ \ v \le v_{gate} \\ \dfrac{w}{\tau_{close}} & si\ \ v > v_{gate} \end{cases}$$

The time constants τ_{in}, τ_{out} are respectively related to the length of the depolarization and repolarization. The parameters τ_{open} and τ_{close} are the characteristic times of gate opening and closing respectively and v_{gate} corresponds to the change-over voltage.
In this work we are interested in the identification of the parameter τ_{in} to which the solution is known to be very sensitive. Let τ_{in} and $\widetilde{\tau}_{in}$ be two different strictly positive parameters. We define $f(V_m, w) = I_{app} - I_{ion}(V_m, w)$, $a = \dfrac{1}{\tau_{in}}$, $\widetilde{a} = \dfrac{1}{\widetilde{\tau}_{in}}$ $(V_m, w) = (V_m(a), w(a))$ and $(\widetilde{V}_m, \widetilde{w}) = (V_m(\widetilde{a}), w(\widetilde{a}))$. Let's also denote

$$V = V_m - \widetilde{V}_m \qquad and \qquad W = w - \widetilde{w}. \tag{2}$$

Let ω_0 be an arbitrary non-empty subdomain of Ω, we prove the following stability result

Theorem 1 *Let (V, W) defined as in (2) with the initial condition $V_0 \in H^2(\Omega)$.*
Let us assume that

$$\frac{\partial f}{\partial a}(\tilde{V}_m, \tilde{w}) \ge r_0 > 0 \quad for\ some \quad T' > 0 \quad and \quad \forall x \in \Omega\,.$$

Then there exists $C > 0$ such that

$$|a - \widetilde{a}| \le C N_{T',\omega_0}(V, W),$$

where

$$N_{T',\omega_0}(V,W) = \|V\|^2_{H^1(0,T;L^2(\omega_0))} + \|V\|^4_{L^4(0,T;L^4(\omega_0))} + \|V(T')\|^2_{H^2(\Omega)} + \|V(T')\|^4_{L^4(\Omega)} + \|V(T')\|^6_{L^6(\Omega)} + \|W(T')\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dipole localization in Moon rocks from sparse magnetic data

Sylvain CHEVILLARD, Juliette LEBLOND and Konstantinos MAVREAS

INRIA, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902, Sophia Antipolis Cedex, France

Moon today has no global magnetic field, nevertheless there are evidences showing that it used to have one in the past [1]. Paleomagnetic scientists try to understand the reasons of the creation and the evolution of this ancient magnetic field, by studying the remanent magnetism of surface Moon rocks.

In our study, we consider dipole recovery issues from sparse magnetic data, with the use of best quadratic rational approximation techniques, together with geometrical and algebraic properties of the poles of the approximants.

The data acquisition process generates the main "cylindrical" geometry of our study. A special magnetometer has been constructed by scientists at CEREGE* which they call "lunometer". Lunometer provides measurements of the components of the magnetic field B, on 3 circular sections $i = \{1, 2, 3\}$.

The underlying magnetic phenomenon is modeled by Maxwell equations in the magnetostatic and macroscopic framework [2]. We preliminary assume that the sample contains a unique pointwise dipolar unknown magnetic source located at X_d, with moment M_d. The expression of the magnetic field at $X \neq X_d$ (where μ_0 is the permeability of the free space) has the form:

$$-\frac{4\pi}{\mu_0} B(X) = \frac{|X - X_d|^2 M_d - 3\left[M_d \cdot (X - X_d)\right](X - X_d)}{|X - X_d|^5} \tag{1}$$

From measurements of the magnetic field B at sensors positions, we want to recover the moment M_d and the location X_d of the dipole. Our strategy is to decompose this inverse problem into two subproblems and search firstly for the location X_d of the dipole (which is a nonlinear problem) and secondly for its moment M_d (which becomes a linear problem when the location is known).

More precisely, the idea is to use the available data of a component of B denoted as B_i. Then, B_i^2 can be seen as the trace on the circle of a rational function of the complex variable in the corresponding plane [3]. This function has one pole inside the disk and one outside. From the values of this function, we use the best quadratic rational algorithm called RARL2‡ which provides us with an approximation of the pole inside. Vieta's formula allows us to estimate the pole outside, hence to fully recover the denominator of the rational function. We establish relations between the denominator and the unknown actual dipole position X_d.

Observe that a variety of factors can affect the moment recovery process. Indeed, the data is subject to measurement errors and the condition number of the problem depends on the actual dipole location/orientation. Geometrical methods could work as supplementary to the algebraic methods. During the talk, these techniques will be explained and numerical results will be discussed.

References

[1] B. P. Weiss, S. M. Tikoo *The lunar dynamo*, Science 346, 6214, 2014.

[2] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, third edition, John Wiley & Sons, 2001.

[3] L. Baratchart, J. Leblond and J. P. Marmorat, *Inverse source problem in 3D ball from best meromorphic approximation on 2D slices*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, 25, pp. 41-53, 2006.

Acknowledgments

This research is part of the ANR project MagLune**.

*Centre Européen de Recherche et d'Enseignement des Géosciences de l'Environnement, CNRS. Aix en Provence, France.

‡`https://project.inria.fr/rarl2/`

**`http://maglune.cerege.fr/`

INVERSE CONDUCTIVITY RECOVERY PROBLEM IN A SPHERICAL GEOMETRY FROM EEG DATA: UNIQUENESS, RECONSTRUCTION AND STABILITY RESULTS

MAUREEN CLERC [1,3], JULIETTE LEBLOND [1,3], JEAN-PAUL MARMORAT [2], CHRISTOS PAPAGEORGAKIS [1,3].

[1] *INRIA Sophia Antipolis Méditerranée, Équipes Apics et Athena, France.*
[2] *Ecole des Mines ParisTech, Centre de Mathématiques Appliquées, Sophia Antipolis, France.*
[3] *Université Côte d'Azur, France.*

Abstract

Electroencephalography (EEG) is a non invasive imaging technique that measures the effect of the electric activity of active brain regions, called sources, through values of the electric potential furnished by a set of electrodes placed at the surface of the scalp. A fundamental problem there is the inverse problem of source localization which aims at locating the sources of the electric activity using the acquired EEG measurements [2]. The quality of the source estimation depends on the accuracy of the conductivity model used to solve the problem. Among the head tissues, the skull conductivity is the one that influences most the accuracy of EEG source localization [3]. Often, conductivity estimation is performed prior to the source estimation to determine the unknown conductivity using either supplementary EEG measurements or even measurements acquired by other imaging techniques. Such a technique is electrical impedance tomography (EIT) where current is injected through a pair of EEG electrodes while the unknown conductivities can be estimated by the resulting measurements at the rest electrode locations.

We examine the inverse skull conductivity estimation problem, which aims at recovering the electrical conductivity properties of the skull from measurements given at the surface of the head by EEG measurements. Our goal is to show uniqueness and a constructive scheme for the inverse skull conductivity estimation problem using partial boundary EEG data from a single experiment, in the preliminary case of an homogeneous skull conductivity. This is a version of the many inverse conductivity issues still under study nowadays [1].

The head is assumed to be an isotropic piecewise homogeneous medium and we examine a layered spherical head model made of three concentric nested spheres, each of them modelling scalp, skull and brain tissues (from the outermost to the innermost layer). Each of the three layers is supposed to have a constant conductivity. We also assume that the conductivities of the brain and the scalp are known, while the conductivity to be recovered is the one of the intermediate spherical layer (skull).

We solve the above conductivity estimation problem from the available EEG partial boundary data, expanded on the spherical harmonics basis, and transmitted over the spherical interfaces by transfer functions, while we consider that the source term is already estimated (through a number of coefficients of its spherical harmonics expansion). Linear algebra computations then allow us to find polynomials that possess a root which should coincide with the unknown skull conductivity, thus solving the estimation problem. We derive uniqueness properties and a reconstruction algorithm for the skull conductivity. A numerical study shows that the algorithm is able to accurately estimate the skull conductivity, with good robustness properties with respect to various levels of noise. The properties of the inverse conductivity estimation problem are also examined with various source configurations (partially known sources) and EIT measurements.

This work was supported by the Région Provence-Alpes-Côte d'Azur, France, and BESA GmbH, Germany.

References

[1] G. Alessandrini, *Generic uniqueness and size estimates in the inverse conductivity problem with one measurement*, Le Matematiche, 54 (1999), pp. 5–14.

[2] M. Clerc, J. Leblond, J.-P. Marmorat and T. Papadopoulo, *Source localization in EEG using rational approximation on plane sections*, Inverse Problems, 28, 055018 (2012).

[3] S. Vallaghé and M. Clerc, *A Global Sensitivity Analysis of Three-and Four-Layer EEG Conductivity Models*, IEEE Trans. Biomedical Engineering, 56(4) (2009), pp. 988–995.

2.2 Completion de données

Minisymposium organisé par Amel BEN ABDA

Méthode de régularisation évanescente pour les problèmes de complétion de données

Franck DELVARE
Université de Caen Normandie

L'objectif de l'exposé est de présenter une méthode pour la résolution des problèmes inverses de type Cauchy. Pour ces problèmes, parfois qualifiés de problèmes de complétion de données, il s'agit de déterminer la solution, à partir de la seule connaissance de données aux limites surabondantes sur une partie de la frontière du domaine.

L'idée essentielle de la méthode inverse, que nous proposons, est de distinguer des quantités fiables et des quantités non fiables. Cette distinction est réalisée en faisant l'hypothèse que l'équation d'équilibre est vérifiée exactement et qu'elle représente bien le phénomène physique que l'on veut modéliser alors que les conditions aux limites auxquelles nous avons accès peuvent être entachées d'erreurs pouvant provenir de l'expérimentation et correspondre à un bruit de mesure. La méthode inverse proposée, qui n'est pas spécifique à une EDP, repose donc sur un algorithme itératif où l'idée est de rechercher, à chaque itération, parmi toutes les solutions de l'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites accessibles à la mesure.

Des tests numériques, menés en présence de données bruitées, montreront la précision et la robustesse de la méthode de complétion de données, ainsi que sa capacité à débruiter les données. Quelques applications seront fournies, comme la localisation de fissures, la détermination de zones de contact ou l'identification de coefficient de frottement en mécanique des solides.

Missing boundary data recovery using Nash games : The Stokes system

Khayat Faten
LAMSIN

We consider the Cauchy-Stokes problem. We use a new method based on Nash game theory to recover the lacking velocity and normal stress on some inaccessible part of the boundary. This method is used with two different approaches. For each one, we prove the existence of a unique Nash equilibrium. The numerical study attests that both approaches give accurate results specially for noisy data. We compare these results with those of the energy-like minimization method.

A data completion algorithm using boundary integral equations

Y.Boukari[ϒ,‖] *H.Haddar*[*]

ϒ LAMSIN, ENIT University of Tunis EL MANAR.
‖ ENSATAB, University of Carthage
Yosra.Boukari@ensta-b.rnu.tn.
[*] Defi, CMAP, Ecole Polytechnique Palaiseau
Houssem.Haddar@inria.com.

The aim of the present work is to solve the Cauchy problem for the Helmholtz and the Laplace equations using a non-iterative method based on the surface representation of the solution. More specifically, we would like to determine the Cauchy data associated with a solution of the Helmholtz or the Laplace equation in a part of the boundary of a bounded domain from the knowledge of the Cauchy data on the complementary part. We consider the setting of a regular domain that contains an inclusion, which means that the boundary of this domain can be split in two parts: an exterior boundary and an interior boundary that we denote by Γ_e and Γ_i respectively. Hence, the inverse problem under concern consists in reconstructing the interior Cauchy data on Γ_i by knowing the Cauchy data on the exterior boundary Γ_e. This problem has been shown to be an ill-posed problem since 1953.
We propose a new method to solve this inverse problem. Using the boundary integral equation representation along with the trace of the solution and its normal derivative on Γ_e and Γ_i , we derive a linear integral equation system that combines the known and unknown Cauchy data. The ill posedness of the problem shows up in the compactness of the component of the operator that has to be inverted. We prove the injectivity and the densness of the range of this operator in appropriate Sobolev spaces. Moreover, we show that our method naturally handles the case of noisy data. In fact, in our formulation the available Cauchy data are multiplied by an operator that has the same range as the operator to be inverted, which makes possible the use of classical regularization techniques for noisy data, such as the Thikonov

2.3 Propagation d'ondes sur les problématiques des modèles mathématiques et/ou numériques

Minisymposium organisé par Abdelhafid MOKRANE

Réduction de l'erreur de dispersion dans la résolution numérique de l'équation d'Helmholtz

H. Barucq, A. Bendali (orateur), J. Diaz et S. Tordeux
INSA Toulouse

L'erreur de dispersion, dans la résolution de l'équation des ondes en régime harmonique ou équation d'Helmholtz, se caractérise par le fait qu'il faut augmenter la densité des degrés de liberté lorsque la taille du domaine de résolution augmente. Ceci rend impraticable les méthodes de résolution usuelles basées sur des méthodes de différences finies, d'éléments finis ou même des méthodes de type Galerkin discontinus. Dans l'exposé, nous commencerons par mettre en évidence ce phénomène et introduirons un procécé, que nous avons récemment développé, qui réduit cette erreur de dispersion. Ce procédé est basé sur l'utilisation d'une méthode de Galerkin discontinue mais avec des résolutions locales qui permettent d'approcher avec beaucoup de précision l'opérateur qui fait passer des données de Dirichlet à celles de Neumann sur chaque élément du maillage.

Coupling The Discontinuous Galerkin method to an integral representation for Three dimensions Maxwell equations

Nabil Gmati, Stéphane Lanteri, Anis Mohamed

One of the difficulties that arise when modeling and developing methods to solve problems of propagation of electromagnetic waves, is when these problems are setted on an unbounded domain. The main idea of the methods of solving by integral equations is to transform a problem defined on an unbounded domain in a new problem on a bounded domain. In this framework, we develop a finite element method of discontinuous Galerkin type coupled to an integral representation for the resolution of the maxwell equations in harmonic regime.

These methods are particularly well adapted for wave propagation problems, especially when we use unstructured meshes locally refined for taking into account discontinuous characteristics of the propagation media.

Modélisation de la Propagation d'Ondes dans les Milieux Dissipatifs–Modèle avec Dérivée Fractionnaire

M. Ait Ichou[a,b], H. El Amri[a] and A. Ezziani[b]

[a]Laboratoire LMA, ENS–Casablanca, Université Hassan II de Casablanca
Route d'El Jadida Km 9, BP : 50069 Ghandi, Casablanca, Maroc

[b]Laboratoire MAEGE, FSJES Aïn Sebâa, Université Hassan II de Casablanca
Beausite, BP : 2634 Ain Sebaâ, Casablanca, Maroc

Abdelaaziz.Ezziani@univh2m.ma

Résumé : Les matériaux réels, en particulier les roches et les polymères, dissipent de l'énergie lorsqu'ils sont soumis à des déformations [1, 3]. Ces dernières années, de nombreux auteurs ont affirmé que l'utilisation de l'intégration fractionnaire et des opérateurs fractionnaires est nécessaire pour modéliser la dissipation des ondes dans les matériaux réels. Pour la description de la propriété mémoire de plusieurs matériaux et processus, la dérivée fractionnaire est un outil essentiel, car elle prend en compte toute l'histoire de la fonction et ne reflète que les caractéristiques instantanées comme dans le cas de la dérivée entière [2]. Le modèle fractionnaire est alors important pour prendre en considération la dissipation des ondes et les propriétés physiques des matériaux réels (matériaux de mémoire).

Dans ce travail, nous nous intéressons à la modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux dissipatifs. Nous considérons un modèle de propagation avec dérivée fractionnaire généralisant celui de Zener présenté dans [2]. Nous proposons une analyse mathématique du modèle : résultat d'existence, d'unicité et de décroissance d'énergie. Pour la résolution numérique nous avons développé un schéma aux différences finies centré, d'ordre 2 et explicite. La stabilité de ce schéma est assurée grâce à un résultat de décroissance de l'énergie discrète. Des simulations numériques dans le cas 1D seront exposés lors de la conférence.

Mots-clés : Ondes viscoélastiques, dérivée fractionnaire, facteur de qualité, solution forte, dissipation d'énergie, schémas aux différences finies, analyse de stabilité.

Références

[1] R. L. Bagely and P.J. Torvic, *A therotical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity*, Journal of Rheology, 27(1983) : 201–210.

[2] E. Béecache, A. Ezziani, and P. Joly, *A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation*, Computational Geosciences, 8(2004) : 255–299.

[3] P.J. Torvic and R. L. Bagely, *On the appereance of the fractional derivative in the behavior of reals materials* ; American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics, 51(1984) :294–298.

Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de diffraction d'ondes par une couche mince fortement absorbante

BOUTARENE Khaled El-Ghaouti, COCQUET Pierre-Henri
USTHB Alger, Algérie. PIMENT, Université de La Réunion Sainte-Clotilde, France

Ce travail porte sur l'étude du comportement asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine pénétrable de $\mathbb{R}^3$ avec une couche mince d'épaisseur (destinée à tendre vers 0). Nous utilisons une méthode basée sur des développements asymptotiques multi-échelles pour modéliser l'effet de la couche mince par des conditions de transmission de type Ventcel.

2.4 Mathematical Modelling and analysis of microbial ecosystems and bioprocesses

Minisymposium organisé par Nahla ABDELLATIF et Tewfik SARI

Mathematical Modelling and analysis of microbial ecosystems and bioprocesses

Research done within the network Treasure [1]

N. Abdellatif, [a,b,*] Y. Daoud, [b,f] R. Fekih Salem, [b,g] T. Sari, [c,h] C. Lobry, [d] J. Harmand, [e]

[a] Université de Manouba, ENSI, Campus Universitaire, 2010 Manouba, Tunisie
[b] Université de Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie
[c] IRSTEA, UMR Itap, 361 rue Jean-François Breton, 34196 Montpellier France
[d] Université de Nice et MODEMIC, Le Gd Palais Bt6, 2 BD de Cimiez, 06000 Nice, France
[e] Inra, Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement, 11100 Narbonne, France .
[f] Université de Montpellier, Ecole doctorale Information Structures Systèmes, UMR MISTEA, France.
[g] Université de Monastir, ISIMa, BP 49, Av Habib Bourguiba, 5111 Mahdia, Tunisie
[h] Université de Haute Alsace, LMIA, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
[*] Corresponding author.

ABSTRACT. In this symposium, we present mathematical analyses of models related to the growth and coexistence of species of micro-organisms in the chemostat. These works were carried out within the TREASURE network. The symposium consists in 4 presentations : Anaerobic digestion (by N. Abdellatif), Synthrophic relationship in the chemostat (by Y. Daoud), Intra and interspecific competition in the chemostat (by C. Lobry) and Flocculation in the Chemostat (by R. Fekih-Salem).

RÉSUMÉ. Dans ce symposium, nous présentons une analyse mathématique de modèles de croissance et de coexistence d'espèces de micro-organismes dans le chemostat. Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du réseau TREASURE. Ce symposium consiste en 4 présentations : La digestion anaérobie (par N. Abdellatif), la relation synthrophique dans le chemostat (par Y. Daoud), la compétition intra et interspécifique dans le chemostat (par C. Lobry) et la flocculation dans le Chemostat (par R. Fekih Salem).

KEYWORDS : Bifurcation, Chemostat, Coexistence, Competition, Density-dependence, Global stability, Bistability, Enzymatic degradation, Hydrolysis, Mortality, Flocculation Microbial ecosystems, Syntrophic relashionship.

MOTS-CLÉS : Bifurcation, Chemostat, Coexistence, Compétition, Densité-dépendance, Stabilité globale, Bistabilité, Dégradation enzymatique, Hydrolyse, Mortalité, Floculation Écosystèmes microbiens, Relation syntrophique

1. On a three-step model of Anaerobic digestion with biomass mortality

Presented by N. Abdellatif.
In this work, we analyse a mathematical model of the chemostat with enzymatic degradation of an organic substrate under a solid form. We study the existence and the stability of equilibrium points of the model considering monotonic growth rates and positive mortality terms. The analysis of the 3-step model is derived from a smaller order sub-model. We show that the considered sub-model may exhibit bistability. The study of 3-step model shows the existence of at most four positive equilibrium and we prove that introducing decay in the model preserves the stability of the equilibria.
This work is an extension of [3]

2. The effect of a new input concentration substrate on a syntrophic relationship of two species in a chemostat

Presented by Y. Daoud (joint work with N. Abdellatif, T. Sari and J. Harmand [2])
In this work, we study a model describing a syntrophic relationship of two microbial species with two input substrates, including both decay terms and inhibition of the first species by an excess of the second substrate. This model can be seen as a reduced and simplified version of the anaerobic digestion process. We discuss the existence and stability of all equilibria and we give necessary and sufficient conditions on the control parameters of the system (the dilution rate and the input concentrations of the two substrates).
For complements and other research on this subject, done in the Network Treasure, see [9, 10, 11]

3. How intra- and interspecific competitions affect the coexistence in the chemostat

Presented by C. Lobry (joint work with R. Fekih Salem and T. Sari [5]).
This paper deals with a two-microbial species model in competition for a single-resource in the chemostat including general intra- and interspecific density-dependent growth rates with distinct removal rates for each species. In order to understand the effects of intra- and interspecific competition, this general model is first studied by determining the conditions of existence and local stability of steady states. The operating diagrams show how the model behaves by varying the operating parameters and illustrate the effect of the intra- and interspecific competition on the disappearance of coexistence region and the occurrence of bi-stability region. The bifurcations of steady states according to interspecific competition parameters are analyzed in a particular case of density-dependent growth rates which are usually used in the literature.
For complements and other research on this subject, done in the Network Treasure, see [1, 8]

4. Analysis of a model of flocculation in the chemostat

Presented by R. Fekih Salem (joint work with T. Sari, [7])

In this work, we study a flocculation model with a single resource and a single species which is present in two forms: isolated bacteria and attached bacteria. With monotonic growth rates and distinct removal rates, we show that this model presents a rich behavior with multiplicity of positive equilibria and bi-stability.

For complements and other research on this subject, done in the Network Treasure, see [4, 6]

Acknowledgments

We thank the financial support of TREASURE euro-Mediterranean research network (`https://project.inria.fr/treasure/`).

5. References

[1] N. ABDELLATIF, R. FEKIH-SALEM, T. SARI, Competition for a single resource and coexistence of several species in the chemostat, *Math. Biosci. Eng.*, **13** (2016), 631–652.

[2] Y. DAOUD, N. ABDELLATIF, T. SARI, J. HARMAND, Steady-state analysis of a syntrophic association of two species in a chemostat : The effect of a new input concentration substrate, *Fourth International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences: Modeling and Analysis* (4thICCDS'2016) Agadir, Morocco - October 26-28, 2016.

[3] R. FEKIH-SALEM, N. ABDELLATIF, T. SARI, J. HARMAND, Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie à trois étapes, *ARIMA Journal*, **17**, 53–71, 2014.

[4] R. FEKIH-SALEM, J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT, T. SARI, Extensions of the chemostat model with flocculation, *J. Math. Anal. Appl.*, **397**, 2013, 292–306.

[5] R. FEKIH-SALEM, C. LOBRY, T. SARI, A density-dependent model of competition for one resource in the chemostat, *To appear*.

[6] R. FEKIH-SALEM, A. RAPAPORT, T. SARI, Emergence of coexistence and limit cycles in the chemostat model with flocculation for a general class of functional responses, *Appl. Math. Modell.*, **40** (2016), 7656–7677.

[7] R. FEKIH-SALEM, T. SARI, The mathematical analysis of a model of flocculation in the chemostat, *To appear*

[8] R. FEKIH-SALEM, T. SARI, N. ABDELLATIF, Sur un modèle de compétition et de coexistence dans le chémostat, *ARIMA J.*, **14** (2011), 15–30.

[9] M. EL HAJJI, F. MAZENC AND J. HARMAND, A mathematical study of a syntrophic relationship of a model of anaerobic digestion process, *Math. Biosci.Eng*, **7** (2010), 641–656.

[10] T. SARI, M. EL HAJJI AND J. HARMAND, The mathematical analysis of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat, *Math. Biosci. Eng.*, **9** , 627–645, 2012.

[11] T. SARI AND J. HARMAND, A model of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat including maintenance, *Math. Biosci.*, **275**, 1–9, 2016.

How intra- and interspecific competitions affect the coexistence in the chemostat

R. Fekih-Salem [a,d,*] — C. Lobry [b] — T. Sari [c,e]

[a] University of Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisia
[b] University of Nice and MODEMIC, Le Gd Palais Bt6, 2 BD de Cimiez, 06000 Nice, France
[c] IRSTEA, UMR Itap, 361 rue Jean-François Breton, 34196 Montpellier, France
[d] University of Monastir, ISIMa, BP 49, Av Habib Bourguiba, 5111 Mahdia, Tunisia
[e] University of Haute Alsace, LMIA, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
[*] Corresponding author.
E-mail addresses: radhouene.fekihsalem@isima.rnu.tn (R. Fekih-Salem), lobrinria@wanadoo.fr (C. Lobry), tewfik.sari@irstea.fr (T. Sari).

ABSTRACT. This paper deals with a two-microbial species model in competition for a single-resource in the chemostat including general intra- and interspecific density-dependent growth rates with distinct removal rates for each species. In order to understand the effects of intra- and interspecific interference, this general model is studied by determining the conditions of existence and local stability of steady states. The operating diagrams show how the model behaves by varying the operating parameters and illustrate the effect of the intra- and interspecific interference on the disappearance of coexistence region and the occurrence of bi-stability region.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on étudie un modèle général densité-dépendant intra et inter-spécifique où deux espèces microbiennes sont en compétition pour une seule ressource dans le chémostat avec des taux de prélèvement distincts pour chaque espèce. Afin de comprendre les effets d'interférence intra et inter-spécifique, ce modèle général est analysé en déterminant les conditions d'existence et de stabilité locale des points d'équilibre. Les diagrammes opératoires montrent comment le modèle se comporte en faisant varier les paramètres opératoires et illustrent l'effet d'interférence intra-et inter-spécifique sur la disparition de la région de coexistence et l'émergence d'une région de bistabilité.

KEYWORDS : Bifurcation, Chemostat, Coexistence, Density-dependence

MOTS-CLÉS : Bifurcation, Chémostat, Coexistence, Densité-dépendance

1. Introduction

In the classical chemostat model with several species in competition for a single resource, the well-known Competitive Exclusion Principle (CEP) states that generically at most one species can survive to the competition [5, 8]. Although the theoretical prediction of this model has been corroborated by the experiences of Hansen and Hubbell [5], the biodiversity found in nature as well as in waste-water treatment processes and biological reactors seems to contradict the CEP. In order to construct more coherent models with observations of the real world, different mechanisms of coexistence were proposed in the literature such that the intra- and interspecific interference [1], the flocculation [2, 4] and the density-dependence [6, 7]. The present paper studies how the intra- and interspecific interferences are mechanisms of coexistence for competing species in the chemostat. In this context, we will consider the following two species model with general density-dependent growth functions:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{S} & = & D(S_{in}-S)-\mu_1(S,x_1,x_2)x_1-\mu_2(S,x_2,x_1)x_2 \\ \dot{x}_1 & = & [\mu_1(S,x_1,x_2)-D_1]x_1 \\ \dot{x}_2 & = & [\mu_2(S,x_2,x_1)-D_2]x_2. \end{array}\right. \tag{1}$$

where x_i, $i=1,2$, denotes the concentration of species i and S is the nutrient concentration; S_{in} and D denote, respectively, the concentration of substrate in the feed bottle and the dilution rate of the chemostat. The D_i are not necessarily equal to D and can be interpreted as the sum of the dilution rate D and the natural death rate of the species: $D_i = D + a_i$, where $a_i \geqslant 0$. For $i=1,2$, $j=1,2$, $i \neq j$, $\mu_i(S,x_i,x_j)$ denotes the growth rate of species i. This model was considered in a series of paper by Lobry et al. [6, 7]. Our study provides theoretical explanations for the phenomenon, which was numerically observed in [6], where the coexistence holds when only intraspecific interference occurs, whereas it can disappear when the strength of interspecific interference is large enough. On the other hand, our study describes the operating diagram which shows the stability regions, in dependence of the operating parameters D and S_{in}, when all biological parameters are fixed.

For convenience, we use the abbreviations LES for Locally Exponentially Stable steady states in all that follows. The proof of all results may be found in [3]. For $i=1,2$, $j=1,2$, $i \neq j$, we make the following assumptions.

(H1) $\mu_i(0,x_i,x_j)=0$ and $\mu_i(S,x_i,x_j)>0$ for all $S>0$, $x_1 \geqslant 0$ and $x_2 \geqslant 0$.

(H2) $\frac{\partial \mu_i}{\partial S}(S,x_i,x_j) > 0$, $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_i}(S,x_i,x_j) \leqslant 0$ and $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j}(S,x_i,x_j) \leqslant 0$ for all $S>0$, $x_1 \geqslant 0$ and $x_2 \geqslant 0$.

Condition (H1) means that the growth can take place if and only if the substrate is present. Condition (H2) means that the growth rate of each species increases with the concentration of substrate and is inhibited by intra- and interspecific interference.

2. Study of the model

In the following, we study the existence conditions and local stability of all corresponding steady states of (1) that has the following types of steady states:

– $\mathcal{E}_0 = (S_{in},0,0)$, called the washout, where both populations are extinct: $x_1 = x_2 = 0$. This steady state always exists.

– $\mathcal{E}_1 = (\tilde{S}_1,\tilde{x}_1,0)$, where second population is extinct: $x_2=0$ and $\tilde{x}_1>0$.

– $\mathcal{E}_2 = (\tilde{S}_2, 0, \tilde{x}_2)$, where first population is extinct: $x_1 = 0$ and $\tilde{x}_2 > 0$.

– $\mathcal{E}^* = (S^*, x_1^*, x_2^*)$, where both populations survive: $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$.

The components $S = \tilde{S}_i$ and $x = \tilde{x}_i$ of a boundary steady state $\mathcal{E}_i$ are the solutions of equations

$$D(S_{in} - \tilde{S}_i) = D_i \tilde{x}_i, \qquad \mu_i\left(\tilde{S}_i, \tilde{x}_i, 0\right) = D_i.$$

Straightforward calculations show that we have the following result which gives the condition of existence of a boundary steady state $\mathcal{E}_i$.

Proposition 2.1. *Let $\mathcal{E}_i$ be a steady state of (1) with $\tilde{x}_i > 0$ and $x_j = 0$, $j \neq i$. Then $\tilde{S}_i$ is given by $\tilde{S}_i = S_{in} - \frac{D_i}{D}\tilde{x}_i$ where $x_i = \tilde{x}_i$ is the solution of*

$$\mu_i\left(S_{in} - \frac{D_i}{D}x_i, x_i, 0\right) = D_i. \tag{2}$$

This steady state exists if and only if

$$\mu_i(S_{in}, 0, 0) > D_i \tag{3}$$

holds. If it exists then it is unique.

The component $S = S^*$ of a coexistence steady state $\mathcal{E}^*$ is given by $S^* = S_{in} - \frac{D_1}{D}x_1^* - \frac{D_2}{D}x_2^*$ and the components $(x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*)$ must be a solution of

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$f_i(x_1, x_2) := \mu_i\left(S_{in} - \frac{D_1}{D}x_1 - \frac{D_2}{D}x_2, x_i, x_j\right) - D_i, \text{ for } i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ i \neq j. \tag{5}$$

The functions (5) are defined on the set

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{D_1}{D}x_1 + \frac{D_2}{D}x_2 \leqslant S_{in}\right\}. \tag{6}$$

S^* is positive if and only if (4) has a solution in the interior M^o of M, defined by (6). To solve (4) in this open M^o, we need the following result:

Lemme 2.1. *Assume that (3) holds for $i = 1, 2$ and let $\tilde{x}_i$ be a solution of (2). The equation $f_i(x_1, x_2) = 0$ defines a smooth decreasing function*

$$F_i : [0, \tilde{x}_i] \to \mathbb{R}, \quad x_i \mapsto F_i(x_i)$$

such that $F_i(\tilde{x}_i) = 0$ and the graph γ_i of F_i lies in M^o (see Figure 1). More precisely, $(x_1, F_1(x_1)) \in M^o$ [resp. $(F_2(x_2), x_2) \in M^o$] for all $x_i \in (0, \tilde{x}_i)$.

Notice that $F_i : [0, \tilde{x}_i] \to [0, \bar{x}_j]$, $x_i \mapsto F_i(x_i)$, where $\bar{x}_j = F_i(0)$ is the unique solution of

$$\mu_i\left(S_{in} - \frac{D_j}{D}x_j, 0, x_j\right) = D_i. \tag{7}$$

The following four cases must be distinguished (see Fig. 1):

$$\text{Case 1: } \bar{x}_1 > \tilde{x}_1 \quad \text{and} \quad \bar{x}_2 > \tilde{x}_2, \qquad \text{Case 2: } \bar{x}_1 < \tilde{x}_1 \quad \text{and} \quad \bar{x}_2 < \tilde{x}_2, \tag{8}$$

$$\text{Case 3: } \bar{x}_1 < \tilde{x}_1 \quad \text{and} \quad \bar{x}_2 > \tilde{x}_2, \qquad \text{Case 4: } \bar{x}_1 > \tilde{x}_1 \quad \text{and} \quad \bar{x}_2 < \tilde{x}_2. \tag{9}$$

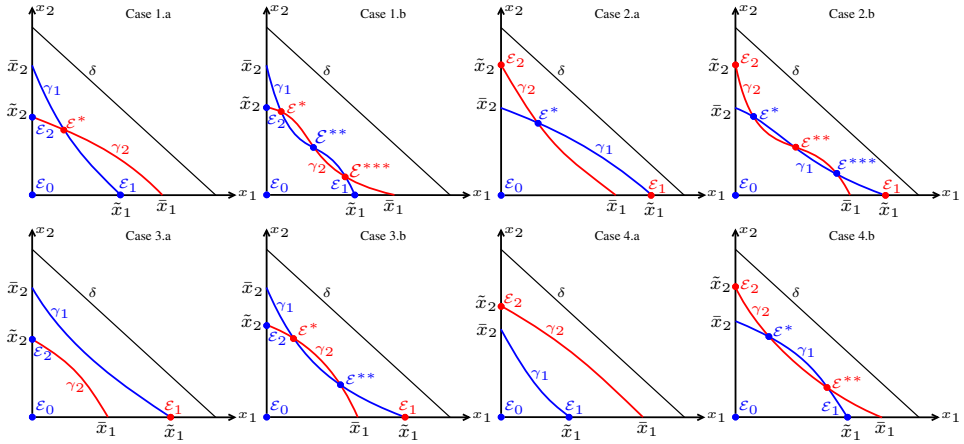


Figure 1: Case 1: (a) unique intersection, (b) an odd number of intersections. Case 2: (a) unique intersection, (b) an odd number of intersections. Case 3: (a) no intersection, (b) an even number of intersections. Case 4: (a) no intersection, (b) an even number of intersections.

Définition 2.1. *A positive steady state $\mathcal{E}^* = (S^*, x_1^*, x_2^*)$ of (1) is said to be blue [resp. red] if and only if, on the right of (x_1^*, x_2^*), the tangent of γ_1 at point (x_1^*, x_2^*) is above [resp. under] the tangent of γ_2 at point (x_1^*, x_2^*).*

Théorème 2.1. *Assume that (H1), (H2) and (3), for $i = 1, 2$ hold.*
1) Blue positive steady states are unstable. If for all S, x_1, x_2,

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} < \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \quad \textit{and} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} < \frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} \tag{10}$$

hold, or $D_1 = D_2 = D$, then red positive steady states are LES, that is to say, positive steady states are alternatively unstable and LES.
2) If Case 1 holds, the system can have generically an odd number of positive steady states, while $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ are unstable. The positive steady states at the left-hand end and right-hand end are red (see Fig. 1, Case 1). If, in addition, for all S, x_1, x_2,

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} < \frac{D_1}{D_2}\frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \quad \textit{and} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} < \frac{D_2}{D_1}\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} \tag{11}$$

hold, then the positive steady state is unique (see Fig. 1, Case 1.a).
3) If Case 2 holds, the system can have generically an odd number of positive steady states, while $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ are LES. The positive steady states at the left-hand end and right-hand end are blue (see Fig. 1, Case 2). If, in addition, for all S, x_1, x_2,

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} > \frac{D_1}{D_2}\frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \quad \textit{and} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} > \frac{D_2}{D_1}\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} \tag{12}$$

hold, then $\mathcal{E}^*$ is unique and unstable (see Fig. 1, Case 2.a).
4) If Case 3 [resp. Case 4] holds, then generically the system has no positive steady state or an even number of positive steady states where $\mathcal{E}_1$ is LES [resp. unstable] and $\mathcal{E}_2$ is unstable [resp. LES]. The positive steady state at the right-hand [resp. left-hand] end, if it exists, is blue (see Fig. 1). If, in addition, (11) or (12) hold, then the system has no positive steady state (see Fig. 1, Case 3.a [resp. Case 4.a]).

3. Operating diagram

The operating diagram shows how the system behaves when we vary the two control parameters S_{in} and D in (1). We restrict our attention to the case where $D_1 = D_2 = D$ and the growth function μ_i is the modified Monod function

$$\mu_i(S, x_i, x_j) = \frac{m_i S}{k_i + S + \beta_i(x_i + \alpha_i x_j)}, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

where m_i denotes the maximum growth rate, k_i the half-saturation constant; β_i the inhibition factor for the growth of the species i due to intra- and interspecific interference; α_i is a nonnegative parameter which denotes the strength of the interspecific interference. Let Υ_i be the curve of equation $D = \mu_i(S_{in}, 0, 0)$, $i = 1, 2$,

$$\Upsilon_i = \{(S_{in}, D) : D = \mu_i(S_{in}, 0, 0)\}.$$

Recall that $\tilde{x}_i$ and $\bar{x}_i$ are defined as the solutions of (2) and (7), respectively. These equations become now

$$\mu_i\left(S_{in} - \tilde{x}_i, \tilde{x}_i, 0\right) = D, \qquad \mu_j\left(S_{in} - \bar{x}_i, 0, \bar{x}_i\right) = D, \qquad i = 1, 2,\ j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Therefore, $\tilde{x}_i$ and $\bar{x}_i$ depend on the operating parameters S_{in} and D. We denote them by $\tilde{x}_i(S_{in}, D)$ and $\bar{x}_i(S_{in}, D)$. Define the sets

$$\Upsilon_i^c = \{(S_{in}, D) : \tilde{x}_i(S_{in}, D) = \bar{x}_i(S_{in}, D)\},$$

which are curves in the generic case. In Fig. 2, the curves Υ_i and Υ_i^c, $i = 1, 2$ separate the operating plane (S_{in}, D) in at most six regions, labeled as $\mathcal{I}_k$, $k = 0, \ldots, 5$. The regions $\mathcal{I}_4$ and $\mathcal{I}_5$ are empty in case (a) and the regions $\mathcal{I}_4$ and $\mathcal{I}_3$ are empty in case (b) and (d), respectively. Table 1 shows the existence and stability of steady states in the regions $\mathcal{I}_k$, of the operating diagram, in Fig. 2.

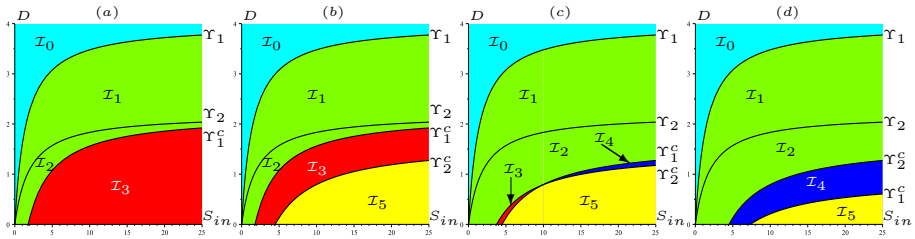


Figure 2: Operating diagrams of (1). Cyan color represents the region of washout ($\mathcal{E}_0$ is LES), red color represents the region of coexistence ($\mathcal{E}^*$ is LES), blue color represents the region of bi-stability ($\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ are LES), green [resp. yellow] color represents a region of competitive exclusion ($\mathcal{E}_1$ [resp. $\mathcal{E}_2$] is LES).

Fig. 2 shows how this region of coexistence changes and even disappears when interspecific interference is added in the model. For instance, if the first species interspecific coefficient is fixed, then varying the second species interspecific coefficient leads to a reduction of the coexistence region $\mathcal{I}_3$ until the occurrence of bi-stability region $\mathcal{I}_4$, followed by the disappearance of the coexistence region $\mathcal{I}_3$ (see Fig. 2(a-b-c-d)).

Region	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}^*$
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_0$	S			
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_1$	U	S		
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_2$	U	S	U	
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_3$	U	U	U	S
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_4$	U	S	S	U
$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_5$	U	U	S	

Table 1: Existence and local stability of steady states.

4. Conclusion

In this work, we analyzed the effect of the intra- and interspecific interference on the coexistence of microbial species in a chemostat, by allowing a large classe of response functions with differential removal rates. For this class of response functions, we distinguished four cases, (8) and (9), which are qualitatively similar to the cases encountered in the classical Lotka-Volterra competition model. When the intraspecific interference is dominant with respect to interspecific interference there exists at most one positive steady state, that is LES if it exists. Inversely, when the intraspecific interference is dominated by interspecific interference, there exists at most one positive steady state, that is unstable if it exists. The operating diagrams show how regions of coexistence and bi-stability of steady states vary with intra- and interspecific interference. More precisely, increasing the values of interspecific interference terms reduces the region of coexistence and increases the regions of competitive exclusion with the occurrence of a bi-stability region.

Acknowledgments

We thank the financial support of PHC UTIQUE project No. 13G1120 and of TREASURE euro-Mediterranean research network (`http://www.inra.fr/treasure`).

5. References

[1] N. ABDELLATIF, R. FEKIH-SALEM, T. SARI, "Competition for a single resource and coexistence of several species in the chemostat", *Math. Biosci. Eng.*, vol. 13, 631–652, 2016.

[2] R. FEKIH-SALEM, J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT, T. SARI, "Extensions of the chemostat model with flocculation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 397, 292–306, 2013.

[3] R. FEKIH-SALEM, C. LOBRY, T. SARI, "A density-dependent model of competition for one resource in the chemostat", *J. Math. Biosci.*, will appear, 2017.

[4] R. FEKIH-SALEM, A. RAPAPORT, T. SARI, "Emergence of coexistence and limit cycles in the chemostat model with flocculation for a general class of functional responses", *Appl. Math. Modell.*, vol. 40, 7656–7677, 2016.

[5] S.R. HANSEN, S.P. HUBBELL, "Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes", *Science*, vol. 207, 1491–1493, 1980.

[6] C. LOBRY, J. HARMAND, "A new hypothesis to explain the coexistence of n species in the presence of a single resource", *C. R. Biol.*, vol. 329, 40–46, 2006.

[7] C. LOBRY, F. MAZENC, A. RAPAPORT, "Persistence in ecological models of competition for a single resource", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, vol. 340, 199–204, 2005.

[8] H.L. SMITH, P. WALTMAN, "The Theory of the Chemostat, Dynamics of Microbial Competition ", *Cambridge University Press*, 1995.

On a three-step model of Anaerobic digestion with biomass mortality

N. Abdellatif [a,b]

[a] Université de Manouba, ENSI, Campus Universitaire, 2010 Manouba, Tunisie
[b] Université de Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie

ABSTRACT. In this work, we analyse a mathematical model of digestion anaerobic in the chemostat with enzymatic degradation of an organic substrate under a solid form. We study the existence and the stability of steady states of the model considering monotonic growth rates and positive mortality terms. The analysis of the 3-step model is derived from a smaller order sub-model. We prove that the considered sub-model may exhibit bistability. We show the existence of at most four positive steady state for the 3-step model and we prove that introducing decay in the model preserves the stability of the steady states.

RÉSUMÉ. On analyse dans ce travail un modèle mathématique de digestion anaérobie dans un chemostat, avec dégradation enzymatique d'un substrat organique sous forme solide. On étudie l'existence et la stabilité des équilibres du modèle en considérant des taux de croissance monotones et des termes de mortalité. L'analyse du modèle à trois étapes est déduite d'un sous-modèle de plus faible dimension. On montre que ce sous-modèle peut présenter de la bistabilité. On montre l'existence d'au plus quatre équilibres positifs pour le modèle à trois étapes et on prouve que l'ajout des termes de mortalité préserve la stabilité des équilibres.

KEYWORDS : Chemostat, Coexistence, Competition, Enzymatic degradation, Hydrolysis, Mortality, Bistability.

MOTS-CLÉS : Chemostat, Coexistence, Compétition, Dégradation enzymatique, Hydrolyse, Mortalité, Bistabilité.

1. Introduction

Anaerobic digestion is a sequential process where complex organic material is degraded to methane and carbon dioxide (biogas) in absence of oxygen. This process involves the steps of hydrolysis, acidogenesis, acetogenesis and methanogenesis, [2]. Several mathematical models of the anaerobic digestion process are known, see in instance [1, 3, 4, 7]. Most of these studies have mainly been focused on acidogenesis, acetogenesis and methanogenesis, while less attention has been paid to the different processes taking place during hydrolysis. The microbial enzymatic activity in these processes have traditionally been considered constant, without involving an explicit hydrolytic microbial compartment, or simplified to a single first-order kinetics for the substrate biodegradation [5]. However, it has been shown that the hydrolytic bacteria can affect the biomass concentration and activity [8].
In this paper, we are interested in a model based on a three-stage reaction scheme involving hydrolysis, see [7] and [6]. To accurately describe the hydrolysis stage, we consider that the substrate compartment is divided into two parts : slowly degradable substrate X_0 and readily biodegradable substrate S_1, both be degraded by the same biomass X_1.
The three step model reads :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{X}_0 &=& D(X_{0in}-X_0)-\mu_0(X_0)X_1,\\ \dot{S}_1 &=& D(S_{1in}-S_1)+k_0\mu_0(X_0)X_1-k_1\mu_1(S_1)X_1,\\ \dot{X}_1 &=& \Big(\mu_1(S_1)-D-a_1\Big)X_1,\\ \dot{S}_2 &=& D(S_{2in}-S_2)+k_2\mu_1(S_1)X_1-k_3\mu_2(S_2)X_2,\\ \dot{X}_2 &=& \Big(\mu_2(S_2)-D-a_2\Big)X_2, \end{array}\right. \tag{1}$$

where D denotes the dilution rate of the chemostat, X_0 the concentration of soluble organics, with X_{0in} the concentration in the input. S_j, $j=1,2$, denote the concentrations of the substrates in the effluent, (the easily biodegradable COD and the Volatile Fatty Acids, respectively), S_{jin} are the input substrate concentrations. X_1 and X_2 denote the concentration of acidogenic and methanogenic bacteria, respectively. μ_0 is the specific growth rate of the soluble organics and $\mu_i, i=1,2$, are the specific growth rates of acidogenic and methanogenic bacteria, respectively. Finally, $k_i, i=0\dots3$, denote the pseudo-stochiometric coefficients associated to the biological reactions, a_0 and a_1 are non-negative decay coefficients for acidogenic bacteria and methanogenic bacteria, respectively. Model (1) has been studied in [6], in the case where decay effects are not taken into account, (i.e. $a_0=a_1=0$), for monotonic and non-monotonic growth rates $\mu_i, i=0,1$ and for a density dependent growth rate μ_0. In the following, we analyse model (1) assuming that the growth rates $\mu_i, i=0,1$ are monotonic and μ_2 is non-monotonic. More precisely, let us denote $D+a_1=D_1$ and $D+a_2=D_2$ and assume that:

H0: For all $X_0 \geqslant 0$, $\mu_0(X_0)\geqslant 0$, $\mu_0(0)=0$, $\mu_0'(X_0)>0$ and $\mu_0''(X_0)\leqslant 0$, for all $X_0\in\,]0,X_{0in}[$.

H1: For all $S_1\geqslant 0$, $\mu_1(S_1)\geqslant 0$, $\mu_1(0)=0$ and $\mu_1'(S_1)>0$.

H2: For all $S_2\geqslant 0$, $\mu_2(S_2)\geqslant 0$, $\mu_2(0)=0$ and $\exists S_2^M>0$ such that $\mu_2'(S_2)\geqslant 0$, for all $0\leqslant S_2\leqslant S_2^M$ and $\mu_2'(S_2)<0$, for all $S_2>S_2^M$.

Notice that in the case where the function $\mu_0(\cdot)$ is linear or of Monod type, the assumption **H0** is satisfied. If the equation $\mu_1(S_1)=D_1$ has a solution, we denote $\lambda_1=\mu_1^{-1}(D_1)$,

otherwise $\lambda_1 = +\infty$. When the equation $\mu_2(S_2) = D_2$ admits two solutions, they're labeled $\lambda_2^i, \quad i = 1, 2$, such that $\lambda_2^1 < \lambda_2^2$. Otherwise, $\lambda_2^1 = \lambda_2^2 = +\infty$. Since the first three equations of (1) are independent of variables X_2 and S_2, they can decoupled of the last two ones. Thus, we first give the description of the steady states of sub-model (2).

2. Study of the three dimensional sub-model.

In the following, we focus on the study of the first three equations of system (1):

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = D(X_{0in} - X_0) - \mu_0(X_0)X_1, \\ \dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) + k_0\mu_0(X_0)X_1 - k_1\mu_1(S_1)X_1, \\ \dot{X}_1 = \Big(\mu_1(S_1) - D_1\Big)X_1. \end{cases} \tag{2}$$

The steady states of model (3), are obtained by solving the system:

$$\begin{cases} D(X_{0in} - X_0) - \mu_0(X_0)X_1 & = 0, \\ D(S_{1in} - S_1) + k_0\mu_0(X_0)X_1 - k_1\mu_1(S_1)X_1 & = 0, \\ \Big(\mu_1(S_1) - D_1\Big)X_1 & = 0. \end{cases} \tag{3}$$

The washout steady state $F_0 = (X_{0in}, S_{1in}, 0)$, always exists. To look for positive steady states, we consider the intersection of the curve of the function defined by:

$$\xi(X_0) = \frac{D(X_{0in} - X_0)}{\mu_0(X_0)}$$

and the line Δ of equation : $\delta(X_0) = \dfrac{D}{k_1 D_1}\Big[(S_{1in} - \lambda_1) + k_0(X_{0in} - X_0)\Big]$. We first prove the next results:

Lemme 2.1. *Under assumption* **H0***, the function $\xi(\cdot)$ vanishes on X_{0in}, is decreasing and convex.*

Lemme 2.2. *The equation $\xi'(X_0) = -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}$ has a unique solution $\bar{X}_0 \in]0, X_{0in}[$ if and only if*

$$\xi'(X_{0in}) > -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}.$$

Notice that $\xi'(X_{0in}) > -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}$ is equivalent to $\mu_0(X_{0in}) > \frac{k_1 D_1}{k_0}$. Thus, we must distinguish the cases $\mu_0(X_{0in}) > \frac{k_1 D_1}{k_0}$ and $\mu_0(X_{0in}) \leq \frac{k_1 D_1}{k_0}$.

If $\mu_0(X_{0in}) > \frac{k_1 D_1}{k_0}$, the line Δ intersects the curve of the function ξ, in at most two points X_0^i, $i = 1, 2$. We denote $X_1^i = \xi(X_0^i)$ and $F_1^i = (X_0^i, \lambda_1, X_1^i)$, $i = 1, 2$, the corresponding steady states. By Lemma 2.2, there exists a unique solution $\bar{X}_0 \in]0, X_{0in}[$ of equation $\xi'(X_0) = -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}$. Let $\bar{X}_1 = \xi(\bar{X}_0)$ and $\bar{F}_1 = (\bar{X}_0, \lambda_1, \bar{X}_1)$ the corresponding steady state of (2). We denote $\bar{S}_{1in}$ the value of S_{1in} for which

$$\bar{X}_1 = \delta(\bar{X}_0) = -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}\bar{X}_0 + \frac{D}{k_1 D_1}\Big[(\bar{S}_{1in} - \lambda_1) + k_0 X_{0in}\Big]$$

Thus, we have

$$\bar{S}_{1in} = (\frac{k_1 D_1}{D}\bar{X}_1 + k_0\bar{X}_0 + \lambda_1) - k_0 X_{0in}.$$

and we can show the following result :

Proposition 2.1. *Assume that $\mu_0(X_{0in})>\frac{k_1D_1}{k_0}$, model (2) has at most three steady states:*

– The washout steady state $F_0 = (X_{0in}, S_{1in}, 0)$, which always exists.

– Two positive steady state $F_1^i = \left(X_0^i, \lambda_1, X_1^i\right)$, $i = 1, 2$ with X_0^i are the solutions of $\xi(X_0) = \delta(X_0)$ and $X_1^i = \xi(X_0^i)$, which exist if $\max(0, \bar{S}_{1in}) < S_{1in} < \lambda_1$.

– F_1^1 exists and is unique if $\lambda_1 \leqslant S_{1in}$.

– A positive steady state $\bar{F}_1 = \left(\bar{X}_0, \lambda_1, \bar{X}_1\right)$ where $\bar{X}_0$ is the solution of equation $\xi'(X_0) = -\frac{k_0 D}{k_1 D_1}$ and $\bar{X}_1 = \xi(\bar{X}_0)$. It exists if $S_{1in} = \bar{S}_{1in}$.

Now, if $\mu_0\left(X_{0in}\right) \leq \frac{k_1 D_1}{k_0}$, the intersection of the line Δ with the curve of the function ξ is either empty or has a unique point. We deduce that:

Proposition 2.2. *Assume that $\mu_0(X_{0in})\leq\frac{k_1D_1}{k_0}$, model (2) has at most two steady states:*

– The washout steady state $F_0 = (X_{0in}, S_{1in}, 0)$, which always exists.

– The positive steady state $F_1^1 = \left(X_0^1, \lambda_1, X_1^1\right)$which exists if $\lambda_1 < S_{1in}$. When it exists , it is unique.

In the following, we study the asymptotic behavior of steady states. By calculating the eigenvalues of the Jacobian matrix at the steady state F_0 and using the Routh-Hurwitz criterium for F_1^1 and F_1^2, we can prove the next result:

Proposition 2.3.

– F_0 is LES if and only if $S_{1in} < \lambda_1$.

– If F_1^1 exists, then it is LES.

– If F_1^2 exists, then it is unstable.

It should be noticed that all these results are similar to those obtained in the case where $a_0 = a_1 = 0$, see [6].

3. Analysis of the three-stage model

In the following, we study the three-stage model (1) under assumptions **H0**-**H2**.

3.1. Existence of steady states

To each steady state $F = (X_0, S_0, X_1)$ of the sub-model (3) corresponds a steady state $E = (X_0, S_0, X_1, S_2, X_2)$ of model (1) where (S_2, X_2) is solution of:

$$\begin{array}{lcl} D(S_{2in} - S_2) + k_2\mu_1(S_1)X_1 - k_3\mu_2(S_2)X_2 & = & 0, \\ \left(\mu_2(S_2) - D_2\right) X_2 & = & 0. \end{array} \tag{4}$$

System (4) has three solutions $(S_2, X_2) = (S_{2in}, 0)$ and (λ_2^j, X_2^j), $j = 1, 2$. The steady states of system (1) are given in the two next results. We start by the case where $\mu_0\left(X_{0in}\right) \leq \frac{k_1 D_1}{k_0}$.

Proposition 3.1. *Assume that $S_{1in} > \lambda_1$, the steady states of model (1) are given by:*

– $E_0^0 = (X_{0in}, S_{1in}, 0, S_{2in}, 0)$ which always exists.

– $E_0^j = (X_{0in}, S_{1in}, 0, \lambda_2^j, X_2^j)$, $j = 1, 2$, with $X_2^j = \frac{D}{k_3 D_2}(S_{2in} - \lambda_2^j)$, which exist if and only if $S_{2in} > \lambda_2^j$.

– $E_1^0 = (X_0^1, \lambda_1, X_1^1, S_{2in}^1, 0)$ *where* X_0^1 *is the unique solution of* $\xi(X_0) = \delta(X_0)$, $X_1^1 = \delta(X_0^1)$, $S_{2in}^1 = S_{2in} + \dfrac{k_2 D_1}{D} X_1^1$. E_1^0 *always exists.*

– $E_1^j = (X_0^1, \lambda_1, X_1^1, \lambda_2^j, X_2^j)$, $j = 1, 2$, *with* $X_2^j = \frac{D}{k_3 D_2}(S_{2in} - \lambda_2^j) + \frac{k_2 D_1}{k_3 D_2} X_1^1$, *which exist if and only if* $S_{2in}^1 > \lambda_2^j$.

In the case $\mu_0(X_{0in}) > \frac{k_0 D}{k_1 D_1}$, we show that:

Proposition 3.2. *Assume that* $\max(0, \bar{S}_{1in}) < S_{1in} < \lambda_1$, *the steady states of model (1) are given by:*

– $E_0^0 = (X_{0in}, S_{1in}, 0, S_{2in}, 0)$ *which always exists.*

– $E_0^j = (X_{0in}, S_{1in}, 0, \lambda_2^j, X_2^j)$, $j = 1, 2$, *with* $X_2^j = \frac{D}{k_3 D_2}(S_{2in} - \lambda_2^j)$, *which exists if and only if* $S_{2in} > \lambda_2^j$.

– $E_i^0 = (X_0^i, \lambda_1, X_1^i, S_{2in}^i, 0)$, $i = 0, 2$, *where* X_0^i *are the solutions of* $\xi(X_0) = \delta(X_0)$, $X_1^i = \delta(X_0^i)$, $S_{2in}^i = S_{2in} + \frac{k_2 D_1}{D} X_1^i$. E_1^0 *and* E_2^0 *always exist.*

– $E_i^j = (X_0^i, \lambda_1, X_1^i, \lambda_2^j, X_2^{i,j})$, $i, j = 1, 2$, *with* $X_2^{i,j} = \frac{D}{k_3 D_2}(S_{2in} - \lambda_2^j) + \frac{k_2 D_1}{k_3 D_2} X_1^i$. E_i^j *exists if and only if* $S_{2in}^i > \lambda_2^j$, *for* $i, j = 1, 2$.

Similarly to the case $a_1 = a_2 = 0$, the three-stage model (1) has at most nine steady states and at most four positive steady states where both species coexist.

3.2. Local stability

Since the system (1) is triangular, the local stability at a steady state E is deduced from the Jacobian matrix of (3) and that of (4). Table 1 gives the existence and stability conditions in the case where $\mu_0(X_{0in}) > \frac{k_1 D_1}{k_0}$ and $S_{1in} > \lambda_1$. The letter S (resp. U) means that the corresponding steady state is LES (resp. unstable). The absence of letter means that the steady-state does not exist.

Condition	Steady states and nature					
	E_0^0	E_0^1	E_0^2	E_1^0	E_1^1	E_1^2
1) $\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in} < S_{2in}^1$	U	U	U	S	S	U
2) $\lambda_2^1 < S_{2in} < S_{2in}^1 < \lambda_2^2$	U	U		U	S	
3) $\lambda_2^1 < S_{2in} < \lambda_2^2 < S_{2in}^1$	U	U		S	S	U
4) $S_{2in} < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^1$	U			S	S	U
5) $S_{2in} < \lambda_2^1 < S_{2in}^1 < \lambda_2^2$	U			U	S	
6) $S_{2in} < S_{2in}^1 < \lambda_2^1 < \lambda_2^2$	U			S		

Table 1: Existence and stability of steady-states of (1) when $S_{1in} > \lambda_1$.

Notice that since $X_0^1 < X_0^2$, then $X_1^1 > X_1^2$ and $S_{2in} < S_{2in}^2 < S_{2in}^1$. In the case $\max(0, \bar{S}_{1in}) < S_{1in} < \lambda_1$, the steady states local stability is described in Table 2.

Condition	Steady states and nature								
	E_0^0	E_0^1	E_0^2	E_1^0	E_2^0	E_1^1	E_1^2	E_2^1	E_2^2
1) $\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in} < S_{2in}^2 < S_{2in}^1$	S	S	U	S	U	S	U	U	U
2) $\lambda_2^1 < S_{2in} < S_{2in}^2 < S_{2in}^1 < \lambda_2^2$	U	S		U	U	S	U		
3) $\lambda_2^1 < S_{2in} < S_{2in}^2 < \lambda_2^2 < S_{2in}^1$	U	S		S	U	S	U	U	
4) $\lambda_2^1 < S_{2in} < \lambda_2^2 < S_{2in}^2 < S_{2in}^1$	U	S		S	U	S	U	U	U
5) $S_{2in} < S_{2in}^2 < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^1$	S			S	U	S		U	
6) $S_{2in} < \lambda_2^1 < S_{2in}^2 < \lambda_2^2 < S_{2in}^1$	S			S	U	S	U	U	
7) $S_{2in} < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^2 < S_{2in}^1$	S			S	U	S	U	U	U
8) $S_{2in} < S_{2in}^2 < \lambda_2^1 < S_{2in}^1 < \lambda_2^2$	S			U	U	S			
9) $S_{2in} < \lambda_2^1 < S_{2in}^2 < S_{2in}^1 < \lambda_2^2$	S			U	U	S	U		
10) $S_{2in} < S_{2in}^2 < S_{2in}^1 < \lambda_2^1 < \lambda_2^2$	S			S	U				

Table 2: Existence and stability of steady-states of (1) when $\max(0, \bar{S}_{1in}) < S_{1in} < \lambda_1$.

4. Conclusion

This work deals with an anaerobic digestion model taking into account the hydrolysis phase and decay effects on the biomass. We proved that, due to the the hydrolytic bacteria, the 3-step model with monotonic growth rates can have up to four coexistence steady states and may exhibit quadri-stability: according to initial conditions, the solution of (1) converges either to the washout, to the extinction of one of the species or to a positive steady state. It has been shown that the steady states stability is preserved when decay terms are added.

Acknowledgments *We thank the financial support of TREASURE euro-Mediterranean research network (*`https://project.inria.fr/treasure/`*).*

5. References

[1] G. Bastin and D. Dochain. On-line estimation and adaptive control of bioreactors, Dynamics of Microbial Competition. A. and N.Y., *Elsevier Science Publishers*, 1991.

[2] D.J. Batstone, K. Keller, I. Angelidaki, S.V. Kalyuzhnyi, S.G. Pavlostathis, A. Rozzi, W.T.M. Sanders, H. Siegrist, V.A. Vavilin. Anaerobic Digestion Model No. 1. *Scientific and Technical Report*, No 13, IWA Publishing, Cornwall, UK, 2002.

[3] B. Benyahia, T.Sari, B.Cherki and J. Harmand. Steady states of an anaerobic wastewater treatment process and their stability. JR. Banga, P. Bogaerts, J. Van Impe, D. Dochain and I. Smets, editors, *11th International Symposium on Computer Applications in Biotechnology (CAB 2010)*, pages 371-376. International Federation of Automatic Control, Leuven : Belgique, 2010.

[4] B. Benyahia, T.Sari, B.Cherki and J. Harmand. Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie. E. Badouel, A. Sbihi and I. Lokpo, editors, *CARI'10, Proceedings of the 10th African Conference on Research in Computer Science and Applied Mathematics*, pages 453-460, INRIA, 2010.

[5] J.A. Eastman, J.F. Ferguson. Solubilization of particulate organic carbon during the acid phase of anaerobic digestion. *J. WPCF* 53, pages 352-366, 1981.

[6] R. Fekih-Salem, N. Abdellatif, T. Sari, J. Harmand Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie à trois étapes, ARIMA Journal, Vol 17, pages 53-71, 2014.

[7] I. Simeonov and S. Stoyanov. Modelling and dynamic compensator control of the anaerobic digestion of organic wastes. *Chem. Biochem. Eng. Q*, volume 17(4), pages 285-292, 2003.

[8] V.A. Vavilin, B. Fernandez, J. Palatsi, X. Flotats, Hydrolysis kinetics in anaerobic degradation of particulate organic material: An overview, *Waste Management* 28, pages 939-951, 2008.

The effect of a new input concentration substrate on a syntrophic relationship of two species in a chemostat

Y. Daoud [a,d] _ **N. Abdellatif** [a,e] _ **T. Sari** [b,f] _ **J. Harmand** [c]

[a] Université de Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie.
[b] Irstea, UMR Itap, 361 rue Jean-François Breton, 34196 Montpellier Cedex, France.
tewfik.sari@irstea.fr
[c] LBE, INRA, 11100, Narbonne, France.
jerome.harmand@inra.fr
[d] Université de Montpellier, Ecole doctorale I2S, UMR MISTEA, France.
daoud_yessmine@yahoo.fr
[e] Université de Manouba, ENSI, Campus Universitaire de Manouba, 2010 Manouba, Tunisie.
nahla.abdellatif@ensi-uma.tn
[f] Université de Haute Alsace, LMIA, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France.

ABSTRACT. In this work, we study a model describing a syntrophic relationship of two microbial species with two input substrates, including both decay terms and inhibition of the first species by an excess of the second substrate. This model can be seen as a reduced and simplified version of the anaerobic digestion process. We give necessary and sufficient conditions on the operating parameters of the system (the dilution rate D and the input concentrations of the two substrates s_0^{in} and s_1^{in}) for the existence and stability of all equilibria. By means of operating diagrams, we describe the asymptotic behavior of the model with respect to the control parameters and we study the effect of the second input substrate.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on étudie un modèle décrivant une relation de syntrophie de deux espèces microbiennes avec deux substrats à l'entrée, incluant des termes de mortalité et l'inhibition de la première espèce par un excès du second substrat. Ce modèle est une version réduite et simplifiée du processus de la digestion anaérobie. On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres opératoires du système (le taux de dilution D et les concentrations à l'entrée des deux substrats s_0^{in} et s_1^{in}) pour l'existence et la stabilité des équilibres. En utilisant les diagrammes opératoires, on décrit le comportement asymptotique du modèle en fonction des paramètres de contrôle et on étudie l'effet du second substrat à l'entrée.

KEYWORDS : Microbial ecosystems, syntrophic relashionship, Mortality, Stability , Operating diagrams.

MOTS-CLÉS : Écosystème microbien, relation de syntrophie, mortalité, stabilité, diagrammes opératoires

1. Introduction

The anaerobic digestion (AD) is a natural process in which organic material is converted into biogas in an environment without oxygen by the action of a microbial ecosystem. It is used for the treatment of waste or wastewater and has the advantage of producing methane or hydrogen under appropriate conditions. To better understand and control this process, many models have been reported in the literature, cf. [2, 3, 4, 6]. In particular, a key biological step has been described as the syntrophic relationship between acid consumers (which produce hydrogen) and hydrogen consumer (which produce methane). Indeed, in degrading the hydrogen - which is inhibiting microbial growth rate - methanogens allow their coexistence with acid producers: this fragile equilibrium has been thoroughly studied in the past years.
In [6], a model of such a syntrophic relationship is studied. Using realistic parameters values, the authors have shown that the introduction of maintenance terms (equivalent to mortality terms in their study) does not destabilize the positive equilibrium of the system. This result has been made generic by Sari and Harmand (cf. [5]) in the sense they have shown that for a large class of kinetics and whatever the model parameters values, the stability of the equilibrium is maintained. However, in these studies, only one substrate input - the input substrate concentration in propionate - was considered. In reality, some hydrogen in produced by other reactions taking place in parallel of the main reactions considered in the model under interest. Thus, in the present study, we investigate the properties of the syntrophy model when a second input - the input substrate concentration in hydrogen - is considered.

2. The model

The two-step model reads:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{ds_0}{dt} & = & D(s_0^{in}-s_0)-\mu_0(s_0,s_1)x_0 \\ \dfrac{dx_0}{dt} & = & -Dx_0+\mu_0(s_0,s_1)x_0-a_0x_0 \\ \dfrac{ds_1}{dt} & = & D(s_1^{in}-s_1)+\mu_0(s_0,s_1)x_0-\mu_1(s_1)x_1 \\ \dfrac{dx_1}{dt} & = & -Dx_1+\mu_1(s_1)x_1-a_1x_1 \end{array}\right. \tag{1}$$

where s_0 and s_1 are the concentration substrates introduced, in the chemostat, with an input concentration s_0^{in} and s_1^{in} respectively, and at dilution rate D. This model includes the maintenance (or decay) terms a_0x_0 and a_1x_1. The functions $\mu_0(.,.)$ and $\mu_1(.)$ satisfy:

H1 For all $s_0, s_1 > 0$, $\mu_0(s_0,s_1) > 0$, $\mu_0(0,s_1) = 0$ and $\sup\limits_{s_0 \geqslant 0} \mu_0(s_0,s_1) < +\infty$.

H2 For all $s_1 > 0$, $\mu_1(s_1) > 0$, $\mu_1(0) = 0$ and $m_1 := \sup\limits_{s_1 \geqslant 0} \mu_1(s_1) < +\infty$.

H3 For all $s_0, s_1 > 0$, $\dfrac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(s_0,s_1) > 0$ and $\dfrac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0,s_1) < 0$.

H4 For all $s_1 > 0$, $\dfrac{d\mu_1}{ds_1}(s_1) > 0$.

For s_1 fixed, we denote: $m_0(s_1) = \sup_{s_0 \geqslant 0} \mu_0(s_0,s_1)$. We assume that:

H5 For all $s_1 > 0$, $\dfrac{dm_0}{ds_1} < 0$.

We can prove that for every non-negative initial condition, the solution of (1) has non-negative components and is positively bounded and thus is defined for every positive t.

3. Steady state analysis and stability

A steady state of (1) is a solution of the following nonlinear algebraic system obtained by setting the right-hand sides of (1) equal to zero.

Since all state variables are concentrations, steady state $E = (s_0, x_0, s_1, x_1)$ exists if and only if all its components are non-negative.
From the second equation of (1) we deduce that: $x_0 = 0 \quad$ or $\quad \mu_0(s_0, s_1) = D + a_0$, and from the fourth equation of (1) we deduce that: $x_1 = 0 \quad$ or $\quad \mu_1(s_1) = D + a_1$.

For the description of the steady states, we need the following notations. Since the function $s_1 \mapsto \mu_1(s_1)$ is increasing, it has an inverse function $y \mapsto M_1(y)$, so that, for all $s_1 \geq 0$ and $y \in [0, m_1[$, $s_1 = M_1(y) \Longleftrightarrow y = \mu_1(s_1)$.
Let s_1 be fixed. Since the function $s_0 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ is increasing, it has an inverse function $y \mapsto M_0(y, s_1)$, so that, for all $s_0, s_1 \geq 0$, and $y \in [0, m_0(s_1)[$,
$s_0 = M_0(y, s_1) \Longleftrightarrow y = \mu_0(s_0, s_1)$.

Thus, we can prove the following proposition:

Proposition 3.1. *Assume that* **H1–H4** *hold. Then, (1) has at most four steady states:*
_ $SS0 = \left(s_0^{in}, 0, s_1^{in}, 0\right)$. *It always exists.*
_ $SS1 = (s_{01}, x_{01}, s_{11}, 0)$, *where* s_{01} *is the solution of the equation:*
$\mu_0(s_{01}, (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}) = D + a_0$, $x_{01} = \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_{01})$ *and* $s_{11} = (s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{01}$.
It exists if and only if $s_0^{in} > M_0\left(D + a_0, s_1^{in}\right)$.
_ $SS2 = (s_{02}, x_{02}, s_{12}, x_{12})$, *where* $s_{02} = M_0\left(D + a_0, M_1(D + a_1)\right)$, $x_{02} = \frac{D}{D+a_0}\left(s_0^{in} - s_{02}\right)$,
$s_{12} = M_1(D + a_1)$ *and* $x_{12} = \frac{D}{D+a_1}\left((s_0^{in} + s_1^{in}) - s_{02} - s_{12}\right)$.
It exists if and only if $s_0^{in} > M_0\left(D + a_0, M_1(D + a_1)\right)$
and $s_0^{in} + s_1^{in} > M_0\left(D + a_0, M_1(D + a_1)\right) + M_1(D + a_1)$.
_ $SS3 = \left(s_0^{in}, 0, M_1(D + a_1), \frac{D}{D+a_1}\left(s_1^{in} - M_1(D + a_1)\right)\right)$.
It exists if and only if $s_1^{in} > M_1(D + a_1)$.

With respect to [5], a new steady state SS3 exists. Notice that, if $s_1^{in} = 0$ the condition $\mu_1(s_1^{in}) > a_1$ is not satisfied and SS3 does not exist. In the next section, we analyse local stability of the steady states.

The stability of the steady states is given by the sign of the real part of eigenvalues of the Jacobian matrix or by the Routh-Hurwitz criteria (in the case of $SS2$). In the following, we use the abreviations LES for locally exponentially stable.

Proposition 3.2. *Assume that assumptions* **H1–H4** *hold. Then, the local stability of steady states of (1) is given by:*
_ $SS0$ *is LES if and only if* $s_1^{in} < M_1(D + a_1)$ *and* $s_0^{in} < M_0\left(D + a_0, s_1^{in}\right)$.
_ $SS1$ *is LES if and only if* $s_0^{in} + s_1^{in} < M_0\left(D + a_0, M_1(D + a_1)\right) + M_1(D + a_1)$.
_ $SS2$ *is LES if it exists.*
_ $SS3$ *is LES if and only if* $s_0^{in} < M_0\left(D + a_0, M_1(D + a_1)\right)$.

4. Operating diagram

The operating diagram shows how the system behaves when we vary the three operating parameters s_0^{in}, s_1^{in} and D. These diagrams are specially useful for the operators, to estimate in particular, for a given a triplet s_0^{in}, s_1^{in} and D, the margin of stability they have, with respect to a region of the space where the washing out of at least one biomass is stable.

Since we have three parameters, we have to fix one of them. In [1], we fixed s_1^{in} and we gave the operating diagram in the plane (s_0^{in}, D). Here, we fix s_0^{in} and we give the operating diagram in the plane (s_1^{in}, D), since s_1^{in} is the new input substrate in model (1). We need to define the functions F_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{rcl} F_1(D) & = & M_1(D + a_1) + M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) \\ F_2(D) & = & M_0(D + a_0, M_1(D + a_1)) \end{array} \tag{2}$$

For s_0 fixed, the function $s_1 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ is decreasing. Thus, it has a decreasing inverse function $z \mapsto M_2(s_0, z)$, so that, for all $s_0, s_1 \geq 0$, and $z \in [0, \sup \mu_0(s_0, \cdot)[$, $s_1 = M_2(s_0, z) \Longleftrightarrow z = \mu_0(s_0, s_1)$.
We define the function: $F_3(D) = M_2\left(s_0^{in}, D + a_0\right)$.

Let $\bar{D}_1$, if it exists, the largest solution of $F_2(D) = s_0^{in}$, $\bar{D}_2 = min(m_1 - a_1, D_2)$ and $\bar{D}_3$ the solution of $F_3(D) = 0$, if it exists.
It is useful to state the next properties on the functions F_i, $i = 1, 2, 3$.

Lemma 4.1. *We assume that $\bar{D}_2 > 0$. Then, we have*
• If $D > \bar{D}_1$ then $F_3(D) < F_1(D) - F_2(D) < F_1(D) - s_0^{in}$.
• If $D < \bar{D}_1$ and $\bar{D}_1 > 0$ then $F_1(D) - s_0^{in} < F_1(D) - F_2(D) < F_3(D)$.
Moreover, the three curves of functions $F_1 - F_2$, $F_1 - s_0^{in}$ and F_3 intersect at $D = \bar{D}_1$ satisfying $\bar{D}_3 > \bar{D}_1$.

From Prop 3.1 and Prop 3.2, we have to distinguish three cases as given in Theorem 4.1.

Theorem 4.1. *The existence and stability properties of the system (1), in the plane (s_1^{in}, D), are given in the following tables:*

Condition	Region	SS0	SS3
$s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^2$	S	
$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in J^3$	U	S

Table 1. *The cases $\bar{D}_1 < 0$, $\bar{D}_3 < 0$ and $0 < D < \bar{D}_2$*

Condition	Region	SS0	SS1	SS3
$s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^1$	U	S	
$F_3(D) < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^2$	S		
$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in J^3$	U		S

Table 2. *The cases $\bar{D}_1 < 0$, $\bar{D}_3 > 0$ and $0 < D < \bar{D}_2$*

	Conditions	Region	SS0	SS1	SS2	SS3
	$s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^1$	U	S		
$\bar{D}_1 < D$	$F_3(D) < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^2$	S			
	$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in J^3$	U			S
	$F_3(D) < s_1^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in J^4$	U		S	U
$D < \bar{D}_1$	$F_1(D) - F_2(D) < s_1^{in} < F_3(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^5$	U	U	S	U
	$F_1(D) - s_0^{in} < s_1^{in} < F_1(D) - F_2(D)$	$(s_1^{in}, D) \in J^6$	U	U	S	
	$s_1^{in} < F_1(D) - s_0^{in}$	$(s_1^{in}, D) \in J^7$	U	S		

Table 3. *The cases* $\bar{D}_1 > 0$, $\bar{D}_3 > 0$ *and* $0 < D < \bar{D}_2$

We define by Γ_0 the curve of the function $s_1^{in} = F_1(D) - s_0^{in}$, Γ_1 the curve of the function $s_1^{in} = F_1(D) - F_2(D)$ and Γ_2 the curve of the function $s_1^{in} = F_3(D)$. These curves with the line $D = \bar{D}_1$ separate the operating plane (s_1^{in}, D) in at most seven regions as shown in Fig. 3.

5. Simulations

For the simulations, we use the following growth functions:

$$\mu_0(s_0, s_1) = \frac{m_0 s_0}{K_0 + s_0} \frac{1}{1 + s_1/K_i}, \quad \mu_1(s_1) = \frac{m_1 s_1}{K_1 + s_1}$$

For the operating diagrams in Figure 1 and 2, we use the parameters of Table 3 of [5] and obtained from Table 1 of [6].

Figure 1 and Figure 2 illustrate the operating diagram for different values of s_0^{in}.

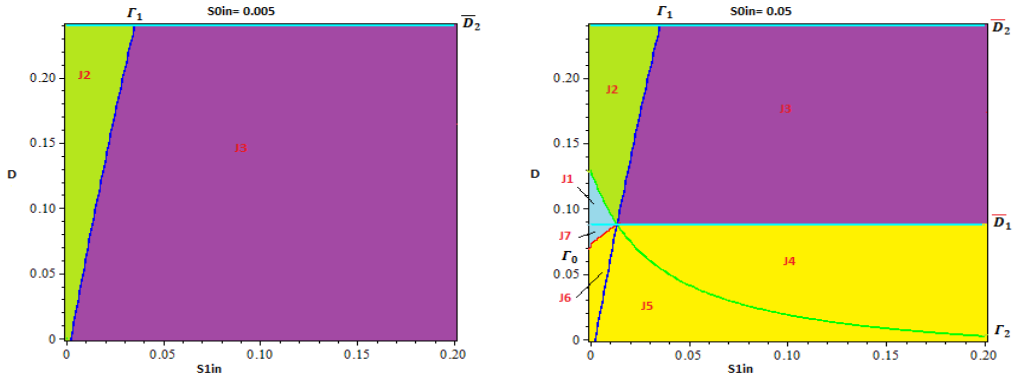


Figure 1. *Operating diagram of (1) for* $s_0^{in} = 0.005$ *at left and for* $s_0^{in} = 0.05$ *at right*

When s_0^{in} increases, $\bar{D}_1$ increases and new regions $J_4, \cdots, J_6$ appear under $\bar{D}_1$ and Γ_0. This regions correspond to the stability region of the coexistence steady state $SS2$.

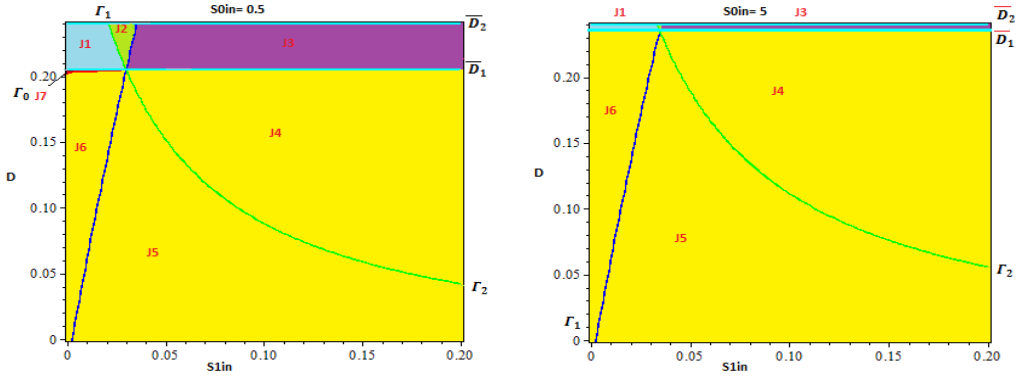


Figure 2. *Operating diagram of (1) for $s_0^{in} = 0.5$ at left and for $s_0^{in} = 5$ at right*

Conclusion

We have analyzed the model of [5] considering a new input s_{1in}. We have highlighted the existence of a new equilibrium point corresponding to the washing out of the first species and the existence of the second one. In all cases, we have shown that, whatever the region of space considered, there exists only one LES steady state. These diagrams can be useful to interpret experimental results. J_4, J_5 and J_6 are the regions of stability of the coexistence steady-state.

Acknowledgements

The authors thank the Euromed $3+3$ project TREASURE (http://www.inra.fr/treasure) and the project PHC- UTIQUE $13G1120$ who partly financed this research.

6. References

[1] Y. DAOUD, N. ABDELLATIF, T. SARI, J. HARMAND, " Steady state analysis of a syntrophic association of two species in a chemostat: The effect of a new input concentration subsrate ", *Fourth international conference on complex dynamical systems in life sciences: Modeling and analysis, Agadir 26-28 October 2016, Morocco*.

[2] M. EL HAJJI, F. MAZENC, J. HARMAND, "A mathematical study of a syntrophic relationship of a model of anaerobic digestion process", *Math. Biosci. Eng*, vol. 7, num. 641-656, 2010.

[3] R. KREIKENBOHM, E. BOHL, "A mathematical model of syntrophic cocultures in the chemostat", *FEMS Microbiol. Ecol.*, vol. 38, num. 131-140, 1986.

[4] T. SARI, M. EL HAJJI, J. HARMAND, "The mathematical analysis of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat", *Math. Bio. Eng*, vol. 9, num. 627-645, 2012.

[5] T. SARI, J. HARMAND, "A model of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat including maintenance", *Math. Biosci. Eng*, vol. 275, num. 1-9, 2016.

[6] A. XU, J. DOLFING, T.P. CURTIS, G. MONTAGUE, E. MARTIN, "Maintenance affects the stability of a two-tiered microbial 'food chain"', *J. Theoret. Biol.*, vol. 276, num. 35-41, 2011.

Analysis of a model of flocculation in the chemostat

T. Sari[a,c,*] — R. Fekih-Salem [b,d]

[a] IRSTEA, UMR Itap, 361 rue Jean-François Breton, 34196 Montpellier, France
[b] University of Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisia
[c] University of Haute Alsace, LMIA, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
[d] University of Monastir, ISIMa, BP 49, Av Habib Bourguiba, 5111 Mahdia, Tunisia
[*] Corresponding author.
E-mail addresses: tewfik.sari@irstea.fr (T. Sari), radhouene.fekihsalem@isima.rnu.tn (R. Fekih-Salem).

ABSTRACT. A model of the chemostat involving planktonic and attached bacteria competing for a single nutrient is considered. We study this flocculation model with monotonic growth rates and same removal rates. We show that this model has at most one positive steady state that is stable as long as it exists where planktonic and attached bacteria can coexist. According to control parameters, the operating diagram illustrates the washout and coexistence regions that depend only on the growth rate of planktonic bacteria. Indeed, flocculation process affects only the density of isolated and attached bacteria at steady state.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère un modèle du chémostat incluant une seule espèce composée de bactéries planctoniques et attachées en compétition pour une seule ressource. Nous étudions ce modèle de floculation avec des taux de croissance monotones et le même taux de disparition. Nous montrons que ce modèle admet au plus un équilibre positif qui est stable dès qu'il existe où les bactéries planctoniques et attachées peuvent coexister. Selon les paramètres de contrôle, le diagramme opératoire illustre les régions de lessivage et de coexistence qui dépendent que du taux de croissance des bactéries planctoniques. En effet, le processus de floculation affecte seulement la densité des bactéries isolées et attachées à l'équilibre.

KEYWORDS : Bifurcation, Chemostat, Flocculation, Operating diagram

MOTS-CLÉS : Bifurcation, Chémostat, Floculation, Diagrammes opératoires

1. Introduction

Flocculation is a process wherein microorganisms isolated or planktonic bacteria cluster together to form new flocs and reversibly these flocs can split and liberate isolated bacteria [9]. The attachment of planktonic bacteria could be also on a wall as biofilms [1]. In order to understand these flocculation phenomena and predict the outcome of system, several extensions of the well-known chemostat model [6, 8] have been proposed and studied in the literature by considering two compartments of isolated and attached biomass for each species. This flocculation mechanism can explain the coexistence between species when the most competitive species inhibits its growth by the formation of flocs [3, 4, 6, 7]. Indeed, the flocs consume less substrate than isolated bacteria since they have less access to substrate, given that this access to substrate is proportional to the outside surface of flocs.

In this paper, we consider the flocculation model proposed in [3] where planktonic bacteria of density u can stick with isolated bacteria or flocs of density v to form new flocs, with rate $a(u+v)u$, (a is a positive constant) and that flocs can split and liberate an isolated bacteria, with rate bv (b is a positive constant). With same removal rate, the model take the form

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{S} & = & D(S_{in}-S)-f(S)u-g(S)v \\ \dot{u} & = & [f(S)-D]u-a(u+v)u+bv \\ \dot{v} & = & [g(S)-D]v+a(u+v)u-bv \end{array}\right. \tag{1}$$

where $S(t)$ denotes the concentration of nutrient in the culture at time t; $u(t)$ and $v(t)$ denote, respectively, the concentration of planktonic and attached bacteria at time t; $f(S)$ and $g(S)$ represent, respectively, the per-capita growth rates of planktonic and attached bacteria; S_{in} and D denote, respectively, the input concentration of the limiting nutrient and the dilution rate of the chemostat. In [3], model (1), with distinct removal rates, has been studied only in the case where attachment and detachment dynamics are fast compared to growth dynamics. Using singular perturbation methods, the corresponding reduced model is a density-dependent model.

The model (1) has been studied in [6]. For the more general case where removal rates are distinct the reader is refereed to [2]. In Section 2, we present the results of [6] and we recall some of the results of [2]. In Section 3, we give the operating diagram of (1). The operating diagram is a bifurcation diagram that describes the system behavior when the two control parameters S_{in} and D vary, and all biological parameters are fixed. The operating diagram has not been considered in [2, 6].

We assume the following hypothesis:

(H1) $f(0)=g(0)=0$ and $f'(S)>0$ and $g'(S)>0$ for all $S>0$.

(H2) $f(S)>g(S)$ for all $S>0$.

Hypothesis (H1) means that the growth can take place if and only if the substrate is present. In addition, the growth rates of isolated and attached bacteria increase with the concentration of substrate. Hypothesis (H2) means that the bacteria in flocs consume less substrate than isolated bacteria, this means that a lower specific growth rate. Note that system (1) is well defined: its solutions remain non-negative and positively bounded for any non-negative initial condition. In the following, we shall use for convenience the abbreviation LES for Locally Exponentially Stable steady states.

2. Steady state and stability analysis

From (H1), when equations $f(S) = D$ and $g(S) = D$ have solutions, they are unique and we define the usual *break-even concentrations*

$$\lambda_u = f^{-1}(D) \quad \text{and} \quad \lambda_v = g^{-1}(D).$$

In this case, from (H2), one has $\lambda_u < \lambda_v$. Otherwise, $f(S) = D$ or $g(S) = D$ have no solution, we put $\lambda_u = \infty$ or $\lambda_v = \infty$. The steady states of (1) are given by solving equations $\dot{S} = 0$, $\dot{u} = 0$ and $\dot{v} = 0$. From equation $\dot{u} = 0$, if $u = 0$, it follows that $v = 0$. From equation $\dot{v} = 0$, if $v = 0$, then $u = 0$. Hence, we cannot have a steady state of extinction only of planktonic or attached bacteria. Therefore, besides the washout steady state

$$E_0 = (S_{in}, 0, 0)$$

where both planktonic or attached bacteria are extinct, the system can have a positive steady state of coexistence

$$E_1 = (S^*, u^*, v^*)$$

where $S^* > 0$, $u^* > 0$ and $v^* > 0$. We define the following functions:

$$U(S) = \frac{\varphi(S)\,(\psi(S) - b)}{a\,[\psi(S) - \varphi(S)]},\ V(S) = \frac{\varphi^2(S)\,(\psi(S) - b)}{a\,[\varphi(S) - \psi(S)]\,\psi(S)},\ H(S) = D\frac{\varphi(S)(\psi(S) - b)}{a\psi(S)},$$

where

$$\varphi(S) = f(S) - D, \qquad \psi(S) = g(S) - D.$$

From $\varphi(S) > 0$ and $\psi(S) < 0$ on $I =]\lambda_u, \lambda_v[$, we deduce that functions $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ and

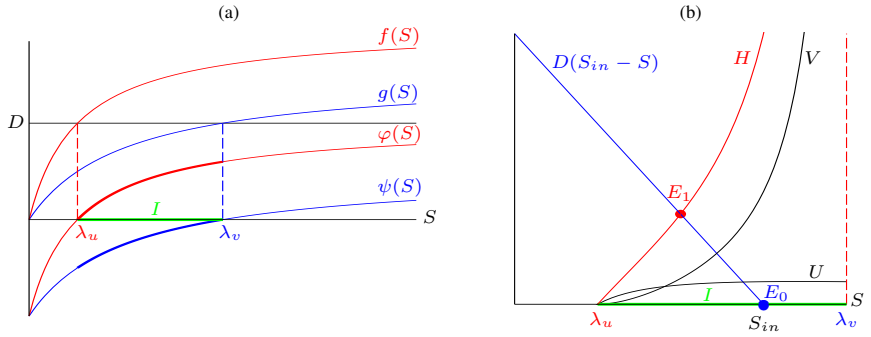


Figure 1: (a) Definition of the interval $I =]\lambda_u, \lambda_v[$. (b) The graphs of functions H, U and V and H showing the existence of a unique positive steady state. Red color is used for LES steady states and blue color for unstable steady states.

$H(\cdot)$ are positive on I (see Figure 1). Moreover, $H(\lambda_u) = U(\lambda_u) = V(\lambda_u) = 0$ and $H(\cdot)$, $V(\cdot)$ tend to infinity as S tends to λ_v (see Figure 1(b)).

Straightforward computations, see [2, 6], show that the positive steady state is $E_1 = (S^*, u^*, v^*)$ where S^* is the solution of equation

$$D(S_{in} - S^*) = H(S^*), \tag{2}$$

and $u^* = U(S^*)$, $v^* = V(S^*)$.

Proposition 1. *Assume that assumptions (H1)-(H2) hold. Then system (1) has at most two steady states:*

The washout $E_0 = (S_{in}, 0, 0)$, that always exists. It is LES if and only if $f(S_{in}) < D$.

The positive steady state, $E_1 = (S^*, u^*, v^*)$, that exists if and only if $f(S_{in}) > D$. If it exists, it is unique and LES.

Proof. The stability of E_0 is easy to obtain. For the existence and uniqueness of E_1, straightforward computations show that the function H is increasing. Therefore E_1 exists, and is unique, if and only if $S_{in} > \lambda_u$ which is equivalent to $f(S_{in}) > D$. Since $z = S + u + v$ satisfies $\dot{z} = D(S_{in} - z)$, it tends to S_{in}. Therefore, (1) is reduced to the two dimensional system

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{du}{dt} & = & \varphi(S_{in} - u - v)u - a(u + v)u + bv \\ \frac{dv}{dt} & = & \psi(S_{in} - u - v)v + a(u + v)u - bv. \end{array} \right.$$

The Jacobian matrix at (u^*, v^*) is

$$J^* = \left[\begin{array}{ll} -u^*\varphi'(s^*) + \varphi(s^*) - a(2u^* + v^*) & -u^*\varphi'(s^*) - au^* + b \\ -v^*\psi'(s^*) + a(2u^* + v^*) & -v^*\psi'(s^*) + \psi(s^*) + au^* - b \end{array} \right].$$

Straightforward calculations show that

$$\mathrm{Tr}J^* = -u^*\varphi'(s^*) - v^*\psi'(s^*) - b\frac{v^*}{u^*} - a\frac{(u^* + v^*)u^*}{v^*} < 0,$$

$$\mathrm{Det}J^* = Au^*\varphi'(s^*) + Bv^*\psi'(s^*) + C,$$

where

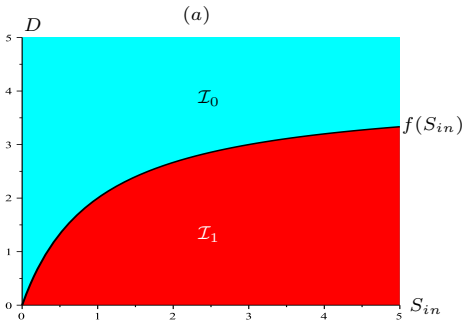
$$A = a\frac{(u^* + v^*)^2}{v^*} > 0, \quad B = b\frac{u^* + v^*}{u^*} > 0, \quad C = -\varphi(s^*)\left(\psi(s^*) - b\right) > 0.$$

Therefore E_1 is LES if it exists. See [6] for more details. □

In the case where removal rates are distinct, the function H is not necessarily increasing, nor we have necessarily $\lambda_u < \lambda_v$, so that equation (2) can have multiple solutions. Therefore, the system can have multiple positive steady states [2]. In [2] it is shown that a positive steady state is LES if and only if $H'(S^*) > -D$. Therefore, the result of Prop. 1 is a particular case of the results in [2]. The Table in Figure 2 summarizes existence and local stability of steady states given in the previous proposition. The letter S (resp. U) means stable (resp. unstable). Absence of letter means that the corresponding equilibrium does not exist.

3. Operating diagram

The operating diagram describes the system behavior when the control parameters S_{in} and D vary. All others parameters are known and can be measurable because they depend on properties of the micro-organisms and substrate introduced in the chemostat. Let Γ be the curve of equation $f(S_{in}) = D$ that separates the operating plane (S_{in}, D) in two regions, labeled as $\mathcal{I}_0$ and $\mathcal{I}_1$. The transition from the region $\mathcal{I}_0$ to the region $\mathcal{I}_1$ by the curve Γ corresponds to a transcritical bifurcation making the steady state E_0 unstable



(b)

Condition	Region	E_0	E_1
$f(S_{in}) < D$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_0$	S	
$f(S_{in}) > D$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_1$	U	S

Figure 2: (a): Operating diagrams of model (1). Cyan color represents the region of washout (E_0 is LES) and red color represents the region of coexistence (E_1 is LES). (b): Existence and local stability of steady states according to regions in the operating diagram.

(saddle point) with the appearance of the coexistence steady state E_1 which is LES. The washout and coexistence regions depend only on the growth rate of planktonic bacteria which are more efficient than attached bacteria. The operating diagram is shown in Figure 2.

Figure 3 illustrates the one-parameter bifurcation diagrams of the each component at steady states showing the transcritical bifurcation making the steady state E_0 unstable with the appearance of the positive steady state E_1 which is LES. Moreover, the density of substrate, isolated and attached bacteria at steady state increase as S_{in} varies.

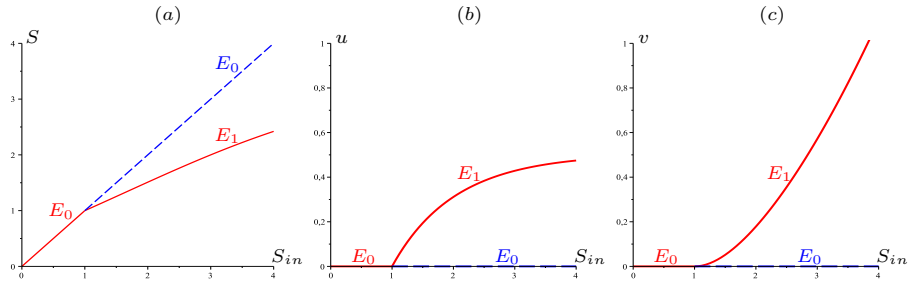


Figure 3: One-parameter bifurcation diagrams of model (1): the components S (a), u (b) and v (c) of each steady state. Parameter values are given in Table 1.

For numerical simulation, the growth functions are of Monod-type, defined by:

$$f(S) = \frac{m_1 S}{K_1 + S} \quad \text{and} \quad g(S) = \frac{m_2 S}{K_2 + S}, \tag{3}$$

where m_i and K_i, $i = 1, 2$, denote, respectively, the maximum growth rates and the Michaelis-Menten (or half-saturation) constants. The parameter values used for the simulations are provided in Table 1.

Parameter	m_1	K_1	m_2	K_2	a	b	D	S_{in}
Figure 2 Figure 3	2.05	1.5	4	0.5	2	1	Variable 2	Variable 3

Table 1: Parameter values used for (1) where the growth rates are given by (3).

4. Discussion

In this work, we have studied a chemostat model with a single resource and one microbial species that is present in two forms: isolated and aggregated bacteria. With monotonic growth rates and same removal rates, the model shows the coexistence of planktonic and attached bacteria. The one-parameter bifurcation diagrams show the emergence of the positive steady state through a transcritical bifurcation with the washout steady state. The operating diagram determines the regions of the operating parameters (input concentration of the nutrient and dilution rate), which depict the asymptotic behavior of the system.

Since the flocs have less access to substrate than planktonic bacteria, the coexistence of these two forms of bacteria depends only on the growth rate of the isolated bacteria. The flocculation and deflocculation dynamics affect only the density of isolated and attached bacteria at steady state and not the coexistence region of the operating parameters. More precisely, the operating condition $f(S_{in}) > D$ of survival of the species is the same as if the species was present only in the form of isolated bacteria. The only difference is that, compared to the case of only isolated bacteria, where at steady state the substrate is λ_u and the total biomass is $S_{in} - \lambda_u$, the consumption of substrate to survive is now larger $(S^* > \lambda_u)$ and the total biomass at steady state is lower $(u^* + v^* = S_{in} - S^* < S_{in} - \lambda_u)$.

Acknowledgments

We thank the financial support of PHC UTIQUE project No. 13G1120 and of TREASURE euro-Mediterranean research network (`http://www.inra.fr/treasure`).

5. References

[1] J. COSTERTON "Overview of microbial biofilms", *J. Indust. Microbiol.*, vol. 15, 137–140, 1995.

[2] R. FEKIH-SALEM, "Modèles mathématiques pour la compétition et la coexistence des espèces microbiennes dans un chémostat", *(Ph.D. thesis), University of Montpellier 2 and University of Tunis el Manar*, 2013. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01018600`.

[3] R. FEKIH-SALEM, J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT, T. SARI, "Extensions of the chemostat model with flocculation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 397, 292–306, 2013.

[4] R. FEKIH-SALEM, A. RAPAPORT, T. SARI, "Emergence of coexistence and limit cycles in the chemostat model with flocculation for a general class of functional responses", *Appl. Math. Modell.*, vol. 40, 7656–7677, 2016.

[5] S.R. HANSEN, S.P. HUBBELL, "Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes", *Science*, vol. 207, 1491–1493, 1980.

[6] J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT, T. SARI, "Le Chémostat: Théorie Mathématique de la Culture Continue de Micro-organismes", *ISTE Editions Collection Génie des Procédés, Série Chémostat et bioprocédés*, Vol. 1, 2017.

[7] B. HAEGEMAN, A. RAPAPORT, "How flocculation can explain coexistence in the chemostat", *J. Biol. Dyn.*, vol. 2, 1–13, 2008.

[8] H.L. SMITH, P. WALTMAN, "The Theory of the Chemostat, Dynamics of Microbial Competition ", *Cambridge University Press*, 1995.

[9] D.N. THOMAS, S.J. JUDD, N. FAWCETT, "Flocculation modelling: a review", *Water Res.*, vol. 33, 1579–1592, 1999.

2.5 Méthodes numériques pour les problèmes structurés

Minisymposium organisé par Skander BELHAJ

Rubrique

Recent developments on Toeplitz matrix computations

Skander Belhaj and Marwa Dridi

Université de Tunis El Manar, Tunisie
LAMSIN
skander.belhaj@lamsin.rnu.tn

RÉSUMÉ.

ABSTRACT. In this talk we will present recent developments on Toeplitz matrix computations. Firstly, we will introduce fast and effective numerical algorithms for computing the inverse of a triangular Toeplitz matrix. A theoretical accuracy and error analysis will be also considered. Numerical examples will be given to illustrate the effectiveness of our methods. Secondly, a fast algorithm for solving systems of linear equations with banded Toeplitz matrices will be presented. Stability of the algorithm will be discussed and its performance will be showed by numerical experiments. Finally, a fast algorithm of two-level banded Toeplitz systems of linear equations with application to image restoration will be included.

MOTS-CLÉS :

KEYWORDS : Triangular Toeplitz matrix, Fast Fourier Transformation (FFT), Banded Toeplitz system, image restoration.

1. Bibliographie

[1] S. BELHAJ, M. DRIDI, « A Fast algorithm of two-level banded Toeplitz systems of linear equations with application to image restoration », *New Trends in Mathematical Sciences*, 2017.

[2] S. BELHAJ, M. DRIDI, « A note on computing the inverse of a triangular Toeplitz matrix », *Applied Mathematics and Computation*, 2014.

[3] S. BELHAJ, M. DRIDI, A. SALAM, « A fast algorithm for solving banded Toeplitz systems », *Comput. Math. Appl.*, 2015.

Rubrique

A NOTE ON THE NUMERICAL METHOD FOR SKEW-HAMILTONIAN EIGENVALUE PROBLEM WITH SYMPLECTIC J-SVD LIKE DECOPOSITION

Sous-titre

AGOUJIL Said and A. H. Bentbib

Département d'informatique
Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences et Techniques Errachidia
Errachidia
Maroc
agoujil@gmail.com

RÉSUMÉ.

ABSTRACT. In this paper, we describe a simple observation that can be used to compute eigenvalues for the skew-Hamiltonian matrix $A^J A$ where A is $2n$-by-$2m$ rectangular real matrix. This method is based on a sym- plectic J-SVD like decomposition using symplectic reflectors. The basic concept on which this approach rests is to use symplectic reflectors to first reduce the matrix to J-bidiagonal form and then transform it to a diagonal form by using sequence of symplectic similarity transformations. This was done in parallel with the so called Golub-Kahan-Reinsch method.

MOTS-CLÉS :

KEYWORDS : Singular value decomposition (SVD), Hamiltonian matrix, Skew- Hamiltonian matrix, Symplectic matrix, Symplectic reflector.

1. Bibliographie

[1] S. AGOUJIL AND A. H. BENTBIB, « New symplectic transformation on $C^{2n\times 2}$: Symplectic reflectors », *Int. Jour. of Tomography and Statistics (IJTS)*, vol. 11, n° Summer, 2009.

[2] G. GOLUB, W. KAHAN, « Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of Matrix », *J. SIAM Numerical Analysis, Ser. B*, n° 2, 1965.

[3] G. GOLUB AND C. REINSCH, « Singular Value Decomposition and Least Square Solutions », *In J. H. Wilkinson and C. Reinsch, editors, Linear Algebra*, n° 2, 1971.

Rubrique

A new reduction of a matrix to upper J-Hessenberg form

Haithem BEN KAHLA[1,2] — Ahmed SALAM[2]

[1] ENIT-LAMSIN
University of Tunis El Manar
1002, Tunis
TUNISIA
haithembk@gmail.com

[2] ULCO-LMPA
University Lille Nord de France
62228 Calais, Cedex
FRANCE

RÉSUMÉ.

ABSTRACT. In order to build a SR-algorithm, which is a QR-like algorithm, for computing the eigenvalues and eigenvectors of a matrix, a reduction of the matrix to an upper J-Hessenberg form is crucial. In this work, we propose a reduction of a matrix to upper J-Hessenberg form (condensed form) using only the elementary symplectic Householder transformation, which is rank-one modification of the identity. We show also how this reduction can be constructed. The new algorithm, called JHSH algorithm, is based on an adaptation of SRSH algorithm. A variant of JHSH, named JHOSH is then obtained by taking some optimal choice of the free parameters. The JHOSH is numerically better than JHSH. Two variants numerically more stable are then derived (this gives rise to JHMSH algorithm and its variant JHMSH2). Some numerical experiments are given to show the efficiency of these variants.

MOTS-CLÉS :

KEYWORDS : Indefinite inner product, structure-preserving eigenproblems, symplectic Householder transformations, SR decomposition, upper J-Hessenberg form

1. Bibliographie

[1] E. ARTIN, « Geometric algebra », *Interscience*, n° 1957.

[2] A. BUNSE-GERSTNER, V. MEHRMANN, « A symplectic QR like algorithm for the solution of the real algebraic Riccati equation », *IEEE transactions on automatic control*, vol. 31, n° 12, 1986.

[3] A. BUNSE-GERSTNER, V. MEHRMANN, « Matrix factorizations for symplectic QR-like methods », *Linear Algebra and its Applications*, vol. 83, 1986.

[4] J. DELLA-DORA, « Numerical linear algorithms and group theory », *Linear Algebra and its Applications*, vol. 10, n° 3, 1975.

[5] G. GOLUB, C. VAN LOAN, « Matrix Computations (3rd Ed.) », *Johns Hopkins University Press*, 1996.

[6] C. PAIGE, C. VAN LOAN, « A Schur decomposition for Hamiltonian matrices », *Linear Algebra and its Applications*, vol. 41, 1981.

[7] A. SALAM, A. EL FAROUK, E. AL-AIDAROUS, « Symplectic Householder transformations for a QR-like decomposition, a geometric and algebraic approaches », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 214, n° 2, 2008.

[8] A. SALAM, E. AL-AIDAROUS, A. EL FAROUK, « Optimal symplectic Householder transformations for SR decomposition », *Linear Algebra and its Applications*, vol. 429, n° 5, 2008.

[9] C. VAN LOAN, « A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix », *Linear Algebra and its Applications*, vol. 61, 1984.

[10] D.S. WATKINS, « The matrix eigenvalue problem : GR and Krylov subspace methods », *Siam*, 2007.

Rubrique

Numerical methods for computing the approximate GCD of polynomials

Hajer Rejeb [1,3] — Skander Belhaj [1,2] — Gema M. Diaz-Toca [3]

[1] ENIT-LAMSIN
University of Tunis El Manar
1002, Tunis
TUNISIA
rejebhajer.hr@outlook.fr

[2] ISAMM
Manouba University, Tunisia
skander.belhaj@lamsin.rnu.tn

[3] Dpto de DITEC
Universidad de Murcia, Spain
gemadiaz@um.es

RÉSUMÉ.

ABSTRACT. A numerical method for the computation of the approximate greatest common divisor (GCD) of a set of several univariate polynomials are presented in this paper, using basically the Bezout-like matrices. We introduce a new algorithm based on the singular values decomposition (SVD) and the null space of our matrices, and we applied numericals tests to compare the results with those obtained by the Barnett's method which are also announced in this paper.

MOTS-CLÉS :

KEYWORDS : Approximate gcd of polynomials, Bezout-like matrices, Singular values.

1. Bibliographie

[1] G.M. DIAZ–TOCA AND L. GONZALEZ–VEGA, « Computing greatest common divisors and squarefree decompositions through matrix methods : The parametric and approximate cases . », *Linear Algebra and its Applications*, 2006.

[2] G.M. DIAZ-TOCA AND L. GONZALEZ-VEGA, « Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials through Bezout-like matrices. », *Symbolic Computation*, 2002.

[3] STEPHEN BARNETT, « Greatest common divisor of several polynomials . », *In Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1971.

[4] U. HELMKE AND P.A FUHRMANN, « Bezoutians . », *Linear Algebra and Its Applications*, 1989.

[5] D. BINI AND V. PAN, « Polynomial and matrix computations. Fundamental algorithms . », *Progress in Theoretical Computer Science*, 1994.

[6] R. M CORLESS, AND P. M. GIANNI, AND B. M. TRAGER,AND S.M. WATT, « The Singular Value Decomposition for Polynomial Systems . », *Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*.

[7] R. HORN AND C. JOHNSON, « Matrix Analysis . », *Cambridge University Press*, 1985.

2.6 Stabilité pour quelques problèmes inverses

Minisymposium organisé par Ibtissem BEN AÏCHA

Sur les équations de diffusion d'ordre variable et non-entier en temps

Soccorsi Eric
Université Aix-Marseille

Cet exposé traite le caractère bien posé des équations de diffusion d'ordre non-entier (ou encore fractionnaire, selon la terminologie consacrée, qui n'est pas vraiment adaptée car l'ordre en question peut tout aussi bien être irrationnel) variable (dépendant de la variable d'espace) en temps, ainsi que du problÈme inverse de la détermination de divers coefficients dépendant de la variable spatiale, de cette équation, À partir d'une suite d'opérateurs de Dirichlet Neumann partiels.

Optimal stability for a first order coefficient in a non-self-adjoint wave equation from Dirichlet-to-Neumann map.

Ben Aïcha Ibtissem
LAMSIN

This work is focused on the study of an inverse problem for a non-self-adjoint hyperbolic equation. More precisely, we attempt to stably recover a first order coefficient appearing in a wave equation from the knowledge of Neumann boundary data. We show in dimension n greater than two, a stability estimate of Hölder type for the inverse problem under consideration. The proof involves the reduction to an auxiliary inverse problem for an electromagnetic wave equation and the use of an appropriate Carleman estimate.

Stability for the aligned magnetic field by the Dirichlet-to-Neumann map for the Schrödinger equation in a periodic quantum waveguide

Mejri Youssef
LAMSIN

We consider the boundary inverse problem of determining the aligned magnetic field appearing in the magnetic Schrödinger equation in a periodic quantum cylindrical waveguide from boundary observations. The observation is given by the Dirichlet to Neumann map associated to the wave equation. We prove by means of the geometrical optics solutions of the magnetic Schrödinger equation that the knowledge of the Dirichlet-to-Neumann map determines uniquely the aligned magnetic field induced by a time independent and 1-periodic magnetic potential. We establish a Hölder- type stability estimate in the inverse problem.

Stability estimate in the determination of a time dependent coefficient for a wave equation by finite boundary data.

Rassas Imen
LAMSIN

We study the stability in the inverse problem of determining a time dependent coefficient in a wave equation from a finite number of data. Our main result is stated as follows : First, we assume that the potential q is known outside a subset of our domain, and we prove a Lipschitz stability estimate in determining q from a finite number of data of the local Dirichlet to Neumann map in this subset. Additionally, we note that we can extend this result in a larger region. Further, if we have supplementary information about the solution u, we verify that we can strech this developement in the whole domain.

2.7 Biomath

Minisymposium organisé par Rajae ABOULAICH

A Mathematical Model for Monocytes Transmigration

S. Boujena [1]*, N. El Khatib [2], O. Kafi [3], A. Sequeira [3]

[1] *MACS, Faculté des Sciences, Université Hassan II , Casablanca 20100 Maroc*

[2] *Department of Computer Science and Mathematics LAU, Byblos, Lebanon*

[3] *CEMAT/IST and Department of Mathematics, Lisbon, Portugal*

* *Corresponding author : boujena@gmail.com*

Abstract : *In the development of atherosclerosis, monocytes play a significant role. Indeed, during the process of inflammation, monocytes that circulate in the blood stream are activated. Upon activation, they adhere to the endothelium and extravasate through the latter to migrate into the intima. Micropipette aspiration experiments show that monocytes cannot be descibed as viscoelastic solids. They behave as polymeric drops during suction. In this work we present a mathematical model to discrib the transmigration of monocytes taking into accunt cell deformation and displacement. The Oldroyd-B constitutive equation is used to capture the monocyte viscoelasticity. This equation for the extra stress tensor is coupled with a transport equation for the density and a Navier Stokes equation with variable density for the velocity and the pressure. An existence result for the obtained complex mathematical system describing the deformation/displacement process of the cell is given. To validate this mathematical model, some numerical simulations of monocyte transmigration are carried out.*

Key words : *monocytes, transmigration, atherosclerosis, displacement, deformation.*

Acknowledgement : *This work has been partially supported by LIRIMA.*

Implémentation d'un modèle de diffusion non-linéaire pour la détection de contours et la reconstruction tridimensionnelle d'images

E. El Guarmah
Ecole Royale de l'Air, Département de Mathématiques et Informatique, DFST-BEFRA, POB 40002, Marrakech,Maroc. Université Mohammed V de Rabat, EMI, Laboratoires LERMA et LIRIMA. Av. Ibn Sina Agdal, Rabat Maroc.
S. Boujena, K. Bellaj et O. Gouasnouane
MACS, Département de Mathématiques et Informatique, Faculté Ain Chock Science Faculty Km 8 Route El Jadida, POB 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

Dans ce travail, on s'intéresse à la restauration d'images, à l'impinting, ainsi qu'à la détection de contours par décomposition de domaines et la reconstruction tridimensionnelle d'image par un modèle de diffusion non linéaire. Nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution dans un espace de Hilbert pour ensuite pouvoir appliquer la méthode des éléments finis. Nous considérons de nouvelles fonctions de diffusion, permettant de conserver les avantages du modèle de Perona-Malik et d'éviter ses inconvénients théoriques. Après une étude théorique du modèle, nous présentons une analyse numérique de la méthode des éléments finis et une estimation d'erreur sous des hypothèses appropriées. Nous abordons ensuite le problème de l'inpainting qui est formulé comme un problème de reconstruction de données dans une zone de l'image où l'information est supposée manquante. Nous avons adaptons le modèle proposé pour diffuser l'information disponible dans une zone de l'image vers la zone où l'information est supposée manquante ou détériorée. Pour une image de grande taille la décomposition de domaines est proposée. Dans la dernière partie nous nous intéressons à la détection des contours, en considérant le cas tridimensionnel. Les données traitées peuvent indifféremment provenir de coupes scanner, IRM ou anatomiques.

Modeling activated and inhibited wound healing assays with time-dependent F-KPP equations

A. Habbal, B. Yahyaoui, M. Ayadi

In previous works, we have shown that the well-known Fisher-KPP equations are able to model the natural wound closure of cell-sheets. This family of equations, with constant coefficients, exhibit progressive fronts with constant speed and we have proved by confronting to experiments that F-KPP is remarkabely able to predict the dynamics of experimental wounds. However, this is no more the case when the cell-sheet is either inhibited or activated exogeneously. In this case, we used a F-KKP equation with time-dependent coefficients, and proved again that with this modification we are able to capture the wound dynamics. We shall discuss about modeling and computational issues of the latter approach, and present numerical simulations that assess the time-dependent coefficients approach.

Nonlinear dynamics of infection spreading in tissues

Vitaly Volpert

The immune system is regulated by multiple processes at various levels of biological organization. In this lecture we will discuss the interaction of viral infection with the immune response. We will use multi-scale models and delay reaction-diffusion equations in order to study nonlinear dynamics of infection spreading in tissues.

2.8 Mathematical problems in cardiac electrophysiology

Minisymposium organisé par Nejib ZEMZEMI

Complétion de Données. Régularisation et éléments finis.

Faker Ben Belgacem
UTC

Le problème de Cauchy consiste à reconstruire un champ de diffusion à partir de données au bord partielles. Des mesures abondantes sont disponibles sur une partie du bord tandis qu'elles sont manquantes sur une portion qualifiée d'inaccessible. En dépit de la grande simplicité dans son énoncé, ce problème est très instable et sa résolution numérique est compliquée. Nous proposons ici une formulation variationnelle condensée sur le bord incomplet basée sur l'approche de Steklov-Poincaré, très employée en décomposition de domaine. Le problème obtenu est régularisé par la méthode de Lavrentiev avant d'être discrétisé par éléments finis. Nous listons les propriétés marquantes de ce problème, sources d'instabilité et de difficulté. Nous donnons les résultats de convergence de la procédure de Lavrentiev pour ensuite réaliser l'analyse numérique du problème régularisé discrétisé. Nous présentons quelques exemples numériques pour illustrer nos résultats.

Modelling Purkinje-Myocardium coupling in cardiac electrophysiology

Saloua Aouadi, Wajih Mbarki and Nejib Zemzemi
FST

The Purkinje network is the rapid conduction system in the heart. It ensures the physiological spread of the electrical wave in the ventricles. In this work, we first prove the stability of the space semi-discretized problem. Then we present four different strategies for solving the Purkinje/ myocardium coupled. The strategies are based on different time discretization of the coupling terms. The first scheme is fully coupled, where the coupling terms are considered implicit. The second and the third schemes are based on Gauss-Seidel time-splitting schemes where one coupling term is considered explicit and the other is implicit. The last is a Jacobi-like time-splitting scheme where both coupling terms are considered explicit. Our main result is the proof of the stability of the three considered schemes under the same restriction on the time step. Moreover, we show that the energy of the problem is slightly affected by the time-splitting schemes. We illustrate the theoretical result by different numerical simulations in 2D. We also conduct 3D simulations using physiologically detailed ionic models.

Stability analysis of the POD reduced order method in cardiac electrophysiology

Jamila Lassoued, Cesare Corrado, Moncef Mahjoub and Nejib Zemzemi
LAMSIN

In this work we show the numerical stability of the Proper Orthogonal Decomposition (POD) reduced order method used in cardiac electrophysiology applications. The difficulty of proving the stability comes from the fact that we are interested in the bidomain model, which is a system of degenerate parabolic equations coupled to a system of ODEs representing the cell membrane electrical activity. The proof of the stability of this method is based an a priori estimate controlling the gap between the reduced order solution and the Galerkin finite element one. We present some numerical simulations confirming the theoretical results. We also combine the POD method with a time-splitting scheme allowing a faster solution of the bidomain problem and show numerical results. Finally, we conduct numerical simulation in 2D illustrating the stability of the POD method in its sensitivity to the ionic model parameters. We also perform 3D simulation using a massively parallel code. We show the computational gain using the POD reduced order model. We also show that this method has a better scalability than the full finite element method.

A Nash-game approach to solve a coupled problem of conductivity identification and data completion in cardiac electrophysiology

Rabeb Chamekh, Abderrahmane Habbal, Moez Kallel and Nejib Zemzemi
LAMSIN

We consider the identification problem of the conductivity coefficient for the diffusion equation using incomplete over specified measures of electrical potential on the surface of a torso domain. The difficulty comes also from the fact that the electrical potential on the heart boundary is unknown. Our purpose is to introduce an original method based on the game theory approach. We propose a new algorithm for the identification of conductivity coefficient coupled with a data completion process. We consider three cost functions. Each player controls one variable and minimizes his own cost in order to seek Nash equilibrium. The first player solves the elliptic equation with the Dirichlet part of the Cauchy data prescribed over the accessible boundary and a variable Neumann condition prescribed over the inaccessible part of the boundary. The second player makes uses correspondingly of the Neumann part of the Cauchy data, with a variable Dirichlet condition prescribed over the inaccessible part of the boundary. The first player then minimizes the gap related to the unused Neumann part of the Cauchy data, and so does the second player with a corresponding Dirichlet gap. Both players consider a response of the unknown conductivity of the third player. This last player minimizes a Kohn-Vogelius type functional while solving two elliptic problems depending on the conductivity and the over and under specified conditions in the boundary. This method is quite general and has wide range applications in the bioelectrical and mechanical engineering fields.

2.9 EDP et Problèmes inverses

Minisymposium organisé par Mourad BELLASSOUED

Stability inequalities and inverse problems for some hyperbolic systems

Riahi Bochra
LAMSIN

In this talk, on one hand, we are interested in the global stability estimate in determination of a coefficient in the transmission wave equation from data of the solution in a subboundary over a time interval using Carleman estimate. On the other hand, we consider a coupled system of mixed hyperbolic-parabolic type which describes the Biot consolidation model in poro-elasticity. We establish a local Carleman estimate for Biot consolidation system. Using this estimate, we prove the uniqueness and Hölder stability in determining : first of all a physical parameter arising in connection with secondary consolidation effects, and second, two spatially varying density from measurements on the solution.

Carleman estimates for the magnetoelasticity system

Moufid Chaima
LAMSIN

We consider an isotropic and homogeneous magnetoelastic body occupying an open and bounded domain of $\mathbb{R}^3$ and we prove a Carleman estimate for a magnetoelasticity system.

DARCY-STOKES

SPECTRAL DISCRETIZATION OF DARCY-STOKES EQUATIONS

Y. Mabrouki* — S.M. Aouadi** — J. Satouri***

* Université de Tunis-El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, 1068 Tunis, Tunisia. email-address: $yassine_mabrouki@hotmail.fr$

** Université de Tunis-El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, 1068 Tunis, Tunisia. email-address: $saloua.mani@fst.rnu.tn$

*** Ipeit-University of Tunis, 2 street Jawaher Lel Nahru-1089, Monfleury, Tunisia. email-address: $jamil.satouri@yahoo.fr$

RÉSUMÉ. On se propose de faire l'analyse numérique d'un modèle couplant les équations de Darcy dans un milieu poreux avec les équations de Stokes dans les fractures. Le couplage est assuré par une condition de continuité de la pression sur l'interface. Nous proposons ici une discrétisation de ces équations par une méthode des éléments spectraux. Nous prouvons une estimation d'erreur optimale entre la solution du problème continu et celle du problème discret. On termine par quelques tests numériques qui confirment les résultats de l'analyse.

ABSTRACT. We propose to make the numerical analysis of a model coupling the Darcy equations in a porous medium with the Stokes equations in the cracks. The coupling is provided by a pressure continuity on the interface. This model is introduced and analyzed by finite elements in [5]. We describe here a discretization by spectral element methods. We derive a priori optimal error estimates and we present some numerical experiments which confirm the results of the analysis.

MOTS-CLÉS : Les équations de Stokes, les équations de Darcy, les éléments spectraux

KEYWORDS : Stokes equation, Darcy equation, Spectral elements.

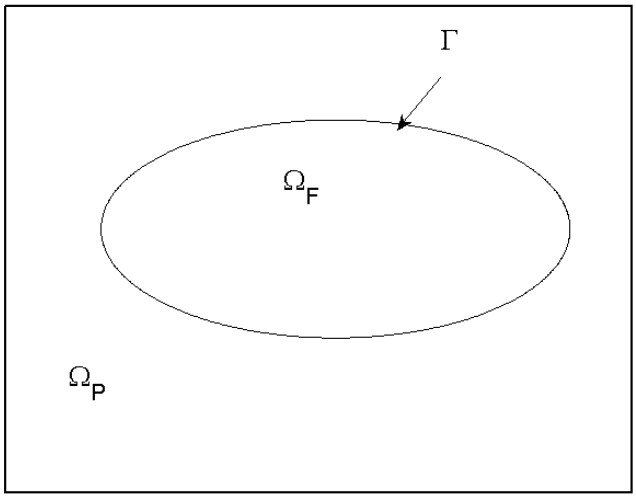


Figure 1 – Bidimensional domain : Γ is the interface between Ω_F and Ω_P.

1. The continuous problem

We consider a flow problem of an incompressible viscous fluid in cracked porous medium. We are interested in the model, introduced in [5], that couples the Darcy equations in the middle with the Stokes equations in cracks and for which the coupling conditions involve the continuity of the pressure on the interface. Keeping the same notations, we consider two bounded connected open domains Ω and Ω_F in $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ or 3, with Lipschitz-continuous boundaries, such that $\bar{\Omega}_F$ is contained in Ω and Ω_F is simply connected and has a connected boundary. We set : $\Omega_P = \Omega \backslash \bar{\Omega}_F$ and we denote by $\Gamma = \partial\Omega_F$ the interface between Ω_P and Ω_F. Let $\boldsymbol{n}$ stands for the unit outward normal vector to Ω_P on its boundary $\partial\Omega_P$.
We consider the following system of equations

$$\begin{cases} \mu\, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{grad}\, p = \boldsymbol{f} & in\ \Omega_P, \\ -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{grad}\, p = \boldsymbol{f} & in\ \Omega_F, \\ div\ \boldsymbol{u} = 0 & in\ \Omega_P\ and\ \Omega_F, \\ \boldsymbol{u}\ .\ \boldsymbol{n} = 0 & on\ \partial\Omega, \\ (\boldsymbol{u}_{|\Omega_P} - \boldsymbol{u}_{|\Omega_F}).\boldsymbol{n} = 0 & on\ \Gamma, \\ p_{|\Omega_P} - p_{|\Omega_F} = 0 & on\ \Gamma, \\ \boldsymbol{curl}\ \boldsymbol{u}_{|\Omega_F} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & on\ \Gamma. \end{cases} \tag{1}$$

The unknowns are the velocity $\boldsymbol{u}$ and the pressure p, and $\boldsymbol{f}$ represents a density of body forces. The parameters μ and ν are positive constants and denote the ratio of the viscosity of the fluid to the permeability of the medium, respectively the viscosity of the fluid.
We introduce the vorticity $\boldsymbol{\omega}$ associated with $\boldsymbol{u}$ in Ω_F as a new variable. We observe that system (1) is fully equivalent to

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{grad}\,p = \boldsymbol{f} & in\,\Omega_P, \\ \nu\,\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{grad}\,p = \boldsymbol{f} & in\,\Omega_F, \\ div\,\boldsymbol{u} = 0 & in\,\Omega_P\ and\,\Omega_F, \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u} & in\,\Omega_F, \\ \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{n} = 0 & on\,\partial\Omega, \\ (\boldsymbol{u}_{|\Omega_P} - \boldsymbol{u}_{|\Omega_F}).\boldsymbol{n} = 0 & on\,\Gamma, \\ p_{|\Omega_P} - p_{|\Omega_F} = 0 & on\,\Gamma, \\ \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}_{|\Omega_F} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & on\,\Gamma. \end{array}\right. \tag{2}$$

A variational formulation of (2) writes.
Find $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$ in $\tilde{H}_0(\boldsymbol{curl}, \Omega_F) \times H_0(div, \Omega) \times L^2_0(\Omega)$ such that

$$\left\{\begin{array}{lll} a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) \;=\; < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} > & \forall \boldsymbol{v} \in H_0(div, \Omega), \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0 & \forall q \in L^2_0(\Omega), \\ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}) = 0 & \forall \boldsymbol{\varphi} \in \tilde{H}_0(\boldsymbol{curl}, \Omega_F). \end{array}\right. \tag{3}$$

Thus, it is checked that problem (3) admits a unique solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$ in $\tilde{H}_0(\boldsymbol{curl}, \Omega_F) \times H_0(div, \Omega) \times L^2_0(\Omega)$

2. The spectral discrete problem

We assume that Ω admits a disjoint decomposition into a finite number of rectangles in dimension $d = 2$, rectangular parallelepiped in dimension $d = 3$:

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^{K} \bar{\Omega}_k, \Omega_1 = \Omega_F,\ \bar{\Omega}_P = \cup_{k=2}^{K} \bar{\Omega}_k, \Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset,\ 1 \leqslant k < k' \leqslant K.$$

We assume that the data $\boldsymbol{f}$ are continuous on $\bar{\Omega}$. The discrete problem is constructed from (3) by using the Galerkin method combined with numerical integration. It writes :
Find $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ in $\mathbb{C}_{N_1} \times \mathbb{D}_\delta \times \mathbb{M}_\delta$, such that

$$\left\{\begin{array}{ll} a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \boldsymbol{u}_\delta; \boldsymbol{v}_\delta) \;+\; b_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, p_\delta) \;=\; (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_\delta)_\delta & \forall \boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta, \\ b_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, q_\delta) = 0 & \forall q_\delta \in \mathbb{M}_\delta, \\ c_{N_1}(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \boldsymbol{u}_{N_1}; \boldsymbol{\theta}_{N_1}) = 0 & \forall \boldsymbol{\theta}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}. \end{array}\right. \tag{4}$$

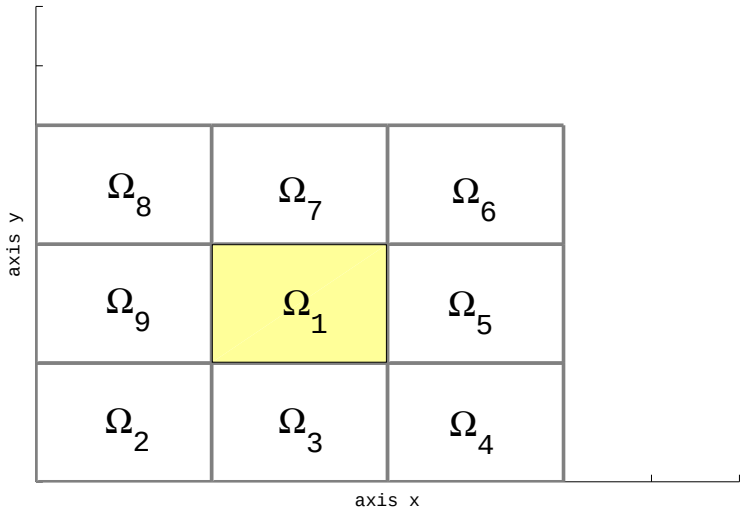


Figure 2 – Example of Decomposition of Domain Ω.

Corollary 2.1 *Assume that the data $\boldsymbol{f}$ belong to $H^s(\Omega)^d$ for a real number $s > \frac{d}{2}$ and also that the solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$ of problem (2) belongs to $H^{s+1}(\Omega_F)^{\frac{d(d-1)}{2}} \times H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$ for a real number $s \geqslant 0$. Then, the following error estimate holds between this solution and the solution $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ of problem (4)*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{\tilde{H}(\boldsymbol{curl},\Omega_F)} &+ \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{H(div,\Omega)} + \|p - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant c\Big(N_1^{-s-1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega_F)^{\frac{d}{d-1}}} + \sum_{k=1}^{K}\big(N^{-s}(\|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega_k)^d} \\ &+ N^{-1}\|p\|_{H^{s+1}(\Omega_k)}) + N^{-s}\|\boldsymbol{f}\|_{H^s(\Omega_k)^d}\big)\Big), \end{aligned} \tag{5}$$

with

$$N = \min_{1 \leqslant i \leqslant K} N_i.$$

3. Numerical experiments

The unusual variational formulation of our problem, requires a particular choice of nodes. we take $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ broken into nine domains with $\Omega_1 =]-1/2,1/2[\times]-1/2,1/2[$. The exact solution is now given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,y) &= \begin{pmatrix} y(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}(x^2-1)^3(y^2-1)^2(6x^2+13y^2-7) \\ -x(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}(x^2-1)^2(y^2-1)^3(13x^2+6y^2-7) \end{pmatrix} \\ p(x,y) &= cos(\pi x)cos(\pi y) \end{aligned} \tag{6}$$

In this example, the velocity components are taken with limited regularities for better assess the efficiency of our method.
We present in Table 1 the convergence of the relative errors in $\boldsymbol{u}$, ω and p in the $L^2(\Omega)^2$, $H^1(\Omega)^2$ and $L^2(\Omega)$ norm, as a function of N, for N varying from 16 to 36.

N	16	24	28	32	36
$\|\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N\|\|_{L^2(\Omega)^2}$	1.7×10^{-7}	7×10^{-9}	5×10^{-9}	4×10^{-9}	3×10^{-9}
$\|\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N\|\|_{H^1(\Omega)^2}$	9×10^{-6}	1×10^{-6}	7×10^{-7}	5×10^{-7}	3×10^{-7}
$\|\|p-p_N\|\|_{L^2(\Omega)}$	3×10^{-4}	1×10^{-5}	6×10^{-6}	2×10^{-6}	6×10^{-7}
$\|\|\omega-\omega_N\|\|_{L^2(\Omega)}$	1×10^{-3}	7×10^{-5}	2×10^{-5}	1×10^{-5}	5×10^{-6}

Tableau 1 – The estimations of errors of the solution (6) as a function of N.

4. Bibliographie

[1] S. M. Aouadi, C. Bernardi, J. Satouri :*Mortar spectral element discretization of the Stokes problem in axisymmetric domains*, Numerical Methods for Partial Differential Equations 30 (2014), 44-73.

[2] S. M. Aouadi, J. Satouri : *Mortar spectral method in axisymmetric domains*, ESAIM : Math Model Numer Anal 47 (2013), 33-55.

[3] S. Beavers and D. Joseph : *Boundary conditions at a naturally permeable wall*, J. Fluid Mech. (1967), vol. 30, part I, pp. 197-207.

[4] C. Bernardi, N. Chorfi : *Spectral discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Stokes problem*, SIAM J. Numerical. Anal. 44 (2006), 826-850.

[5] C. Bernardi, F. Hecht, and O. Pironneau : *Coupling Darcy and Stokes equations for porous media with cracks*, ESAIM : M2AN, Vol. 39, No 1, 2005, pp. 7-35.

[6] C. Bernardi and Y. Maday : *Spectral Methods*, in Handbook of Numerical Analysis V,P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1997, 209-485.

A R I M A

Elliptic problems with variable exponents and measure data Content

Fares MOKHTARI
Université Alger1

In this paper, we prove the existence of weak solutions to a class of nonlinear elliptic problems of the type $-div(a(x;u;Du)) = \mu$ with μ is Radon bounded measure. The functional setting involves T-set and Lebesgue-Sobolev space with variable exponents.

2.10 Advances in Applied Probability : finance and renewable energy

Minisymposium organisé par Anis MATOUSSI

Mean Field Games : an application to optimal energy storage in a grid with distributed generation

Imen BEN TAHAR
Université Paris-Dauphine

XVA ABSDEs When Capital is a Funding Source

Wissal SABBAGH
Université d'Evry-Val-d'Essonne, Paris-Saclay

Economic capital (EC) can be used as a funding source by banks, at a risk-free cost instead of the additional risky spread of the bank in the case of unsecured borrowing. This results in a very significant reduction of funding costs and an FVA (funding valuation adjustment) that would ignore it would be grossly overes- timated. Mathematically the intertwining of EC and FVA leads to an anticipated BSDE (ABSDE) for the FVA, where the driver entails a conditional risk measure of the one-year-ahead increment of the martingale part of the solution. Accounting further for the KVA (capital valuation adjustment) component of economic capital, with the ensuing feedback condition that EC must be greater than KVA, yields a system of ABSDEs for the FVA and the KVA processes considered simultaneously. We show that the ensuing (FVA, KVA) ABSDE system is well-posed and we establish the convergence of a Picard approximation scheme. This is first done for a bank without debt. In the realistic case of a defaultable bank, the resulting ABSDEs, which are stopped before the default of the bank, are solved by projection on a reference filtration.

XVA ABSDEs When Capital is a Funding Source

Wahid Faidi
Université Tunis El Manar

Robust utility maximization problem with a general penalty term Abstract : In this talk, we study a robust utility maximization in the dominated case and with non-entropic penalty term. We consider two types of Penalties. The first one is the f-divergence penalty studied in the general framework of a continuous filtration. The second called consistent time penalty studied in the context of a Brownian filtration. We prove in the two cases that there is a unique optimal probability measure solution of the robust problem which is equivalent to the historical probability. In the case of consistent time penalty, we characterize the dynamic value process of our stochastic control problem as the unique solution of a quadratic backward stochastic differential equation. This talk is based on a joint work with A. Matoussi (Le Mans University) and M. Mnif (ENIT, Université Tunis El Manar).

Robust optimal contracts a BSDE approach

Mohamed Anis BEN
ESPRIT

In this talk, we formulate robust contracting problems in continuous time. We assume that the principal copes with model uncertainty by designing a robust contract that maximizes his utility in the worst-case scenario subject to the agent's incentive and participation constraints. Then we study a robust utility maximization in the dominated case and with non-entropic penalty term. We characterize the dynamic value process of our stochastic control problem as the unique solution of a backward stochastic differential equation.

2.11 Modélisation des écoulements complexes

Minisymposium organisé par Sondes KHABTHANI et François FEUILLEBOIS

TAMTAM 2017

Parallélisation d'ADAPT

Calculs parallèles 3D en physique des plasmas réactifs

Imad Kissami* — Fayssal Benkhaldoun** — Christophe Cerin*

* LIPN
Université de Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse
FRANCE
imad,cerin@lipn.univ-paris13.fr

** LAGA
Université de Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse
FRANCE
fayssal@math.univ-paris13.fr

RÉSUMÉ. Dans cet article on s'intéresse à l'augmentation de performance de la plateforme ADAPT de simulation numérique sur maillages adaptatifs du laboratoire LAGA. Plus précisément on considère son code de propagation de décharges dans un plasma. Ce code est basé sur un modèle constitué par des équations d'évolution portant sur la densité d'électrons et d'ions, couplées avec une équation de Poisson sur le potentiel électrique. On présente ici une stratégie innovante de calcul. La résolution du système linéaire issu de l'équation de Poisson est faite en utilisant le solveur parallèle direct MUMPS sur tout le domaine, tandis que l'équation de dynamique en temps est traitée par une méthode de décomposition de domaine par le partitionneur de graphe METIS. Cette stratégie a permis un gain en temps de calcul du code 3D passant d'environ un mois à huit heures de calcul.

ABSTRACT. In this article we consider performance increase of the LAGA ADAPT platform of numerical simulation on adaptive meshes. More precisely, we deal with its code of streamers propagation in a plasma. This code is based on a model constituted by evolution equations of the density of electrons and ions, coupled with a Poisson equation on the electrical potential. We present here an innovative computation strategy. The resolution of the linear system resulting from the Poisson equation is done by using the direct parallel MUMPS solver over the whole domain, while the time dynamics equation is treated by a method of domain decomposition using the graph partitioner METIS. This strategy allowed a speedup of the computation time of the 3D code from about one month for the sequential code to eight hours of calculation for the parralel one.

MOTS-CLÉS : Calcul Haute Performance, systèmes linéaires creux, MUMPS, METIS,MPI

KEYWORDS : HPC, Sparse linear systems, MUMPS, METIS, MPI

1. Introduction et contexte du travail

Au cours des dernières décennies, la CFD (Computational Fluid Dynamics) a joué un rôle important dans les recherches portant sur la physique des plasmas froids et en particulier pour la conception de nouveaux dispositifs de pots catalytiques. Le but de notre travail est de paralléliser un code orienté objet adaptatif, sur maillage non structuré pour la simulation de la propagation des décharges dans des plasmas froids 3D [5], à savoir le code Streamer. À noter que, la version séquentielle initiale du code Streamer nécessite jusqu'à un mois d'exécution sur un seul nœud de calcul.

Nous cherchons à paralléliser à la fois le solveur linéaire issu de l'équation de Poisson et l'équation d'évolution en utilisant la décomposition du domaine. Intuitivement parlant, séparer les deux étapes peut générer des retards de calculs dus à l'impératif de synchronisation.

Nous utilisons en particulier METIS [3], un logiciel de partitionnement de maillage libre, et nous l'intégrons dans le code Streamer d'ADAPT [2] afin d'étudier l'impact du partitionnement du maillage sur la version parallèle d'ADAPT que nous développons actuellement.

L'organisation du document est la suivante. Dans la section 2 nous présentons l'objectif de la plateforme ADAPT et ses fonctionalités par rapport à d'autre outils de simulation numérique. Dans la section 3 nous présentons brièvement l'approche utilisée par le code Streamer. Dans la section 4 nous présentons le solveur parallèle MUMPS qui est basé sur une méthode directe. Dans la section 5 nous réalisons des tests et nous fournissons des résultats numériques qui montrent l'efficacité de notre travail en terme de gain dans l'accélération des calculs. La section 6 conclut le papier.

2. La plateforme ADAPT

ADAPT [2] est une plateforme orientée objet pour exécuter des simulations numériques avec une stratégie d'adaptation de maillage dynamique ainsi qu'un couplage entre des méthodes des éléments finis et des volumes finis. L'implémentation ADAPT existant auparavant est un code séquentiel C ++ pour plusieurs phénomènes physiques tels que la combustion, les écoulements dans les milieux poreux. Dans ce cdre le code Streamer nécessite beaucoup de temps pour exécuter une simulation en 3D. Par exemple, le code du Streamer séquentiel peut exécuter des calculs durant 30 jours avant de fournir les résultats. C'est pour cette raison nous avons décidé de paralléliser le code. Cet article est une étape importante dans cette direction.

3. Approche utilisé par le code Streamer

3.1. Équations principales

Le Streamer est constitué d'une équation de convection-diffusion-réaction de la densité électronique, une équation différentielle ordinaire pour la densité d'ions positifs couplées avec l'équation de Poisson pour le potentiel électrique (voir [4]).

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + div(n_e \overrightarrow{v_e} - De \overrightarrow{\nabla} n_e) = S_e, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = S_i^+, \tag{2}$$

$$\Delta V = -\frac{e}{\epsilon}(n_i - n_e)\ , \tag{3}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla} V\ , \tag{4}$$

$$\overrightarrow{v_e} = -\left(\alpha \vec{E} + \beta \frac{\vec{E}}{||\ E\ ||}\right) \tag{5}$$

où t est le temps, n_e désigne la densité électronique, n_i la densité d'ions positifs, v_e est la vitesse des électrons, D_e le cœfficient de diffusion et les termes sources sont S_e et S_i^+. ϵ est la constante diélectrique, e est la charge de l'électron. L'intensité du champ électrique $\overrightarrow{E}$ est calculée en (4) comme le gradient négatif du potentiel électrique.

3.2. Méthode numérique

Les équations du modèle sont discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis sur un maillage triangulaire non structuré. L'intégration temporelle des équations de transport est réalisée en utilisant un schéma explicite. La forme discrétisée de l'équation de Poisson se compose d'un système algébrique linéaire qui est résolu par une méthode directe à chaque pas de temps pendant l'intégration temporelle. L'approximation de l'équation de la densité électronique est faite par la méthode des volumes finis suivante :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{\mu(T)} \oint_{\partial T} (n_e \overrightarrow{v_e} - D_e \overrightarrow{\nabla} n_e) \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}s = S_e \tag{6}$$

où $\mu(T)$ est le volume de la cellule T, $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal unitaire vers l'extérieur des faces de la cellule T. La dérivée temporelle est approximée par la méthode de Runge-Kutta sur l'équation différentielle ordinaire écrite ici pour une cellule notée T_i, avec $i = 1$ à N (N étant le nombre de cellule).

$$\frac{dn_e}{dt} + \frac{1}{\mu(T_i)} \sum_{j=1}^{m} \oint_{\sigma_{ij}} n_{e_{ij}} \overrightarrow{v}_{e_{ij}} \overrightarrow{n}_{ij} \mathrm{d}s_{ij} - \frac{1}{\mu(T_i)} \sum_{j=1}^{m} \oint_{\sigma_{ij}} D_{e_{ij}} \overrightarrow{\nabla} n_{e_{ij}} \overrightarrow{n}_{ij} \mathrm{d}s_{ij} = S_{e_i} \quad (7)$$

où m est le nombre de faces de la cellule i, $\overrightarrow{n}_{ij}$ est le vecteur normal unitaire de la face σ_{ij} (face entre la cellule T_i et la cellule T_j). Les autres variables indiquées par les indices ij représentent des variables sur la face σ_{ij}.

4. L'intégration de MUMPS dans la plateforme ADAPT

Nous avons constaté que la partie la plus importante (en terme de consommation de temps CPU) du code séquentiel de Streamer est consacrée au calcul de la solution du système linéaire. Pour traiter ce système, nous utilisons le solveur parallèle MUMPS [1] qui se base sur des techniques multifrontales pour résoudre l'ensemble des équations linéaires sur des architectures parallèles dans un environnement distribué et en utilisant MPI. La solution du système linéaire se fait en 3 étapes essentielles :

1) L'étape d'analyse : MUMPS offre un algorithme et donne accès aux paquets externes comme PORD et METIS. La matrice est analysée pour déterminer l'ordre puis une carte du graphe multifrontal de calcul est construit. Ces informations symboliques sont transmises du processus maître à tous les autres processus. En utilisant ces informations, les processus évaluent la mémoire nécessaire pour la factorisation et le calcul de la solution.

2) Factorisation : Basé sur ces informations symboliques, l'algorithme essaie de construire plusieurs sous-matrices denses qui peuvent être traitées en parallèle. La factorisation numérique est effectuée durant cette étape.

3) Solution : En utilisant le vecteur second membre, le vecteur de solution est calculé en utilisant les facteurs distribués.

5. Tests numériques

Le temps d'exécution des différentes parties du code de Streamer 3D (pour la résolution des équations (1) - (3) est détaillé dans le tableau 1. Ces tests ont été réalisés sur le cluster MAGI de l'Université Paris13, en utilisant un maillage de 657542 cellules. Le temps de calcul a été réduit d'environ un mois (un seul nœud de calcul) à 8h (512 nœuds de calcul).

La figure 2 illustre l'accélération et l'efficacité à échelle élevée. Un aperçu plus détaillé des données de cet exemple fournit des informations intéressantes sur l'efficacité de calcul des différentes parties de la simulation parallèle. Les résultats des tests à grande échelle, représentés graphiquement sur la figure 2 montrent que l'accélération parallèle

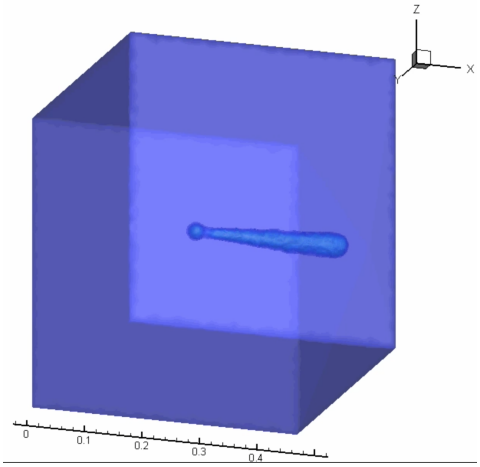


Figure 1. *Propagation d'une décharge Streamer 3D sur un maillage de 657542 cellules*

Tableau 1. *Temps d'execution (en s) du code 3D parallèle du Streamer utilisant un maillage avec 657542 cellules*

Processus MPI	Total	Convection	Diffusion	Solveur linéaire
1	2440370	317615	201530	1921224
2	1401176	160527	135876	1104772
4	754647	89185	79993	585469
8	432547	62920	54178	315449
16	268265	41249	32610	194405
32	165734	28570	21417	115746
64	99391	18843	12712	67835
128	64881	13697	8632	42551
256	41319	8033	4900	28384
512	29568	6776	3770	19020

des différentes parties augmente jusqu'à 512 nœuds de calcul, de sorte que notre stratégie parallèle montre son efficacité.

6. Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons introduit une parallélisation efficace de la plateforme ADAPT pour les applications CFD. L'originalité de ce travail et de la plateforme ADAPT consiste à considérer simultanément la parallélisation du système linéaire et l'équation

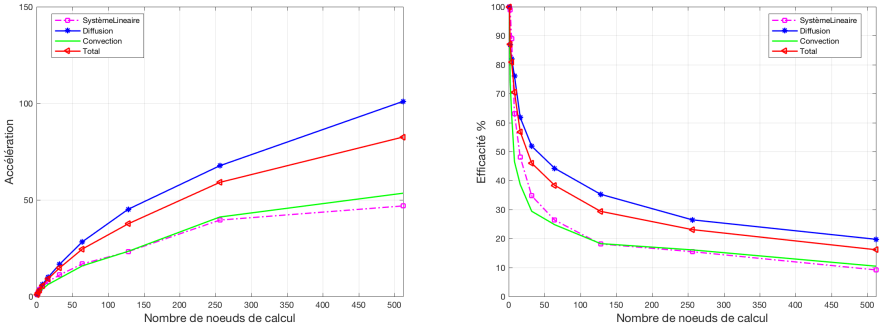


Figure 2. *Accélération (à gauche) et Efficacité (à droite) du code Streamer utilisant un maillage de 657542 cellules*

d'évolution. Après avoir effectué plusieurs simulations, nous avons observé que la campagne de tests numériques fournit les résultats attendus (le temps d'exécution du code Streamer 3D baisse d'un mois à 8h en utilisant 512 noeuds de calcul), ce qui signifie que notre mise en œuvre parallèle va dans la bonne direction.

Un nouveau modèle de calcul pourrait être introduit pour prédire de façon plus précise la performance, car l'accélération d'une exécution réelle n'est généralement pas stable (peut être différente d'une exécution à l'autre). On pourra bénéfier des avantages du parallélisme hybride utilisant à la fois MPI et OpenMP qui consiste à introduire au sein d'un même code une parallélisation sur plusieurs niveaux, un niveau OpenMP au sein d'un noeud à mémoire partagée et un niveau MPI entre les différents noeuds de calcul. Une autre approche consiste à considérer les GPU et les accélérateurs Intel Xeon Phi.

Remerciements

Le soutien financier de ce travail est le projet de l'AAP SPC EnCoMix (ANR-11-IDEX-05-02 Ref : SPC/JFG/2013). Les expériences menées dans ce travail ont été réalisées sur les nœuds B500 du Cluster MAGI de l'Université Paris 13 disponible sur http ://www.univ-paris13.fr/calcul/wiki/.

7. Bibliographie

[1]Patrick Amestoy, Iain S. Duff, Jean-Yves L'Excellent, and Jacko Koster. MUMPS : A general purpose distributed memory sparse solver. In Tor Sørevik, Fredrik Manne, Randi Moe, and Assefaw Hadish Gebremedhin, editors, *Applied Parallel Computing, New Paradigms for HPC in Industry and Academia, 5th International Workshop, PARA 2000 Bergen, Norway, June 18-20, 2000 Proceedings*

volume 1947 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 121–130. Springer, 2000.

[2] F. Benkhaldoun, J. Fort, K. Hassouni, and J. Karel. Simulation of planar ionization wave front propagation on an unstructured adaptive grid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 :4623–4634, 2012.

[3] George Karypis and Vipin Kumar. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(1) :359–392, December 1998.

[4] A. Luque and U. Ebert. Density models for streamer discharges : Beyond cylindrical symmetry and homogeneous media. *Journal of Computational Physics*, 231(3) :904 – 918, 2012. Special Issue : Computational Plasma PhysicsSpecial Issue : Computational Plasma Physics.

[5] C. Caroli U. Ebert, W. van Saarloos. Propagation and structure of planar streamer fronts. *Phys. Rev. E*, 55 :1530–1549, 1997.

Schéma FVC

Implentation sur GPU pour l'approximation des équations de Saint-Venant

Boubekeur Mohamed, Fayssal Benkhaldoun

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications
UMR CNRS 7539
Institut Galilée - Université Paris Nord
Av J.B. Clément 93430 Villetaneuse
France
boubekeur@math.univ-paris13.fr

RÉSUMÉ. Cet article présente une nouvelle méthode de simulation numérique pour une classe de problèmes d'écoulement à surface libre. Cette méthode est appliquée ici à la résolution des équations de Saint Venant en deux dimensions. Le schéma utilisé est un schéma hybride des méthodes des caractéristiques et des volumes finis (FVC), implémenté ici sur des processeurs graphiques (GPU). Les problèmes traités concernent les modèles monocouches avec ou sans termes sources. La méthode permet une résolution beaucoup plus rapide que sur des architectures classiques du type CPU outre le fait que le schéma FVC est facilement parallélisable. Cette implémentation permet aussi de visualiser en temps réel les résultats grâce au coût relativement négligeable des communications entre les unités GPU et CPU. Des expériences numériques, concernant notamment des écoulements circulaires et des comparaisons avec des calculs effectués sur CPU sont présentés pour illustrer l'intérêt de cette approche.

ABSTRACT. This paper presents a new simulation method for a class of open channel flow problems. This method is used here for the resolution of shallow water equations in two dimensions. The numerical scheme is a hybrid scheme of the finite volume method and the method of characteristics (FVC). It is implemented here on graphics processing units (GPU). The discussed problems concern single-layer models with or without sources terms. This method allows a faster resolution than a classical CPU-based architectures in addition to the fact that the FVC scheme is easily parallelizable. This implementation allows to show simulation results in real time, thanks to the relatively negligible cost of communications between GPU and CPU. Numerical experiments, in particular of circulating flows and comparisons with simulations on CPU are presented to illustrate the interest of this approach.

MOTS-CLÉS : Equation de Saint-Venant, Méthodes des caractéristiques-volumes finis, GPU

KEYWORDS : Shallow water equations, Finite volume-characteristics method, GPU

1. Introduction

La modélisation des équations de Saint-Venant avec les forces de Coriolis sont d'un grand intérêt pour l'étude de certains problèmes d'hydrodynamique. Ces équations sont obtenues par une intégration verticale des équations de Navier-Stokes avec l'hypothèse d'une pression hydrostatique et d'une vitesse verticale uniforme [1]. Les équations de Saint-Venant forment un système conservatif avec un terme source qui rend la résolution du problème aux valeurs propres relativement difficile et coûteux en terme de temps de calcul avec les méthodes de volumes finis usuelles. Le schéma hybride caractéristiques-volumes finis (FVC) évite la résolution du problème de Riemann [2]. À chaque pas de temps, le schéma est basé sur deux étapes pour calculer la nouvelle solution. Dans la première étape, les équations sont écrites dans une forme non conservative et une solution intermédiaire est calculée en utilisant la méthode des caractéristiques. Dans la seconde étape, les flux numériques sont reconstruits à partir de la solution initiale et utilisés dans la forme conservative des équations de Saint-Venant. Ce schéma est simple à implémenter, facilement parallélisable, et moins coûteux en temps de calcul que les schémas volumes finis usuels.

Une manière abordable d'effectuer des calculs à haute performance et réduire les temps de simulations consiste à utiliser des puces graphiques (GPU). Leur succès reconnu a conduit à leur expansion et à leur utilisation massive [3]. Une carte graphique présente une architecture avec une centaine de processeurs graphiques optimisés pour effectuer des opérations en virgule flottante et une exécution multi-thread. Cette architecture permet d'obtenir des performances meilleures que les processeurs classiques (CPU) à un prix abordable.

Dans cet article, une implémentation sur GPU d'un outil de simulation des écoulement en surface libre est présentée. Cet outil s'appuie sur la discrétisation des équations de Saint-Venant avec le schéma FVC.

2. Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant en deux dimensions sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh\frac{\partial Z}{\partial x} + f_c hv \tag{1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = -gh\frac{\partial Z}{\partial y} - f_c hu \tag{1c}$$

où (u, v) est la vitesse locale de l'eau, h sa hauteur et Z est la topographie du bassin. g est la gravité terrestre et f_c la force de Coriolis engendrée par la rotation de la terre.

3. Schéma numérique

La forme conservative définie en (1) est :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = Q(W) + R(W). \tag{2}$$

avec W la variable, F et G les flux, Q et R les termes sources

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

$$Q(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial Z}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial Z}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad R(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_c hv \\ f_c hu \end{pmatrix},$$

3.1. Discrétisation spatiale et temporelle

Le domaine spatial est discrétisé en volumes de contrôle
$C_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ avec un pas spatial uniforme $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$. Le domaine temporel est divisé en intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ avec un pas temporel $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. L'équation semi-discrete obtenue en intégrant l'équation (2) sur la cellule $C_{i,j}$ est :

$$\frac{\mathrm{d}W_{i,j}}{\mathrm{d}t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \partial y} = Q_{i,j} + R_{i,j} \tag{3}$$

où $F_{i\pm\frac{1}{2},j} = F(W_{i\pm\frac{1}{2},j})$, $G_{i,j\pm\frac{1}{2}} = G(W_{i,j\pm\frac{1}{2}})$ sont les flux numériques,
$Q_{i,j} = Q(W_{i,j})$ et $R_{i,j} = R(W_{i,j})$ sont les termes sources, avec les notations
$W_{i\pm\frac{1}{2},j}(t) = W(t, x_{i\pm\frac{1}{2}}, y_j)$, $W_{i,j\pm\frac{1}{2}}(t) = W(t, x_i, y_{j\pm\frac{1}{2}})$
et $W_{i,j} = \dfrac{1}{\Delta x}\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} W(t,x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

La discrétisation temporelle de (3) est effectuée avec schéma explicite de type Runge-Kutta. Par exemple, un schéma d'Euler explicite d'ordre 1 donne :

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \Delta t\frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} - \Delta t\frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \partial y} + \Delta t Q_{i,j}^n + \Delta t R_{i,j}^n \tag{4}$$

Comme le schéma temporel est explicite, le pas de temps maximal Δt est borné selon la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\Delta t = C\frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\max(\lambda, \mu)} \tag{5}$$

où C est le nombre de Courant qui est doit être fixé inférieur à 1. λ et μ sont les valeurs maximales des valeurs propres associées définies comme :

$$\begin{aligned} \lambda &= \max(|u + \sqrt{gh}|, |u|, |u - \sqrt{gh}|) \\ \mu &= \max(|v + \sqrt{gh}|, |v|, |v - \sqrt{gh}|) \end{aligned} \tag{6}$$

La construction des flux numériques $F_{i\pm\frac{1}{2},j}^n$, $G_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n$ et les termes source $Q_{i,j}^n$ et $R_{i,j}^n$ est basée sur le schéma FVC détaillé dans [2].

3.2. Architecture de la carte graphique et modèle de programmation

Selon la structure du CUDA (Compute Unified Device Architecture), chacun des CPU et GPU ont leur propre mémoire. Mais il possible de copier des données de la mémoire du CPU vers celle du GPU et vice versa. La carte graphique est constituée d'un ensemble de multiprocesseurs, chacun ayant un certain nombre de processeurs. Chaque processeur exécute la même instruction mais sur des données différentes. Une fonction exécutée par la carte graphique est appelée "kernel". Un kernel est exécuté par plusieurs processus qui sont organisés en formant une grille. Cette grille est constitués de blocs de processus, qui fonctionnent en parallèle. Tous les blocs et processus ont un indice spatial, ce qui permet d'identifier la position de chaque processus dans le programme. Chaque bloc de processus fonctionne sur un seul multiprocesseur. Cette architecture est utilisée pour implémenter quelques fonctions de type kernel pour calculer W à chaque itération. L'avantage de la discrétisation spatiale combinée avec un schéma temporel explicite est qu'il est facilement parallélisable en considérant que chaque processus représente une cellule du maillage. Pour minimiser le temps d'exécution, le transfert de données entre le mémoire du GPU et celle du CPU est limité. Il est utilisé uniquement pour l'initialisation et l'exportation des résultats. Comme CUDA est directement interfacé avec la bibliothèque OpenGL, il permet d'afficher les résultats de la simulation en temps réel. Pour chaque itération, On suit la procédure suivante :

– Calcul des flux selon le schéma FVC.

– Calcul W^{n+1} en utilisant (4).

– Post-processing et affichage avec OpenGL.

4. Résultats numériques

4.1. Rupture de barrage avec fond mouillé

On considère un problème de rupture de barrage avec fond mouillé. Le domaine spatial est $\Omega = [-50, 50] \times [-50, 50]$ et le fond est plat. On résout les équations de Saint-Venant avec des conditions de Neumann et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} h(0,x,y) &= \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \\ u(0,x,y) &= 0 \\ v(0,x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Dans ce problème, les valeurs physiques sont normalisées de façon que la hauteur avale et la gravité valent l'unité et la force de Coriolis $f_c = 0$. On compare le temps d'exécution des simulations avec celui des simulations effectuées sur CPU implémentées avec OpenMP. La carte graphique utilisée pour les simulations est une NVIDA Quadro K5100M dotée de 8 multiprocesseurs, chaque multiprocesseur contient 192 processeurs. Le processeur est un Intel i7 doté de 8 cœurs cadencés à $3GHz$. Le temps final des simulations est $t_{final} = 5$. Dans le tableau 1, on montre les temps de simulation pour différentes tailles de maillage. On considère que les temps obtenus avec un seul cœur sont ceux de référence. On remarque que les calculs parallèles sont rapides (8 cores et GPU) par rapport calcul de référence (1 cœur). Ceci s'explique par l'architecture parallèle de la

méthode FVC. On remarque aussi que les calculs sur GPU sont nettement plus rapide que le calcul sur CPU avec 8 cœurs pour un résultat similaire (Figure 1.).

maille	GPU	CPU	
		8 cœurs	1 cœur
50×50	0.02	0.07	0.16
100×100	0.44	0.59	1.31
200×200	1.33	4.13	1.78
400×400	6.06	26.71	87.21
600×600	18.04	88.12	293.61
800×800	37.73	215.15	693.89
1000×1000	66.43	383.71	1361.25

Tableau 1. *Temps d'execution en secondes*

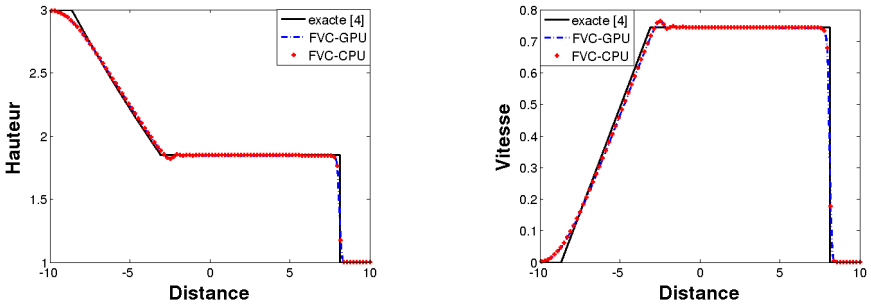


Figure 1. *Hauteur et vitesse pour* $t_{final} = 5$

4.2. Rupture de barrage circulaire

Un autre exemple est la rupture de barrage circulaire proposée dans [2] pour l'étude de l'asymétrie cyclone/anticyclone dans l'ajustement géostrophique non linéaire. Le domaine spatial est $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$ et le fond suit la fonction suivante :

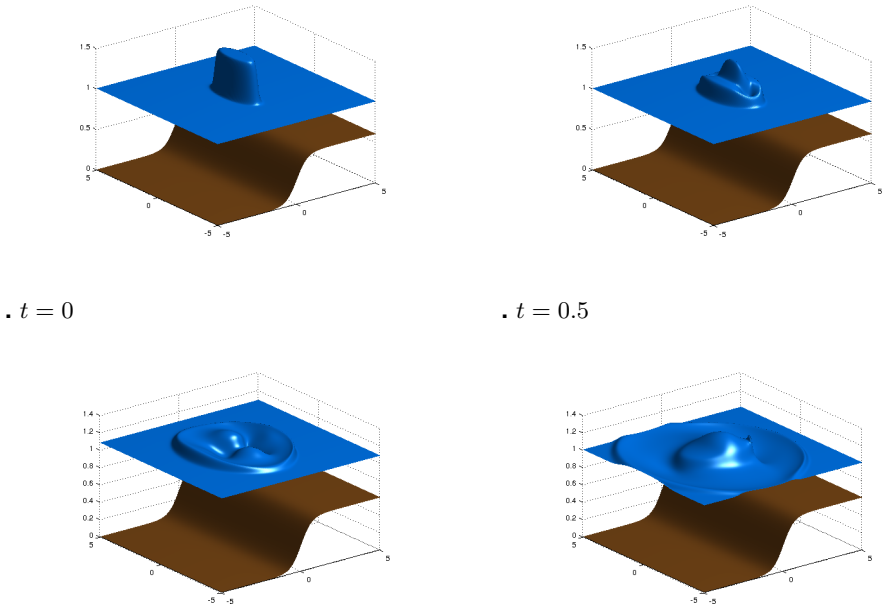
$$z(x, y) = 0.3 \cdot (1 + \tanh(1.5\, x) \tag{8}$$

Les équations de Saint-Venant sont résolues avec des conditions de Neumann et la condition initiale suivante :

$$\begin{aligned} h(0, x, y) &= 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{ax^2 + by^2} - 1}{c}\right)\right) \\ u(0, x, y) &= 0 \\ v(0, x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

avec $a = 52$, $b = 25$ et $c = 0.1$. On garde la même normalisation que l'exemple précédent et la force de Coriolis $f_c = 1$.

Dans la Figure 2, l'évolution de la surface libre $h + Z$ est illustrée, on remarque la propagation d'une onde de choc qui est asymétrique à cause du fond. Ce résultat concorde avec celui obtenu dans [2].



. $t = 0$. $t = 0.5$

. $t = 2$. $t = 4$

Figure 2. *Evolution of the free surface obtained by GPU simulation*

5. Conclusion

Une implémentation d'un schéma FVC sur carte graphique a été présentée et a été utilisée pour résoudre les équations de Saint-Venant en deux dimensions. Une comparaison avec une solution analytique et une comparaison des temps de calcul ont été présentées pour montrer l'intérêt de l'approche. Un autre exemple de rupture de barrage circulaire a été montré.

6. Bibliographie

[1] BENKHALDOUN F., SEAID M., « A simple finite volume method for the shallow water equations », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, n° 1, 2010.

[2] BENKHALDOUN F., SARI S., SEAID M., « Projection finite volume method for shallow water flows », *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 118, 2015.

[3] CASTRO M. J., ORTEGA S., ASUNCIÓN M., MANTAS J. M., GALLARDO J. M., « GPU computing for shallow water flow simulation based on finite volume schemes », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 339, n° 2, 2011.

[4] STOKER J.J., « The formation of breakers and bores », *Communication on Applied Mathematics*, vol. 1, n° 1, 1948.

TAMTAM 2017

A BEM-FMM Algorithm for the evaluation of electrostatic interactions

Issa Mehrez — Lassaad El Asmi

University of Carthage,
Laboratory of Engineering Mathematics, Polytechnic School of Tunisia
BP 743, La Marsa 2078, Tunisia

RÉSUMÉ. L'équation de Poisson-Boltzmann (PB) est une équation aux dérivées partielles elliptique linéaire qui décrit le potentiel électrostatique des macromolécules immergées dans des solutions ioniques. Dans cet article, nous utilisons une méthode des éléments de frontière (BEM) combinée avec la méthode multipôle rapide(FMM) pour approcher la solution du problème PB. On a utilisé la méthode multipôle rapide (FMM) couplée à la BEM pour la résolution numérique de l'équation de Poisson-Boltzmann linéarisée afin de développer un solveur numérique dit 3D FMMBEMM. Les tests numériques et les résultats expérimentaux montrent l'efficacité de ces techniques pour résoudre le problème PB. Nous présentons les solutions numériques de l'énergie de Solvatation.

ABSTRACT. The Poisson-Boltzmann (PB) equation is a linear elliptic partial differential equation that describes the electrostatic potential of macromolecules immersed in ionic solutions. In this article, we use a boundary element method (BEM) combined with the fast multipole method (FMM) to approximate the solution of the PB problem. Discretizating the equations by the BEM and appling the iterative method to solve the linear system coupled to the FMM, we develop a 3D FMMBEMM solver for the numerical simulation. The numerical test and experimental results show the efficiency of these techniques for solving the PB problem. We present the numerical solutions of the solvation energy.

MOTS-CLÉS : L'équation de Poisson-Boltzmann, La méthode multipôle rapide, L'énergie de solvatation

KEYWORDS : The Poisson-Boltzmann equation, Fast multipole method, Solvation energy

1. Introduction

Many Mathematical formulation of problems in engineering science lead to solve partial differential equations (PDEs). The elementary boundary integral methods give us an attractive alternative for finding numerical solutions. Nevertheless, since discretizations of integral equations require the solution of a dense linear systems, it is necessary to apply the iterative methods to solve these systems. Indeed, if the matrix is full, the computation time is of the order of $O(nN^2)$ operations, where N is the degree of freedom and n is the number of iterations. The Fast Multipole Methods (FMM), which was introduced by Rokhlin and Greengard [2] can reduces the complexity of this type of calculations.

2. Boundary representations and boundary integral equations

For a macromolecule immersed in a solvent, we separated the open domain $\mathbb{R}^3$ into interior region (Ω) and exterior region $(\mathbb{R}^3 - \Omega)$ by the molecular surface Γ [6]. The Poisson-Boltzmann equation can be separated into two formulations [1] :

$$\nabla^2\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{n_c} \frac{q_i}{\epsilon_1}\delta(x - x_i). \tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi_2(x) - \mathcal{K}^2\varphi_2(x) = 0. \tag{2}$$

where φ_1 and φ_2 are the electrostatic potentials in the interior and exterior region, respectively, at the point x on the surface Γ. $\mathcal{K} = \sqrt{\frac{8\pi e^2 I}{\epsilon_2 K_B T}}$ is the inverse the Debye length, n_c is the number of point charges, q_i is the charge of the atom i, ϵ_1 and ϵ_2 are the interior and exterior dielectric constants.

The boundary conditions on the surface Γ are :

$$\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}^{x_0}}(x_0) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\vec{n}^{x_0}}(x_0) = \epsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial\vec{n}^{x_0}}(x_0), \tag{4}$$

Applying Green's second identity to the equations (1), (2) and using the conditions (3) and (4), we get the boundary integral equations. The derivative boundary integral equations (dBIEs) [5] introduced by A.H. Juffer are,

$$\frac{1}{2}(1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})\varphi(x)+\int_\Gamma\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}^y}(x,y)-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}^y}(x,y)\right]\varphi(y)dy$$
$$-\int_\Gamma\left[G_1(x,y)-G_2(x,y)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}^y}(y)dy=\sum_{i=1}^{n_c}\frac{q_i}{\epsilon_1}G_1(x,x_i) \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}^x}(x)+\int_\Gamma\left[\frac{\partial^2 G_1}{\partial\vec{n}^x\partial\vec{n}^y}(x,y)-\frac{\partial^2 G_2}{\partial\vec{n}^x\partial\vec{n}^y}(x,y)\right]\varphi(y)dy$$
$$-\int_\Gamma\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}^x}(x,y)-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}^x}(x,y)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}^y}(y)dy=\sum_{i=1}^{n_c}\frac{q_i}{\epsilon_1}\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}^x}(x,x_i) \tag{6}$$

The Green's functions for the PB equation are

$$G_1(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|} \tag{7}$$

$$G_2(x,y)=\frac{e^{-\mathcal{K}\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \tag{8}$$

where $\vec{n}^y$ is the outward pointing unit normal vector at the point y [11].

3. Numerical Treatment of Boundary Integral Equations.

The discretization of the surface is composed of the vertices $V=\{v_i\}^P$ with their unit normal vectors $\vec{n}_i^P$ and the triangular elements
$\Gamma=\{\Gamma_j|\Gamma_j=v_{j1}v_{j2}v_{j3}, j=1,...,L \text{ et } v_{j1},v_{j2},v_{j3}\in V\}$. We approximate those integrals as follows [12]

$$\int_\Gamma G(x,y)f(y)dy=\sum_{j=1}^{L}\int_{\Gamma_j}G(x,y_j)f(y_j)dy_j\simeq\sum_{j=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}W_m G(x,y_{jm})f(y_{jm})\mathcal{J}(\Gamma_j) \tag{9}$$

where $\{W_m\}_{m=1}^{M}$ and y_{jm} are m^{th} weight and point of Gaussian quadrature, and $\mathcal{J}(\Gamma_j)$ is the Jacobian of the Γ_j. The numerical treatment of dBIEs (5) and (6) is :

$$\frac{1}{2}(1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})\varphi(x_i)+\sum_{j=1}^{L}\varphi(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})$$
$$-\sum_{j=1}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_{j}^{x}}(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[G_1(x_i,y_{jm})-G_2(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})=\sum_{k=1}^{n_c}\frac{q_k}{\epsilon_1}G_1(x_i,x_k)$$

$$\frac{1}{2}(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_{i}^{x}}(x_i)+\sum_{j=1}^{L}\varphi(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial^2 G_1}{\partial\vec{n}_{x}^{i}\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})-\frac{\partial^2 G_2}{\partial\vec{n}_{x}^{i}\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})$$
$$-\sum_{j=1}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_{j}^{x}}(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}(x_i,y_{jm})-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})=\sum_{k=1}^{n_c}\frac{q_k}{\epsilon_1}\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}(x_i,x_k)$$

The boundary integral equations can be written in a matrix form as follows :

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\epsilon})I+A & B\\ C & \frac{1}{2}(1+\epsilon)I+D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}\tag{10}$$

where $\Phi_j=\varphi_j$ and $\Psi_j=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)_j$ are the j^{th} unknown potential and its normal derivative. I is the identity operator so that $I_{ij}\Phi_j=\Phi_j$ and $I_{ij}\Psi_j=\Psi_j$. The operators involve the potential at the point x_j due to the patch Γ_j, for $j=1,...,L$:

$$A_{ij}\Phi_j=\sum_{j=1}^{L}\varphi(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})\tag{11}$$

$$B_{ij}\Psi_j=-\sum_{j=1}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_{j}^{x}}(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[G_1(x_i,y_{jm})-G_2(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})\tag{12}$$

$$C_{ij}\Phi_j=\sum_{j=1}^{L}\varphi(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial^2 G_1}{\partial\vec{n}_{x}^{i}\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})-\frac{\partial^2 G_2}{\partial\vec{n}_{x}^{i}\partial\vec{n}_{jm}^{y}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})\tag{13}$$

$$D_{ij}\Psi_j=-\sum_{j=1}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_{j}^{x}}(x_j)\sum_{m=1}^{M}W_m\left[\frac{\partial G_1}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}(x_i,y_{jm})-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{\partial G_2}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}(x_i,y_{jm})\right]\mathcal{J}(y_{jm})\tag{14}$$

$$E_i = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{q_k}{\epsilon_1} G_1(x_i, x_k) \tag{15}$$

$$H_i = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{q_k}{\epsilon_1} \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}_x^i}(x_i, x_k) \tag{16}$$

4. Numerical simulation results.

In this work, we developed a solver, called BEMFMM3D (Boundary element method - Fast multipole method). We solve the system (10) using the iterative method, GMRES [8]. As for the matrix vector multiplication in each iteration is accelerated by a new version of FMM introduced by Greengard and Rokhlin [3] for the Laplace equation and for the screened Coulombic interaction [4].

4.1. The Born solvation energy

The system (10) can be used to compute φ and $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right)$ on Γ. Therefore, the potential at each charge location is given by

$$\phi_{rnx}(x_k) = \int_\Gamma (\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial G_2}{\partial \vec{n}^y}(x_k, y) - \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}^y}(x_k, y))\varphi(y)dy + \int_\Gamma (G_1(x_k, y) - G_2(x_k, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}^y}(y)dy \tag{17}$$

The solvation energy [10] can be calculated as

$$G_{sol} = \int_\Omega \phi_{rnx}(x) \sum_{k=1}^{n_c} q_k \delta(x - x_k)dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} \phi_{rnx}(x_k) q_k \tag{18}$$

4.2. A spherical cavity with single positive charge.

The efficiency of FMMBEM3D algorithm is validated by solving the PB equation and compared the results with BEM. We used the FMMBEM3D in order to determine the Born solvation energy of a point charge $+50e$ located at the center of a spherical cavity with a radius equal to $50A$ immersed in low water organic solvents with the interior and exterior dielectric constants $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 80$. We used the software MSMS [9] for discretizing the surface of the macromolecule. For comparaison between the time of the

method using a FMM accelerated BEM(BEMFMM3D) and show the time of a direct BEM without FMM results presented in Figures (1) and (2). In table (1) we presented the results of The solvation energy of a unit spherical cavity, the timing results using FMM accelerated BEM is T_{BEM}) and the direct BEM without FMM is T_{BEM}. The exact Born solvation energy G_{sol} of the cavity is $-4046.0426823kcal/mol$ [7, 13].

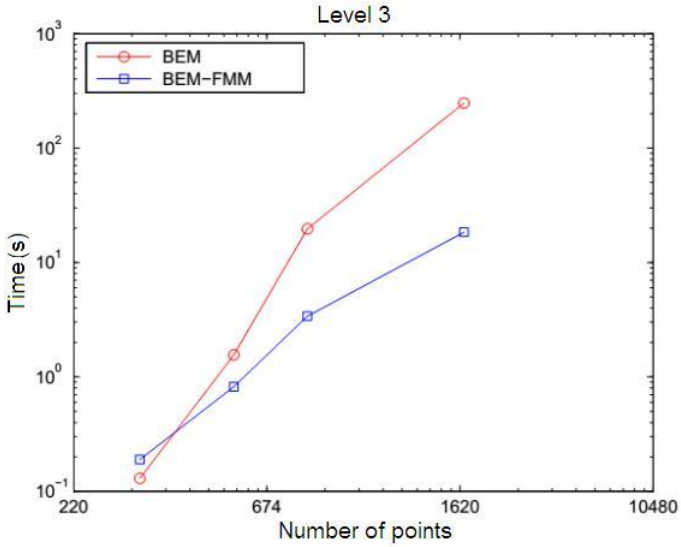


Figure 1. *The comparison of timing for BEMFMM calculation and timing for BEM calculation for the level 3 (see table 1) versus the number of points on log-log axes.*

Number of Elements	Number of points	level	T_{BEM} (s) (GMRES)	T_{BEMFMM} (s)	Iteration steps (GMRES)	G_{sol} (kca/mol)
430	120	2	0.15	0.21	6	-4046.0349012
1020	369	3	1.89	0.79	6	-4046.0401013
8710	2446	4	21.13	4.1	6	-4046.0412102
15712	7358	4	218.7	8.7	6	-4046.0412314

Tableau 1. *The solvation energy of a spherical cavity for differents levels and meshes.*

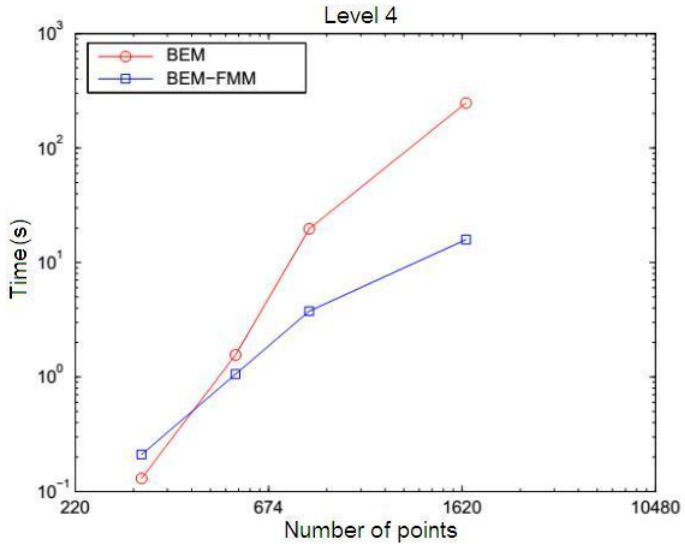


Figure 2. *The comparison of timing for BEMFMM calculation and timing for BEM calculation for the level 4 (see table 1) versus the number of points on log-log axes.*

5. Conclusions

In this work, we present an algorithm based on the Fast Multipole Method (FMM) to accelerate the boundary element method (BEM) in order to solve the PB equation. The developped technique shows a fast convergence for the test cases. We then computed the solvation energy of a unit spherical cavity with a point charge at its center.

6. Bibliographie

[1] F. FOGOLARI, A. BRIGO , H. MOLINARI, « The Poisson-Boltzmann equation for biomolecular electrostatics : a tool for structural biology », *Journal of Molecular Biology*, vol. 15, n° 377-392, 2002.

[2] L. GREENGARD , V. ROKHLIN, « A fast algorithm for particle simulations », *Journal of Computational Physics*, vol. 73, n° 325-348, 1987.

[3] L. GREENGARD, V. ROKHLIN, « A new version of the fast multipole method for the laplace equation in three dimensions », *Acta Numer*, vol. 6, n° 229-269, 1997.

[4] L. GREENGARD, J.F. HUANG, « A new version of the fast multipole method for screened coulomb interactions in three dimensions », *Journal of Computational Physics*, vol. 180, n°

642-658, 2002.

[5] A.H. JUFFER, E.F.F. BOTTA , B.A.M. VAN KEULEN, A. VAN DER PLOEG, H.J.C BERENSEN, « he electric potential of a macromolecule in a solvent : a fundamental approach », *JChemical Physics*, vol. 97, n° 44-171, 1991.

[6] B. LEE , F.M. RICHARDS, « The interpretation of protein structures : estimation of static accessibility », *Journal of Molecular Biology*, vol. 55, n° 379-400, 1971.

[7] T. J. PERUN, C. L. PROPST, « Computer-Aided Drug Design : Methods and Applications », *Informa Healthcare*, 1989.

[8] Y. SAAD, MARTIN H. SCHULTZ, « GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems », *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 7, n° 856-869, 1986.

[9] M.F. SANNER, A.J. OLSON, J.C. SPEHNER, « Reduced surface : an efficient way to compute molecular surfaces », *Journal of Molecular Biology*, vol. 38, n° 305-320, 1996.

[10] K. A. SHARP , B. HONIG, « alculating total electrostatic energies with the nonlinear Poisson-Boltzmann equation », *Journal of Physical Chemistry*, vol. 94, n° 7684-7692, 1990.

[11] R.J. ZAUHAR , R.S. MORGAN, « A new method for computing the macromolecular electric Fast Multipole Boundary Element Method for Poisson Boltzmann Electrostatics potential », *Journal of Molecular Biology*, vol. 186, n° 815-820, 1985.

[12] W. ZHAO, G. XU , C. BAJAJ, « An algebraic spline model of molecular surfaces », *Proceedings of the ACM symposium on Solid and physical modeling*, vol. 55, n° 297-302, 2007.

[13] L. Y. ZHANG, E. GALLICCHIO, R. A. FRIESNER, R. M. LEVY, « Solvent models for proteinligand binding : Comparison of implicit solvent poisson and surface generalized born models with explicit solvent simulations », *Journal of Computational Chemistry*, vol. 22, n° 591-607, 2001.

2.12 Optimisation

Minisymposium organisé par KHOUMEINI

Couverture par sommets dans un graphe : une version colorée

Mohamed-Yahya Mohamed-Salem DAH
Faculté des sciences et techniques Université de Nouakchott

Etant donné un graphe coloré, nous étudions la complexité de trouver une couverture par sommets contenant toutes les couleurs et de taille minimum. Au contraire du problème général qui est polynomial dans plusieurs cas particuliers (arbres, graphes bipartis, graphe d'intervalles etc.), nous montrons que la version colorée est NP-complet pour tous ces graphes. Nous donnons aussi une borne supérieure de la taille de la couverture optimale.

Problème d'optimisation combinatoire issu de l'étude des réseaux biologiques

Hafedh Mohamed Babou
Ecole Supérieure Polytechniques de Nouakchott

Un réseau biologique est une représentation abstraite d'un système biologique. L'objectif principal de la modélisation par des réseaux est d'étudier les relations entre les composants de ces réseaux pour analyser ou prédire des fonctions biologiques. Les études récentes montrent qu'un système biologique ne peut être compris en se basant uniquement sur la fonction de chacun de ses composants [BW07, TGH09, Han08, OFGK00], beaucoup des fonctions étant réalisées par un groupe de composants (par exemple les complexes des protéines, les opérons, etc.). Il existe essentiellement deux types de comparaison : comparaison des réseaux homogènes et comparaison de réseaux hétérogènes. Dans le premier cas, on compare des réseaux de même type, ce qui conduit généralement à un problème d'alignement des graphes. par contre, le second cas concerne la comparaison de réseaux de type différents et donc représentes par des graphes qui ne sont pas de même nature (par exemple graphe oriente vs graphe non-oriente). La comparaison de réseaux homogènes a été beaucoup étudiée dans la littérature [KSK+03, SIK+04, SSK+05, FAC+08]. En revanche, tries peut d'études ont été consacrées à la comparaison de réseaux hétérogènes. Nous avons proposée un modèle de comparaison [FMBR12, FMR15], et à l'issu de ce modèle nous avons introduit un problème d'optimisation combinatoire normmé One-to-One SkewGraM (voir Section 2). Nous avons prouve que ce problème est NP-complet et nous avons prouvé que ce problème est NP-complet et nous avons proposé une heuristique et un algorithme Branch et Bound pour le résoudre.

The behavior of an elasticity problem with a convex energy functional

ABDELKADER Mohamed Verid
Polytechnic School of Engineering.

In this present work, we consider a structure containing an elastic thin oscillating layer of thickness, rigidity, and periodicity parameter depending on t, where t being a parameter intended to tend towards 0. In a such structure, we have treated the scalar case for a thermal conductivity problem. The aim of this work is to study the limit behavior of an elasticity problem with a convex energy functional posed in a such structure.

Résumés des contributions

Rubrique

Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de diffraction d'ondes par une couche mince fortement absorbante

BOUTARENE Khaled El-Ghaouti* — COCQUET Pierre-Henri**

* Laboratoire AMNEDP, Faculté de mathématiques
Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB)
Alger, Algérie
kboutarene@usthb.dz

** Laboratoire PIMENT, Université de La Réunion
Sainte-Clotilde, France
Pierre-Henri.Cocquet@univ-reunion.fr

RÉSUMÉ. Ce travail porte sur l'étude du comportement asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine pénétrable de $\mathbf{R}^3$ avec une couche mince d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0). Nous utilisons une méthode basée sur des développements asymptotiques multi-échelles pour modéliser l'effet de la couche mince par des conditions de transmission de type Ventcel.

ABSTRACT. This work looks at the asymptotic behaviour of the solution to the Helmholtz equation in a penetrable domain of $\mathbf{R}^3$ with a thin layer of thickness δ (destined to tend to 0). We use the method of multi-scale expansion to provide Ventcel-type transmission conditions which allow us to take into account the influence of the thin layer.

MOTS-CLÉS : Analyse asymptotique, conditions de transmission de type Ventcel, équation de Helmholtz, couche mince.

KEYWORDS : Asymptotic analysis, Ventcel-type transmission conditions, Helmholtz equation, Thin layer.

1. Introduction

Soient Ω_δ^- un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$, de frontière régulière $\Gamma_{\delta,1}$, recouvert d'une couche mince Ω_δ d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0) et Ω_δ^+ un domaine extérieur défini par $\Omega_\delta^+ := \mathbf{R}^3 \backslash \left(\overline{\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta}\right)$ (voir Figure 1). Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution u_δ du problème de Helmholtz

$$\left\{ \begin{array}{ll} div\left(\sigma_\delta \nabla u_\delta\right) + k_\delta^2 u_\delta = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^3, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x| \left(\partial_{|x|} - ik_+\right)\left(u_\delta - u_{inc}\right) = 0, \end{array} \right. \qquad [1]$$

où σ_δ et k_δ^2 sont deux fonctions régulières par morceaux définies sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\sigma_\delta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^+ & \text{si } x \in \Omega_\delta^+, \\ \widetilde{\sigma}/\delta & \text{si } x \in \Omega_\delta, \\ \sigma^- & \text{si } x \in \Omega_\delta^-, \end{array} \right. \quad k_\delta^2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k_+^2 & \text{si } x \in \Omega_\delta^+, \\ \widetilde{k}^2/\delta & \text{si } x \in \Omega_\delta, \\ k_-^2 & \text{si } x \in \Omega_\delta^-, \end{array} \right.$$

telles que $\sigma^\pm, \widetilde{\sigma}, k_\pm, \widetilde{k}$ sont des constantes strictement positives. Le terme source u_{inc} est défini par une onde plane $u_{inc}(x) := e^{ik_+\langle x,d\rangle}$ où $d \in \mathbf{R}^3$ est un vecteur unitaire indiquant la direction où Ω_δ est illuminée et k_+ est le nombre d'onde.

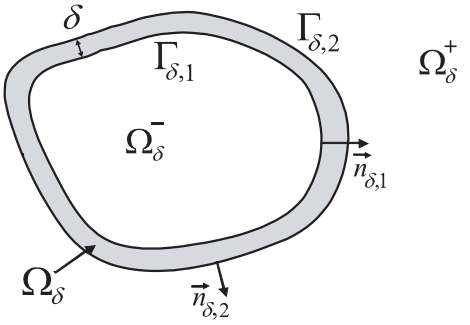


Figure 1. *Les données géométriques*

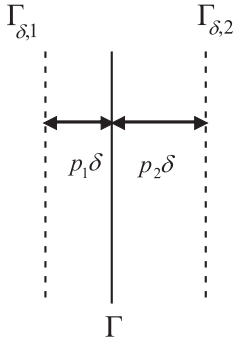


Figure 2. *La couche mince* Ω_δ

Le maillage de ces géométries minces présente des instabilités numériques qui peuvent nuire à l'exactitude de l'ensemble du processus de résolution (cf. [1]). Pour surmonter cette difficulté, nous optons pour des méthodes asymptotiques (cf. [2, 3]) pour modéliser l'effet de la couche mince par un problème faisant intervenir des conditions de transmission d'ordre quatre sur une interface fixée entre $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$.

Nous y déterminons un développement asymptotique de la solution u_δ en fonction de l'épaisseur de la couche mince δ et nous déduisons par la suite le problème modèle à l'ordre 1.

2. Conditions de transmission approchées

Soit Γ une surface parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$ (voir Figure 2) où p_1 et p_2 sont deux nombres réels strictement positifs définis par :

$$p_1 = \frac{\sqrt{\sigma^-}}{\sqrt{\sigma^-}+\sqrt{\sigma^+}} \text{ et } p_2 = \frac{\sqrt{\sigma^+}}{\sqrt{\sigma^-}+\sqrt{\sigma^+}}.$$

Nous introduisons la fonction $u^{ap}_{\text{int},\delta}$ définie sur Ω_δ par :

$$\begin{aligned} u^{ap}_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,\beta}} &:= u^{\beta,ap}_{\text{int},\delta} \\ &:= u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} - \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} \\ &= u^{+,ap}_{\delta|\Gamma} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u^{+,ap}_{\delta|\Gamma},\ \forall x \in \Omega_{\delta,\beta},\ \beta = 1,2, \end{aligned}$$

où $u^{\pm,ap}_\delta$ sont solutions du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} div\left(\sigma^-\nabla u^{-,ap}_\delta\right) + k_-^2 u^{-,ap}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ div\left(\sigma^+\nabla u^{+,ap}_\delta\right) + k_+^2 u^{+,ap}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|\left(\partial_{|x|} - ik_+\right)\left(u^{+,ap}_\delta - u_{inc}\right) = 0, & \end{array} \right.$$

avec les conditions de transmission de type Ventcel sur la surface Γ

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} - u^{+,ap}_{\delta|\Gamma} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u^{+,ap}_{\delta|\Gamma}, \\ \sigma^-\partial_{\mathbf{n}} u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} - \sigma^+\partial_{\mathbf{n}} u^{+,ap}_{\delta|\Gamma} = \mathcal{K}\left(u^{-,ap}_{\delta|\Gamma}, u^{+,ap}_{\delta|\Gamma}\right), \end{array} \right.$$

telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\left(u_{|\Gamma}, v_{|\Gamma}\right) &:= \alpha_{\delta,1} u_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,2} v_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,3}\Delta_\Gamma u_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,4}\Delta_\Gamma v_{|\Gamma} \\ &- \alpha_{\delta,7}\Delta_\Gamma^2 u_{|\Gamma} - \alpha_{\delta,8}\Delta_\Gamma^2 v_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,5} div_\Gamma\left[\left(\mathcal{H}I - \mathcal{R}\right)\nabla_\Gamma\right] u_{|\Gamma} \\ &+ \alpha_{\delta,6} div_\Gamma\left[\left(\mathcal{H}I - \mathcal{R}\right)\nabla_\Gamma\right] v_{|\Gamma}, \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est l'opérateur de courbure de la surface Γ, $\mathcal{H} := \frac{1}{2} tr\mathcal{R}$ est la courbure moyenne de Γ,

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta,1} &:= p_1\widetilde{k}^2 + \delta\frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1}\left(p_2\widetilde{k}^2\mathcal{H} - p_1\widetilde{k}^2\mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2\frac{\widetilde{k}^4}{\sigma^-}\right), \\ \alpha_{\delta,2} &:= p_2\widetilde{k}^2 + \delta\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1}\left(p_2\widetilde{k}^2\mathcal{H} - p_1\widetilde{k}^2\mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2\frac{\widetilde{k}^4}{\sigma^-}\right), \\ \alpha_{\delta,3} &:= p_1\widetilde{\sigma} - \delta\frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1}\left(p_2\sigma^+ + p_1\sigma^- + 2p_1^2\widetilde{\sigma}\frac{\widetilde{k}^2}{\sigma^-}\right), \\ \alpha_{\delta,4} &:= p_2\widetilde{\sigma} - \delta\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1}\left(p_2\sigma^+ + p_1\sigma^- + 2p_1^2\widetilde{\sigma}\frac{\widetilde{k}^2}{\sigma^-}\right), \end{aligned}$$

$$\alpha_{\delta,5} := \delta\frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2+\sigma^+ p_1}(p_2-p_1)\widetilde{\sigma}, \quad \alpha_{\delta,6} := \delta\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2+\sigma^+ p_1}(p_2-p_1)\widetilde{\sigma},$$

$$\alpha_{\delta,7} := \delta\frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2+\sigma^+ p_1}\left(p_1^2\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^-}\right), \quad \alpha_{\delta,8} := \delta\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2+\sigma^+ p_1}\left(p_1^2\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\sigma^-}\right),$$

$\Omega^- = \Omega_\delta^- \cup \Gamma_{\delta,1} \cup \Omega_{\delta,1}$ et $\Omega^+ = \Omega_\delta^+ \cup \Gamma_{\delta,2} \cup \Omega_{\delta,2}$.

Notant u_δ^{ap} la solution approchée de u_δ définie sur $\mathbf{R}^3$ par $u^{ap}_{\delta|\Omega_\delta^-} := u^{-,ap}_{\delta|\Omega_\delta^-}$, $u^{ap}_{\delta|\Omega_\delta} := u^{ap}_{\text{int},\delta}$ et $u^{ap}_{\delta|\Omega_\delta^+} := u^{+,ap}_{\delta|\Omega_\delta^+}$, nous pouvons énoncer notre résultat principal donnant une estimation de l'erreur commise en approchant la solution exacte u_δ de (1) par u_δ^{ap}.

Théorème *Soient Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^3$ contenant la couche mince Ω_δ et $\widetilde{\Omega}_\delta^+$ un domaine extérieur défini par $\widetilde{\Omega}_\delta^+ := \Omega\backslash\overline{\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta}$. Alors, il existe une constante c indépendante de δ telle que*

$$\left\|u_{\delta|\Omega_\delta^-} - u^{ap}_{\delta|\Omega_\delta^-}\right\|_{H^1\left(\Omega_\delta^-\right)} + \delta^{1/2}\sum_{\beta=1}^{2}\left\|u_{\delta|\Omega_{\delta,\beta}} - u^{\beta,ap}_{\text{int},\delta}\right\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})} + \left\|u_{\delta|\Omega_\delta^+} - u^{ap}_{\delta|\Omega_\delta^+}\right\|_{H^1\left(\widetilde{\Omega}_\delta^+\right)} \leq c\delta^2.$$

3. Bibliographie

[1] A. BENDALI, K. LEMRABET, « The effect of a thin coating on the scattering of the time-harmonic wave for the Helmholtz equation », *SIAM J. Appl. Maths*, vol. 56, n° 6, 1664-1693, 1996.

[2] K. E. BOUTARÈNE, P. -H. COCQUET, « Scattering of a Scalar Time-Harmonic Wave by a Penetrable Obstacle with a Thin Layer », *European Journal of Applied Mathematics*, vol. 27, n° 2, 264-310, 2016.

[3] K. SCHMIDT, S. TORDEUX, « Asymptotic modelling of conductive thin sheets », *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 61, n° 4, 603-626, 2010.

Étude numérique de l'instabilité barotrope sur le plan bêta équatorial

KACIMI Abderrahim* — KHOUIDER Boualem +

* Department of Mathematics, Laboratory AMNEDP,
University of Sciences and Technology Houari Boumedienne, (USTHB)
Algiers, Algeria.
kacimia@uvic.ca; kacimi.rahim@gmail.com

+ Mathematics and Statistic, University of Victoria.
PO BOX 3045 STN CSC, Victoria, B.C, V8W 3P4, Canada
khouider@math.uvic.ca

RSUM. L'objective de cette présente étude est de faire une investigation numérique de l'instabilité barotrope sur le plan bêta équatorial par deux méthodes numériques suivantes : la méthode du Jacobien d'Arakawa [1] et le schéma Essentiellement Non Oscillant (ENO-4) d'ordre quatre de Osher et Shu [5]. Le Jacobien d'Arakawa est un schéma centré aux différences finis d'ordre deux qui conserve l'énergie et l'enstrophie. Le schéma Essentiellement Non Oscillant (ENO-4) d'ordre quatre permet de suivre l'évolution d'un front. L'investigation de l'instabilité barotrope de cisaillement du vent horizontal a était étudié en utilisant les deux méthodes mentionnées ci-dessus. Nous nous somme intéréssé à la performance de ces deux méthodes en étudiant l'évolution de l'instabilité pour une longue durée sous l'effet de la non-linéarité, dans le cas simple du profile de Helmholtz. Le problème linéaire associé est résolu analytiquement et la solution linéaire obtenue est utilisée comme une condition initiale dans les simulations numériques. On lance une série de simulations numériques en utilisant les deux méthodes avec différente grilles et avec deux différentes amplitudes pour la perturbation initiale. Un terme de viscosité est ajouté dans l'équation de vorticité pour amortir les ondes à l'échelle de grille pour la méthode d' Arakawa. Ceci n'est pas nécessaire pour le schéma d'ordre supérieure ENO-4 qui a sa propre dissipation à l'échelle de grille. A haute résolution, les deux méthodes sont en bon accord; elles convergent qualitativement et quantitativement vers la même solution à long terme : Pour les petites perturbations l'écoulement totale se stabilise dans un état stationnaire de cisaillement méridienne avec un profile lisse près de l'équateur tandis que pour les grandes perturbations les vortex se fusionnent entre eux pour former un seul vortex à grande échelle qui se propage vers l'ouest, le long de l'équateur, qui est compatible avec les ondes d'est africaines et la circulation des moussons creusent. Pour la résolution grossière, la méthode d'Arakawa semble être plus performante que le schéma ENO-4 car elle fournit des solutions qui sont plus compatibles avec la résolution fine.

ABSTRACT. The barotropic instability of horizontal shear flows is investigated by using two numerical algorithms to solve the equatorial beta-plane barotropic equations. The first is the Arakawa Jacobian method [1], which is a second order centered finite differences scheme that conserves energy and enstrophy, and the second is the fourth-order essentially non-oscillatory scheme for non-linear PDE's of Osher and Shu [5], which is designed to track sharp fronts. We are interested in the performance of these two methods in tracking the longtime behaviour of the instability, under the influence of the nonlinearity, in the simple case of a Helmholtz shear layer. The associated linear problem is solved analytically and the linear solution is used as an initial condition for the numerical simulations. We run a series of numerical simulations using both methods with various grid refinements and with two different amplitudes of the initial perturbation. A small viscosity term is added to the vorticity equation to damp the grid scale waves for Arakawa's method. This is not necessary for the high order ENO-4 scheme which has it own grid-scale dissipation. At high resolution, the two methods are in

good agreement; they yield qualitatively and quantitatively the same solution in the long run: for small disturbances the total flow stabilizes into a steady state meridional shear with a smooth profile near the equator while strong disturbances merge together to form a single large-scale vortex that propagates westward, along the equator, consistent with the African easterly waves and the monsoons trough circulation. At coarse resolution, however, Arakawa's method seems to be much superior to the fourth order ENO-4 scheme as it provides solutions that are more consistent with the fine resolution one.

MOTS-CLS : Jacobien d'Arakawa. Schémas essenciallement non-oscillants, Ondes de Rossby Equatoriales. Circulations athmosphériques. Instabilité Barotrope. Vorticité. Ecoulement de cisaillement. Fonction de Courant

KEYWORDS : Arakawa Jacobian. Essentially non-oscillatory schemes. Equatorial Rossby waves. Atmospheric circulation. Barotropic instability. Vorticity. Shear flow. Stream function.

1. Introduction

The objective of the present study is to investigate the non-linear effects of the barotropic shear instability in the equatorial beta-plane using two numerical methods : the Arakawa Jacobian [1] and a fourth-order ENO scheme of Osher and Shu [5]. Our strategy consists in choosing a simple Helmholtz shear layer that can be easily analyzed linearly on the equatorial beta-plane. The unstable mode is then used to feed the numerical simulations in order to understand and analyze the effects of the shear instability on the environmental flow. Previous numerical studies of the barotropic instability were focussed on the wave-wave and wave-mean flow interactions. Moreover, in the non-linear saturation limits of the instability [4], the numerical solution was mostly used to confirm and validate theoretical prediction. In contrast, here we are mostly interested in the performance and efficiency of the these numerical methods in tracking the long time behaviour of the physical solution.

2. Étude numérique de l'instabilité barotrope

2.1. Instabilité de cisaillement barotrope

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-\beta yv=-\dfrac{\partial p}{\partial x} & (1.1)\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\beta yu=-\dfrac{\partial p}{\partial y} & (1.2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 & (1.3)\end{array}\right. \quad [1]$$

On considère le profil de base : $u=\overline{u}\,(y)$, $v=0$, qui est une solution exacte de (1) à condition que le profil de pression associé, $p=\overline{p}$, satisfait l'équilibre géostrophique

$$(\beta y)\,\overline{u}\,(y)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}. \quad [2]$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u=\overline{u}\,(y)+u'\,(x,y,t) & (3.1)\\ v=\quad\quad v'\,(x,y,t) & (3.2)\\ p=\overline{p}\,(y)+p'\,(x,y,t)\,, & (3.3)\end{array}\right. \quad [3]$$

où la perturbation (u',v',p') est supposé être relativement plus petite que le profil de base formé par $(\overline{u}(y),0,\overline{p}(y))$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u'}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial u'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y}-\beta yv'=-\dfrac{\partial p'}{\partial x} & (4.1)\\ \dfrac{\partial v'}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial v'}{\partial x}+\beta yu'=-\dfrac{\partial p'}{\partial y} & (4.2)\\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}=0. & (4.3)\end{array}\right. \quad [4]$$

La dernière équation admet une fonction de perturbation de courant ψ' telle que

$$u'=-\frac{\partial \psi'}{\partial y}\ ,\ v'=\frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad [5]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)(\Delta\psi')+\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0. \quad [6]$$

Le domaine de l'écoulement est périodique dans la direction des x et délimitée par des parois rigides à $y=\pm Y$. La condition aux limites à $y=\pm Y$ est $\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}=0$.

$$\varphi(y)\exp ik(x-ct), \quad [7]$$

où k est réel , c et $\varphi(y)$ sont complexes.

On substitue (7)dans (6), on obtient une équation pour l'amplitude $\varphi(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dy^2}-k^2\varphi+\left(\dfrac{\beta-\dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2}}{\overline{u}-c}\right)\varphi=0, \\ \varphi(\pm Y)=0 \end{cases} \quad [8]$$

$$c=c_r+ic_i, \quad [9]$$

$$\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} \quad [10]$$

change de signe quelque part dans le domaine et pour toute constante a,

$$(\overline{u}-a)\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right) \quad [11]$$

est positive quelque part dans le domaine. Les conditions d'interface qui sont dues à Rayleigh [6] et Talley [7], sont :

$$\left[(\overline{u}-c)\frac{d\varphi}{dy}-\varphi(y)\frac{d\overline{u}}{dy}\right]_{y_0}=0 \quad [12]$$

et

$$\left[\frac{\varphi(y)}{\overline{u}-c}\right]_{y_0}=0 \quad [13]$$

dans (12) et (13) le crochet représente le saut en $y=y_0+\epsilon$ à $y=y_0-\epsilon$ quand $\epsilon\longrightarrow 0$. L'application de ces conditions d'interface et les conditions aux limites appropriées pour la solution dans chaque région d'écoulement donne la relation de dispersion pour la vitesse complexe $c(k)$.

2.2. Le profil de Helmholtz dans le plan bêta

$$\overline{u}(y)=\begin{cases} 1 & y>0 \\ -1 & y<0. \end{cases} \quad [14]$$

Les conditions nécessaires pour l'instabilité barotrope dans (10) et (11) sont satisfaites parce que le gradient de la vorticité potentielle change de signe au moins une fois ; puisque $\dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2}$ est la dérivée de la fonction delta de Dirac, elle saute de $-\infty$ en $y=0^-$ à $+\infty$ en $y=0^+$.

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} - k^2\varphi + \frac{\beta}{(\overline{u}-c)}\varphi = 0. \quad [15]$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} a_1 \exp(-l_1 y) & y > 0 \\ a_2 \exp(l_2 y) & y < 0 \end{cases} \quad [16]$$

$$\psi'(x,y,t) = \begin{cases} a_1 \exp(-l_1 y + ik(x-ct)) & y > 0 \\ a_2 \exp(l_2 y + ik(x-ct)) & y < 0, \end{cases} \quad [17]$$

où a_1 et a_2 sont deux constantes arbitraires, et

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(k^2 + \frac{\beta}{c-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ l_2 &= \left(k^2 + \frac{\beta}{c+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad [18]$$

Quand c est complexe, l_1 et l_2 sont choisix telles que leurs partie réelle est positive donc ψ' reste bornée en $y = \mp Y$. Appliquons les conditions d'interface (12) et (13) en $y = 0$ donne la relation de dispersion :

$$c^3 + \frac{3\beta}{4k^2}c^2 + c + \frac{\beta}{4k^2} = 0. \quad [19]$$

Considérons maintenant le profil de vitesse de Helmholtz de la section précédente : $(u,v) = (\overline{u}(y), 0)$, (qui est une solution exacte du système (1) en dehors de la discontinuité), ceci donne :

$$\overline{\psi}(y) = \begin{cases} -y \ if y > 0 \\ y \ if y < 0 \end{cases} \quad [20]$$

and

$$\overline{\xi}(y) = \Delta\overline{\psi} + y = -2\delta_0 + y \quad [21]$$

où δ_0 est la fonction de Dirac en $y = 0$. Pour un traitement numérique avec ces deux schémas la régularisation de la singularité est nécéssaire. La fonction de Dirac est ainsi remplacé par la suite régularisante. (ρ_ε), qui converge vers δ_0 quand $\varepsilon \to 0$. Soit

$$\rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & |y| > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2}y + \frac{1}{\varepsilon} & -\varepsilon \le y \le 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}y + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le y \le \varepsilon \end{cases} \quad [22]$$

où ε est un nombre réel strictement positif assez petit. Dans la résolution numérique , on prend $\varepsilon = \Delta y$ pour la méthode de seconde ordre qui est le jacobien d'Arakawa Jacobian combiné avec le solver de Poisson de seconde ordre, et $\varepsilon = 8\Delta y$ pour la méthode d'ordre quatre où Δy est le pas d' espace dans la direction Nord-Sud.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(Y) = -1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(-Y) = 1 \quad [23]$$

$$\omega = \xi - y = 0 \ aty = \pm Y. \quad [24]$$

$$\psi(x,y,t) = \overline{\psi}(y) + \mu\psi'(x,y,t)$$

$$\xi(x,y,t) = \overline{\xi}(y) + \mu\Delta\psi'(x,y,t) = -2\delta_0 + y + \mu\Delta\psi'(x,y,t)$$

où $\psi'(x,y,t)$ est donnée dans (17) et $\mu > 0$ est le petit paramètre d'amplitude et c est les racines complexes de (19) correspondant au mode instable. Pour être plus précis, on roule les deux codes en avant en temps pour deux valeurs du paramètre μ (une faible et une forte perturbation) avec la condition initiale donnée par : $\psi(x,y,0) = \overline{\psi}(y) + \mu\psi'(x,y,0)$ $\xi(x,y,0) = \overline{\xi}(y) + \mu\Delta\psi'(x,y,0) = -2\rho_\varepsilon(y) + y + \mu\Delta\psi'(x,y,0)$ où ψ' est donnée par l'équation (17), ρ_ε et $\overline{\psi}$ sont données par (22) et (20) . On rappelle ici que la méthode de Arakawa tend à développer des instabilités numériques à l'échelle de grille et un terme de dissipation $\upsilon\Delta\xi$, est ajouté pour l'équation d'adevection de vorticité afin d'obtenir des résulats plus significatifs. Ce n'est pas le cas pour le code ENO-4 qui a sa propre dissipation numérique qui provient du stincil non linéaire. Une procédure de testes numérique a révélé que $\upsilon = 0.006$ est un choix optimal pour les trois grilles utilisées ici : 64×38 à 256×150.

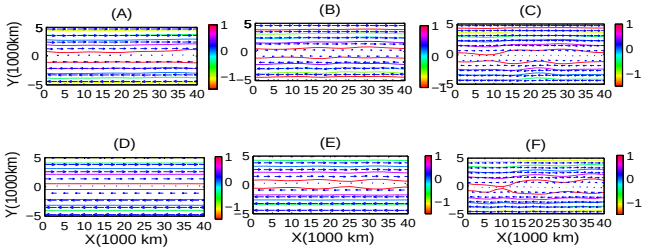


Figure 1. *Le graphe du contour de la fonction de courant totale et vecteurs de vitesses à* $t = 100$ *jours pour une perturbation initiale de taille* $\mu = 0.01$. *(A), (B), et (C) sont obtenus par la méthode d' Arakawa avec une viscosité* $\upsilon = 0.006$ *quand à (D), (E), et (F) sont obtenus avec le schéma ENO-4 avec les grilles de tailles* 64×38 *(A and D),* 128×75 *(B and E), and* 256×150 *(C and F).*

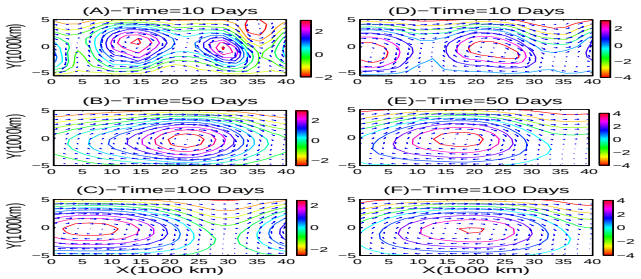


Figure 2. xy*-contours de la fonction de courant totale et vecteurs de vitesses à* $t = 10, 50et100$ *jours dans le cas d'une large perturbation* $\mu = 0.5$ *otenus sur la grille grossière. (A), (B), et (C) sont obtenus par la méthode d' Arakawa avec une viscosité* $\upsilon = 0.006$. *Panels (D), (E), et (F) : avec le schéma ENO-4.*

3. Bibliographie

Arakawa, A. : Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion, two-dimensional Incompressible flow. Journal of Computational Physics 1,119–143 (1966).

Kacimi, A., Aliziane, T., Khouider, B. : The Arakawa Jacobian method and a fourth-order essentially nonoscillatory scheme for the beta-plane barotropic equations. International Journal of Numerical Analysis and Modeling. Accepted (2012).

A.Kacimi, B.Khouider, A numerical investigation of the barotropic instability on the equatorial beta-plane. Theoretical and Computational Fluid Dynamic, DOI 10.1007/s00162-012-0260-3, 2012.

Khouider, B., Majda, A. : A non-oscillatory balanced scheme for an idealized tropical climate model. Part I : Algorithm and validation.Theor. Comput. Fluid. Dyn. 19 1–24 (2005).

Osher, S., Shu, O. : High-order essentialy nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi Equations. SIAM J. Numer. Anal. 28, 907-922 (1991).

Rayleigh, Lord (John William Strutt). : On the stability, or instability, of certain fluid motions. Proc. London Math. Soc. 9, 57–70 (1880). (Reprinted in Scientific Papers by Lord Rayleigh, 3, 594–596 (1880).

Talley, L. D. : Instabilities and radiation of thin, baroclinic jets. Thesis (PhD). Massachusetts Institute of Thechnology and the Woods Hole Oceanographic Institutions (1982).

Rubrique

Elliptic problems with variable exponents and measure data

Sous-titre

MOKHTARI Fares

Département de Mathématiques et Informatique
Université de Benyoucef Benkhedda
Ville Alger
Pays Algérie
fares_maths@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous étudions l'existence d'une solutions faible d'une classe de problèmes elliptiques non linéaire de type $-\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x,u,Du)) = \mu$ avec μ est une mesure de Radon bornée. Le cadre fonctionnelle est les T- ensembles (La notion de T ensemble a été introduit dans [5]) et les espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant vraiable.

ABSTRACT. In this paper, we prove the existence of weak solutions to a class of nonlinear elliptic problems of the type $-\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x,u,Du)) = \mu$ with μ is Radon bounded measure. The functional setting involves T-set (the notion of T-set was introduced in [5]) and Lebesgue-Sobolev space with variable exponents.

MOTS-CLÉS : Exposant variable, Equation elliptique, A donnée mesure, T- ensemble

KEYWORDS : Variable exponents, Elliptic equation, Measure as data, T-set

1. Introduction

This work is devoted to the study of the elliptic problem

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x,u,Du)) = \mu, & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded open subset of R^N ($N \geq 2$) with Lipschitz boundary $\partial\Omega$, μ is a Radon's bounded measure on Ω, and $a : \Omega \times R \times R^N \to R^N$ is a Carathéodory function and satisfying, a.e $x \in \Omega$ and $\forall u \in R$ and $\forall \xi, \xi' \in R^N$, the following :

$$\widehat{a}(x,u,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^{p(.)}, \quad \widehat{a}(x,u,\xi) = (a_1,\ldots,a_N) \tag{1}$$

$$|\widehat{a}(x,u,\xi)| \leq \beta\left(h + |u|^{p(.)-1} + |\xi|^{p(.)-1}\right), \quad h \in L^{p'(.)}(\Omega) \tag{2}$$

$$(\widehat{a}(x,u,\xi) - \widehat{a}(x,u,\xi'))(\xi - \xi') > 0,\ \xi \neq \xi', \tag{3}$$

where the variable exponent $p(.) : \overline{\Omega} \to (1, +\infty)$ is continuous function such that :

$$1 < p(x) < N, \quad p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1} \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

We introduce the number

$$p_0 = \frac{(1 - \frac{1}{p^+})N + N}{1 - \frac{1}{p^+} + N}, \quad p^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x). \tag{5}$$

As a prototype example, we consider the model problem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\left(|Du|^{p(x)-2}Du\right) = \delta & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{on } \partial B \end{cases} \tag{6}$$

where δ is the Dirac measure at the origin, $B = \{x \in R^N \mid |x| < 1\}$, $p(x) = \frac{2N}{N+1}\left(\frac{|x|}{4N} + 1\right)$, and

$$\forall\, x \in \overline{B}, \quad p_0 < p(x) \leq 2 - \frac{1}{N}.$$

Clearly, the nonlinearity of (6) is more complicated than nonlinearity of the p-Laplacian. As the exponent which appear in (6) depends on the variable x, the functional setting involves Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent $L^{p(.)}(\Omega)$ and $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$. In the $p(x)$-Laplacian case such that $p(.) > 2 - \frac{1}{N}$, the existence of weak solution u was proved in [1]. The regularity of weak solutions to the anisotropic Laplacian with lower order term, L^1-data and $p_i(x) > 2 - \frac{1}{N}$ $i = 1,\ldots,N$ is studied in [2] ; but the existence of the weak solution to the anisotropic Laplacian with measure data is an open question, for more details see [2]. If $\widehat{a}$ independent of u and under the additional hypothesis that the variable exponent $p(.) > 1$ is log-Hölder continuous, that is

$$\exists\, M > 0 : \quad |p(x) - p(y)| \leq -\frac{M}{\ln(|x-y|)} \quad \forall x \neq y \in \Omega \text{ such that } |x-y| \leq 1/2, \tag{7}$$

the existence of entropy solutions for the $p(x)$-Laplacian equation with L^1 data and the existence of weak solutions with $p(.) > 2 - \frac{1}{N}$, are proved in [6]. For recent results of

the notion of entropy solutions, we refer the reader to [7] and the references therein. Here we point out that the definition of the entropy solution is not suitable when the data is the Dirac mass. However, we would like to stress that the method used in [1, 6] cannot be applied here because $p(x) \leq 2 - \frac{1}{N}$. In the constant case $p(.) = p > 2 - \frac{1}{N}$ the existence of a distributional solution u of (P) in the isotropic space $W_0^{1,q}(\Omega)$ for all $q \in [1, \frac{N(p-1)}{N-1})$ has been proved in [3]. The corresponding results for constant case and anisotropic elliptic equations ($p_i > 2 - \frac{1}{N}$) are developed in [4]. If $1 < p \leq N$ Rakotoson [5] proved the existence of solutions in a more general set called $L_0^{1,p}(\Omega)$. The purpose of this paper will be the complete resolution of (P) in a new set $L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ (see Section 2) where μ is a finite Radon measure on Ω and $p(.)$ is assumed to be merely continuous function and satisfies (4). If $1 < p(.) \leq 2 - \frac{1}{N}$, the solution u does not necessarily belong to $W_0^{1,1}(\Omega)$ and it should be noted that $L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ is not necessarily contained in $L^1(\Omega)$ (see [5] for the constant case). Therefore, the study of (6) is a new and interesting topic when the data is a Radon's bounded measure and $1 < p(.) \leq 2 - \frac{1}{N}$. The main steps of the proof consist of obtaining uniform estimates, using local argument (see proposition 2.2), for suitable approximate problems and then passing to the limit. We think that our estimates on the gradients are new compared to the constant case. There are essentially two difficulties introduced in treating nonlinear elliptic operators $Au = -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x, u, Du))$ instead of the Laplacian with variable exponents. The first one is to obtain uniform estimates on the solution u and the gradients Du. The second difficulty is to pass to the limit when the nonlinearity of A depends on u and Du. It is at this stage that the assumption (23) is needed.

Before giving our results, it seems of interest to make some remarks.

REMARQUE. — b

y a straightforward computation, it is possible to check that for all continuous function $p : \overline{\Omega} \to (1, N)$ We have

$$p_0 < \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right) N + N}{1 - \frac{1}{N} + N} < \frac{2N}{N+1} < 2 - \frac{1}{N}.$$

REMARQUE. — T

his work is a generalization of some results on isotropic problems given in [1] and [6]. None of them treat the fully elliptic case as we are dealing here.

2. A new type of set

Let $L_0(\Omega)$ denote the set of Lebesgue mesurable functions on Ω. For all function $p \in C_+(\Omega)$ we put

$$\mathrm{Lip}_{p(.)}(R) = \left\{ T \in W^{1,\infty}(R) \mid T(0) = 0 \quad \text{and} \quad T' \in L^{p^-}(R) \right\}.$$

For $k > 0$, we set $T_k(t) = \frac{1}{2}\{|t + k| - |t - k|\}$, $t \in R$. Notice that the functions T_k $(k > 0)$ and $\arctan$, are in $\mathrm{Lip}_{\mathrm{p}(.)}(R)$. We define

$$L_0^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L_0(\Omega) \mid \forall T \in \mathrm{Lip}_{p(.)}(R),\ T(u) \in W_0^{1,p^-}(\Omega),\ \text{and} \right.$$
$$\left. \sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|DT_k(u)|^{p(x)}}{(1 + |T_k(u)|)^{1+\delta}}\, dx < \infty,\ \forall \delta > 0 \right\}.$$

Note that if $p(x) = p$ for all $x \in \Omega$, $L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ is called $T-$set in ([5]). It's easy to prove that $W_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ for all $p \in C_+(\overline{\Omega})$.

Proposition 2.1 *Let $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$. Then $Du(x)$ exists a.e in Ω. Furthermore, if φ is a C^1-function from R into R, then*

$$D(\varphi \circ u)(x) = (\varphi' \circ u)Du(x) \quad \textit{a.e in} \quad \Omega. \tag{8}$$

For all $k > 0$, the function $v^k = T_k(v)$ satisfies

$$Dv^k(x) = \begin{cases} Dv(x), & \textit{if} \quad |v(x)| < k \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \quad a.e \quad \textit{in} \quad \Omega.$$

The proof is identical to the corresponding in the case of non-variables exponents in [5]. We shall denote by C_i or C various constants depending only on the structure of $\widehat{a}$, μ, N, and Ω.

Proposition 2.2 *Suppose that p_0 as in (5), $s(.)$ and $p(.)$ be a continuous functions on $\overline{\Omega}$ such that*

$$\begin{cases} 0 < s(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}, \\ 1 < p(x) < N, \end{cases} \qquad \textit{for all } x \in \overline{\Omega}. \tag{9}$$

If

$$s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-} \quad \textit{or} \quad p^- \geq p_0 \tag{10}$$

then we have

$$L_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset L^{s(.)}(\Omega). \tag{11}$$

Proof : Let s^+ be a constant such that

$$0 < s+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}. \tag{12}$$

Let $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ and s^+ as in (12). Let $\alpha = 1 - \frac{s^+}{p^{-*}}$ with $p^{-*} = \frac{Np^-}{N-p^-}$, then $\frac{1}{p^-} < \alpha < 1$. For $k > 0$, we have $v^k = T_k(v) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$. Since

$$\psi_\alpha(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma|)^\alpha}$$

is C^1-function and $0 < \psi'_\alpha < 1$, by (8) we deduce that $\psi_\alpha(v^k) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$. Moreover, by Poincaré inequality, we obtain

$$\|\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^{-*}}(\Omega)} \leq C_1 \|D\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^-}(\Omega)}$$

so that

$$\int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} dx \leq C_2 \left(\int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1 + |v^k|)^{\alpha p^-}} dx \right)^{\frac{p^{-*}}{p^-}}. \tag{13}$$

By the fact that $\alpha p^- - 1 = \left(1 - \frac{s^+}{p^{-*}}\right) p^- - 1 = \frac{N-p}{N}\left(\frac{N(p^- -1)}{N-p^-} - s^+\right) > 0$, $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ and $|\Omega| < \infty$, this implies that

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1+|v^k|)^{\alpha p^-}} < \infty \qquad [14]$$

and therefore, by (13),

$$\int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} dx \leq C_3, \quad \forall k > 0. \qquad [15]$$

Now, let $t \in R$; we have

$$\begin{aligned} |t|^{1-\alpha} &\leq (1+|t|)^{1-\alpha} \\ &= (1-\alpha)|\psi_\alpha(t)| + 1. \end{aligned} \qquad [16]$$

In view of (16), we deduce that

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v^k|^{s^+} &= \int_\Omega |v^k|^{p^{-*}(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{p^{-*}-1}(1-\alpha)^{p^{-*}} \int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} + 2^{p^{-*}-1}|\Omega| \end{aligned} \qquad [17]$$

by (15) and (17) we have

$$\int_\Omega |v^k|^{s^+} \leq C_4. \qquad [18]$$

where C_4 is a positive constant independent of k. Let $k \to \infty$ in (18). By Fatou's lemma, we can deduce that $\int_\Omega |v|^{s^+} dx \leq C_4$. Thus we obtain $v \in L^{s(.)}(\Omega)$.

Now suppose that $s^+ \geq \frac{N(p^- -1)}{N-p^-}$. By (9) and the continuity of $s(.)$ and $p(.)$ on $\overline{\Omega}$ there exists a constant $\delta > 0$ such that

$$\max_{y \in \overline{B(x,\delta)} \cap \Omega} s(y) < \min_{y \in \overline{B(x,\delta)} \cap \Omega} \frac{N(p(y)-1)}{N-p(y)}, \quad \forall x \in \Omega. \qquad [19]$$

Using the fact that $\overline{\Omega}$ is compact we can cover it with a finite number of balls $(B_i)_{i=1}^k$. Moreover, there exists a constant $\tau > 0$ such that

$$\delta > |\Omega_i| > \tau, \ \forall i = 1, \ldots, k \quad \text{where} \quad \Omega_i := B_i \cap \Omega. \qquad [20]$$

Let us define

$$s_i^+ = \max_{y \in \overline{\Omega}_i} \{s(y)\}, \ p_i^- = \min_{y \in \overline{\Omega}_i} \{p(y)\}.$$

According to (19), we obtain $s_i^+ < \frac{N(p_i^- -1)}{N-p_i^-}, \quad i = 1, \ldots, k$. Let $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$. Putting $\alpha_i = 1 - \frac{s_i^+}{p_i^{-*}}$, then $\frac{1}{p_i^-} < \alpha_i < 1$. By the assumptions $p^- \geq p_0$, we have

$$1 - \alpha_i < 1 - \frac{1}{p_i^-} \leq 1 - \frac{1}{p^+} \leq \frac{N(p^- -1)}{N-p^-}.$$

This, together with (18), gives

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{1-\alpha_i} dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} |v^k|^{\eta} dx \leq C_5, \quad \eta \in \left(1-\alpha_i; \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}\right). \qquad [21]$$

Using Poincaré-Wirtinger inequality, we get

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k) - \overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^{-*}}(\Omega_i)} \leq C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)},$$

where

$$\overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \psi_{\alpha_i}(v^k).$$

Inequalities (16), (21), and (20) imply that $|\overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k)| \leq C_7$. Hence, by the fact that $p_i^- \leq p(x)$ on Ω_i and $\alpha_i p_i^- > 1$, we have

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^{-*}}(\Omega_i)} \leq C_8 + C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_9.$$

Now, using the same arguments as before locally, instead of the estimate (17), we obtain for all $i = 1, \ldots, k$

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{s_i^+} \leq C_{10} + C_{10} \int_{\Omega_i} |\psi_{\alpha}(v^k)|^{p_i^{-*}} dx \leq C_{11}.$$

By Fatou's lemma, we get

$$\int_{\Omega_i} |v|^{s_i^+} \leq C_{11}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Finally, since $s(x) \leq s_i^+$ on Ω_i we obtain the desired result.

Proposition 2.3 *Let $p(.) : \overline{\Omega} \to (1, N)$ and $q(.) : \overline{\Omega} \to (0, N/(N-1))$ be a continuous functions. Suppose that*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \{q(x)(p(x) - 1)\} < \frac{N(p^- - 1)}{N - 1} \quad \textit{or} \quad p^- \geq p_0.$$

Then we have

$$\int_{\Omega} |Dv|^{q(x)(p(x)-1)} dx < \infty, \quad \forall v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega).$$

Proposition 2.4 *Let $p(.) : \overline{\Omega} \to (2 - \frac{1}{N}, N)$ be a continuous function. We have*

$$L_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,s(.)}(\Omega)$$

for all continuous function $s(.) : \overline{\Omega} \to [1, \infty)$ with

$$1 \leq s(x) < \frac{N(p(x) - 1)}{N - 1} \quad \textit{for all} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Since $p(x) > 2 - \frac{1}{N}$, we have $N(p(x) - 1)/(N - 1) > 1$ for all $x \in \overline{\Omega}$. Let $s(x) \in \left[1, \frac{N(p(x)-1)}{N-1}\right)$ and $q(x) = s(x)/(p(x) - 1)$. Then $q(x) \in (0, \frac{N}{N-1})$. Observe that $p^- > 2 - \frac{1}{N} > p_0$, by Proposition 2.3, for all $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$, we have

$$\int_{\Omega} |Dv|^{s(x)} dx \leq C_{16}. \qquad [22]$$

The proof is finished.
REMARQUE. — I
n the constant case $p(x) = p$, the assumption $p \geq p_0$ is true for all exponent $p > 1$.

3. Statements of the main results

Definition 3.1 *A function u is a weak solution of (P) if $u \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$, $\widehat{a}(x, u, Du) \in L^1(\Omega)^N$, and for every $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, we have*

$$\int_\Omega \widehat{a}(x, u, Du) D\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

Our main result is the following.

Theorem 3.1 *Let $\mu \in M(\Omega)$. Assume that $p(.) : \overline{\Omega} \to (1, N)$ be a continuous function such that*

$$\frac{p^+ - 1}{p^- - 1} < \frac{N}{N-1} \quad \text{or} \quad p_- \geq p_0, \tag{23}$$

and $\widehat{a}$ verifies (1)-(3). Then, there exists at least one weak solution $u \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ of the elliptic equation (P).

4. Bibliographie

M. Bendahmane, P. Wittbold, Renormalized solutions for nonlinear elliptic equations with variable exponents and L^1- data, Nonlinear Analysis TMA 70 (2) (2009) 567–583.

M. Bendahmane, K. H. Karlsen, and M. Saad, Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations with variable exponents and L^1 data, Communications on Pure and Applied Analysis, 12 (3) (2013) 1201–1220.

L. Boccardo, T. Gallouët, Nonlinear elliptic equations with right hand side measures, Comm. Partial Differential Equations. 17 (1992) 641–655.

A. Di Castro, Anisotropic elliptic problems with natural growth terms. Manuscripta Math. 135 (3-4) (2011) 521543.

J.M. Rakotoson, Generalized solution in a new type of sets for problems with measures as data, Differential Integral Equations. 6 (1) (1993) 27–36.

M. Sanchon and J. M. Urbano. Entropy solutions for the $p(x)$-Laplace equation. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 6387–6405.

C. Zhang, Entropy solutions for nonlinear elliptic equations with variable exponents, Electronic Journal of Differential Equations. 92 (2014) 1–14.

Rubrique

Nouveaux résultats sur le développement asymptotique des intégrales

Kamouche Nesrine **Benaissa Abdallah**

Kamouche Nesrine

Département de Mathématiques
Université de Batna 2
Ville Batna
Pays Algérie
kamouche_$nesrine@hotmail.fr$

ABSTRACT. In this paper, we show that the asymptotic expansion of a double Laplace-type integral with a non-stationary minimum point, located on the boundary of the domain of integration, is governed by the order of contact between the boundary curve and the level curve of the phase through the minimum point. This achievement will enable us to construct complete asymptotic expansions in more general settings. Especially, the problem will be completely solved if the phase and the boundary curve of the domain of integration are analytic near the minimum point.

Rï¿½SUMï¿½. Dans ce travail, considérons le développement asymptotique d'intégrales doubles de type de Laplace au cas de points minimaux non stationnaires, situés sur la frontière du domaine d'intégration. Nous allons surtout exposer les derniers résultats sur ce sujet publiés récemment dans "proceedings of the American mathematical society", dans un article de Kamouche et Benaissa. On démontre dans ce travail que l'ordre de contact entre la courbe de la frontière du domaine d'inté gration et la courbe niveau de la phase à travers le point minimum gère le développement asymptotique en question. Cette idée permettra de construire des développements asymptotiques complets dans des contextes plus généraux. En particulier, le problème sera complètement résolu si la phase et la courbe de la frontière sont analytiques au voisinage du point minimum.

KEYWORDS : Integral of the Laplace type, asymptotic expansion, Watson's lemma

MOTS-CLï¿½S : Intégrale du type de Laplace, développement asymptotique, lemme de Watson

1. Introduction

Considérons l'intégrale du type de Laplace

$$I(\lambda) = \int_D g(x_1, x_2)\, e^{-\lambda f(x_1,x_2)} dx_1 dx_2, \qquad [1]$$

où D est un domaine borné de R^2, f et g sont deux fonctions à valeurs réelles, de classe C^∞ sur la fermeture $\overline{D}$ de D, et λ un grand paramètre positif. Le problème du développement asymptotique de telles intégrales est fréquemment rencontré en mathématiques appliquées, en particulier pour approximer des solutions intégrales de certaines équations différentielles, on cite par exemple l'application de ce concept à l'étude du temps de sortie d'un système dynamique perturbé par un bruit aléatoire ([8], Ch. 10). Concernant les principaux résultats sur ce concept, on note qu'il est bien connu depuis l'époque de Laplace que la majeure contribution dans le développement asymptotiques de telles intégrales provient de l'intégration dans un voisinage de l'ensemble des points sur la fermeture $\overline{D}$ du domaine d'intégration D où la phase f atteint son minimum absolu (voir e.g., [3], Ch. 8).

Dans ce papier on sera concerné par le cas où la phase f atteint son minimum absolu en un point A_0, non stationnaire pour la phase f, situé sur la frontière ∂D de D. On montrera ici que le développement asymptotique de telles intégrales est gouverné par "l'ordre de contact" entre la frontière ∂D et la courbe niveau de la phase f à travers le point critique A_0. L'approche utilisée dans ce papier résout complètement le problème dans le cas analytique, où on contruira un développement asymptotique sous la forme

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k \lambda^{-\frac{p+k}{p+1}},$$

où p est l'ordre de contact et les constantes A_k sont indépendantes du paramètre λ. Ce développement est donc de l'ordre de $\lambda^{-\frac{p+2}{p+1}}$. Ce problème avait déjà été étudié par plusieurs auteurs (voir e.g., [5, 6, 4] et [3]), mais uniquement dans un cas particulier de ce travail, correspondant à $p = 1$.

2. Présentation de travail

L'approche utilisée dans ce papier consiste principalement en deux changements de variables.

2.1. Un premier changement de variables

Pour construire le premier changement de variables, on commence par considérer une paramétrisation ξ par la longueur d'arc de la courbe niveau au voisinage du point minimal A_0 :

$$[-\eta,\eta] \ni s \to \xi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s)),$$

où $\eta > 0$ et $\xi(0) = A_0$. Notre changement de variables sera défini par la transformation

$$M : (s,t) \to M(s,t) = (M_1(s,t), M_2(s,t)) \quad [2]$$

du $R_{\eta,\delta} = [-\eta,\eta] \times [-\delta,\delta]$ $(\eta,\delta > 0)$ à R^2, où

$$M_1(s,t) = \xi_1(s) - t\frac{d\xi_2}{ds}(s) \quad et \quad M_2(s,t) = \xi_2(s) + t\frac{d\xi_1}{ds}(s).$$

On vérifiera facilement que $M(0,0) = A_0$ et le Jacobien $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)}$ de la transformation M est

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)} &= 1 + t\left[\frac{d^2\xi_1}{ds^2}(s)\frac{d\xi_2}{ds}(s) - \frac{d\xi_1}{ds}(s)\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s)\right] \\ &= 1 + t\kappa_\gamma(s),\end{aligned}$$

$\kappa_\gamma(s)$ étant la courbure de la courbe niveau. Ce premier changement de variables simplifiera notre intégrale sous la forme

$$\int\int Ge^{i\lambda F} dsdt, \quad [3]$$

où

$$\begin{aligned}G(s,t) &= g(M(s,t))(1 + t\kappa_\gamma(s)), \quad [4]\\ F(s,t) &= f(M(s,t)).\end{aligned}$$

2.2. Deuxième changement de variables

Le deuxième changement de variables consiste en la transformation de l'intégrale double (3), obtenue par le premier changement de variables en une intégrale de Laplace unidimensionnelle. Pour ce faire, on utilise un théorème de résolution d'intégrales multiples (voir e.g., [3], Ch. 5), à travers le changement de variables

$$m(s,t) = (s,u) : u = F(s,t). \quad [5]$$

Une idée clef, inspirée du papier du deuxième auteur et de Roger [2], nous permettra d'exprimer analytiquement les bornes de l'intégrale obtenue. Plus précisément, on obtiendra une intégrale sous la forme

$$\int_0^\rho \int_{\widetilde{\varphi}\left(-\zeta^{\frac{1}{p+1}}\right)}^{\widetilde{\varphi}\left(\zeta^{\frac{1}{p+1}}\right)} \widetilde{G}(s,\zeta)\, e^{-\lambda\zeta} dsd\zeta. \quad [6]$$

Dans (6), $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{G}$ sont de classe C^∞ et ρ un nombre positif assez petit. Le lemme de Watson ([7], pp. 71-72) nous permettra enfin d'obtenir le développement asymptotique requis, dans l'échelle des fonctions $\lambda^{-\frac{p+k}{p+1}}$, $k \geq 2$.

3. Conclusion

Dans ce papier on construit des développements asymptotiques d'intégrales doubles du type de Laplace, quand la phase atteint son minimum en un point, non stationnaire pour la phase, situé sur la frontière du domaine d'intégration. Ces développements, qui sont gouvernés par l'ordre de contact entre la courbe niveau passant par le point critique et la frontière du domaine d'intégration, sont de l'ordre de $\lambda^{-\frac{p+2}{p+1}}$, p étant l'ordre de contact. On note que dans les travaux antérieurs, on n'a obtenu des développements que dans un cas particulier, où l'ordre de contact est minimal $(=1)$.

4. References

[1] NESRINE KAMOUCHE & ABDALLAH BENAISSA *Asymptotic expansion of double Laplace-type integrals : the case of non-stationary minimum points*. Proceeding of the American Mathematical Society. http://dx.doi.org/10.1090/proc/13064, May 4, 2016.

[2] A. BENAISSA & C. ROGER, *Asymptotic expansion of multiple oscillatory integrals with a hypersurface of stationary points of the phase*, Proc. R. Soc. A **469** : 20130109. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2013.0109, (2013).

[3] R. WONG, *Asymptotic approximations of integrals*, Academic Press, Boston, 1989.

[4] W. B. FULKS & J. O. SATHER, *II. Laplace method for multiple integrals,* PACIFIC J. MATH. **11,** pp. 185-192, (1962).

[5] G.V. LIAKHOVETSKI & R.B. PARIS, *Asymptotic expansions of Laplace-type integrals. III, J. of Comp. and Appl. Math.* **132**, pp. 409–429, (2001).

[6] G. NEMES, *Asymptotic Expansions for Integrals,* (Thesis), Loránd Eötvös University , Budapest, May 2012.

[7] F. W. J. OLVER, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974.

[8] Z. SCHUSS, *Application of stochastic process, An analytical approach,* Springer-Verlag, New York, 2010.

Rubrique

Analysis of An Antiplane Contact Problem

An Antiplane Contact Problem

Dalah Mohamed and Derbazi Ammar

Department of Mathematics
Faculty of Exactes Sciences: FSE University of Constantine: UFMC
Constantine
Algeria
dalah.mohamed@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous considérons que le matériel est électro-viscoélastique avec une mémoire longue, de plus, il est modélisé par la loi de Tresca qui est en contact avec une fondation régide. En premier temps, nous dérivons une formulation variationnelle du modèle. Finalement, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible de ce modèle.

ABSTRACT. In this paper, we considred that the material is assumed to be electro-viscoelastic with long-term memory, and the friction is modeled with Tresca's law and the foundation is assumed to be electrically conductive. First we derive the classical variational formulation of the model. Finally, we prove the existence of a unique weak solution to the model.

MOTS-CLÉS : Antiplane déformation, Matériel électro-viscoélastique, Frottement de Tresca, Point fixe, Inǫuation variationnelle.

KEYWORDS : Antiplane shear deformation, Electro-viscoelastic material, Tresca's friction, Fixed point, Variational inequality.

1. Introduction

There is a considerable interest in frictional or frictionless contact problems involving piezoelectric materials, i.e. materials characterized by the coupling between the mechanical and electrical properties. This coupling, in a piezoelectric material, leads to the appearance of electric potential when mechanical stress is present, and conversely, mechanical stress is generated when electric potential is applied. The first effect is used in mechanical sensors, and the reverse effect is used in actuators, in engineering control equipments. Contact problems with normal compliance for electro-viscoelastic materials were investigated in [1]. There, variational formulations of the problems were considered and their unique solvability was proved. Antiplane problems for piezoelectric materials were considered in [1, 2].

The he paper is structured as follows. In Section 2 we describe the model of the frictional contact process between electro-viscoelastic body and a conductive deformable foundation. In Section 3 we derive the variational formulation. It consists of a variational inequality for the displacement field coupled with a time-dependent variational equation for the electric potential. We state our main result, the existence of a unique weak solution to the model in Theorem 3.2.

2. The Mathematical Model

We are interested in the deformation of the cylinder on the time interval $[0, T]$. We assume that

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \quad \text{with } f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \quad \text{with } f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$q_0 = q_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$q_2 = q_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_b \times [0, T] \to \mathbb{R}. \tag{4}$$

The forces (1), (2) and the electric charges (3), (4) would be expected to give rise to deformations and to electric charges of the piezoelectric cylinder corresponding to a displacement $\mathbf{u}$ and to an electric potential field φ which are independent on x_3 and have the form

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \quad \text{with } u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}. \tag{6}$$

The material's is modeled by the following electro-viscoelastic constitutive law with long-term memory

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + 2\int_0^t \theta(t-s)\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{s}))ds - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \tag{7}$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi), \tag{8}$$

In the antiplane context (5), (6), using the constitutive equations (7), (8) it follows that the stress field and the electric displacement field are given by

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{\sigma}_{13} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \boldsymbol{\sigma}_{31} & \boldsymbol{\sigma}_{32} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

We assume that

$$\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ e\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) \in \mathcal{S}^3, \tag{11}$$

where e is a piezoelectric coefficient. We also assume that the coefficients θ, μ, β and e depend on the spatial variables x_1, x_2, but are independent on the spatial variable x_3. Since $\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{E}^*\mathbf{v}$ for all $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{S}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, it follows from (11) that

$$\mathcal{E}^*\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & ev_3 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3. \tag{12}$$

The equilibrium equations above reduce to the following scalar equations

$$\operatorname{div}(\mu\nabla u) + \int_0^t \theta(t-s)\operatorname{div}(\nabla u(s))ds + \operatorname{div}(e\nabla\varphi) + f_0 = 0, \text{in } \Omega \times (0,T), \tag{13}$$

$$\operatorname{div}(e\nabla u - \beta\nabla\varphi) = q_0. \tag{14}$$

We now describe the boundary conditions. During the process the cylinder is clamped on $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$ and the electric potential vanish on $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$; thus, (5) and (6) imply that

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{15}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{on } \Gamma_a \times (0,T). \tag{16}$$

Let $\boldsymbol{\nu}$ denote the unit normal on $\Gamma \times (-\infty, +\infty)$. We have

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0) \quad \text{with } \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \tag{17}$$

For a vector $\mathbf{v}$ we denote by v_ν and $\mathbf{v}_\tau$ its normal and tangential components on the boundary, given by

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu\boldsymbol{\nu}. \tag{18}$$

For a given stress field σ we denote by σ_ν and σ_τ the normal and the tangential components on the boundary, that is

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}. \tag{19}$$

From (9), (10) and (17) we deduce that the Cauchy stress vector and the normal component of the electric displacement field are given by

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = (0, 0, \mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi), \quad \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi. \quad (20)$$

Taking into account (2), (4) and (20), the traction condition on $\Gamma_2 \times (-\infty, \infty)$ and the electric conditions on $\Gamma_b \times (-\infty, \infty)$ are given by

$$\mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0,T), \quad (21)$$

$$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \quad \text{on } \Gamma_b \times (0,T). \quad (22)$$

We now describe the frictional contact condition and the electric conditions on $\Gamma_3 \times (-\infty, +\infty)$. First, from (5) and (17) we infer that the normal displacement vanishes, $u_\nu = 0$, which shows that the contact is bilateral, that is, the contact is kept during all the process. Using now (5) and (17)–(19) we conclude that

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\tau) \quad (23)$$

where

$$\sigma_\tau = (0, 0, \mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi).$$

We use (20) and the previous equality to obtain

$$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = k\,(\varphi - \varphi_F) \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0,T). \quad (24)$$

Finally, we prescribe the initial displacement,

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (25)$$

where u_0 is a given function on Ω.

We collect the above equations and conditions to obtain the following mathematical model which describes the antiplane shear of an electro-viscoelastic cylinder in frictional contact with a conductive foundation.

Problem $\mathcal{P}$

Find the displacement field $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ and the electric potential $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ such that

$$\operatorname{div}(\mu\nabla u) + \int_0^t \theta(t-s)\operatorname{div}(\nabla u(s))ds + \operatorname{div}(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad (26)$$

$$\operatorname{div}(e\nabla u - \alpha\nabla\varphi) = q_0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad (27)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0,T), \quad (28)$$

$$\mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0,T), \quad (29)$$

$$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi| \le g, \\ |\mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi| < g \Rightarrow \dot{u}(t) = 0, \ \text{ on } \Gamma_3 \times (0,T), \\ |\mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi| = g \Rightarrow \exists\,\beta \ge 0 \quad \text{such that} \\ \mu\partial_\nu u + \int_0^t \theta(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds + e\partial_\nu\varphi = -\beta\dot{u}, \end{cases} \tag{30}$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu\varphi = q_2 \quad \text{on } \Gamma_b \times (0,T), \tag{31}$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu\varphi = k\,(\varphi - \varphi_F) \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{32}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \tag{33}$$

3. Variational Formulation and Main Result

We derive now the variational formulation of the Problem $\mathcal{P}$. To this end we introduce the function spaces

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad W = \{\,\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ on } \Gamma_a\}$$

where, here and below, we write w for the trace γw of a function $w \in H^1(\Omega)$ on Γ. Since $meas\ \Gamma_1 > 0$ and $\operatorname{meas}\Gamma_a > 0$, it is well known that V and W are real Hilbert spaces with the inner products

$$(u,v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx \quad \forall u, v \in V, \quad (\varphi,\psi)_W = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\,dx \quad \forall \varphi,\ \psi \in W.$$

Moreover, the associated norms

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_W = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \psi \in W \tag{34}$$

are equivalent on V and W, respectively, with the usual norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

In the study of the Problem $\mathcal{P}$ we assume that the viscosity coefficient satisfy

$$\theta \in W^{1,2}(0,T) \tag{35}$$

and the electric permittivity coefficient satisfy

$$\alpha \in L^\infty(\Omega) \text{ and there exists } \alpha^* > 0 \text{ such that } \ \alpha(\mathbf{x}) \ge \alpha^* \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{36}$$

We also assume that the Lamé coefficient and the piezoelectric coefficient satisfy

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \quad \text{and} \quad \mu(\mathbf{x}) > 0 \ \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{37}$$

$$e \in L^\infty(\Omega). \tag{38}$$

The forces, tractions, volume and surface free charge densities have the regularity

$$f_0 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \quad f_2 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma_2)), \tag{39}$$

$$q_0 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma_b)). \tag{40}$$

The electric conductivity coefficient and the friction bound function g satisfies the following properties

$$k \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{and} \quad k(\mathbf{x}) \geq 0 \ \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \tag{41}$$

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{and} \quad g(\mathbf{x}) \geq 0 \ \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \tag{42}$$

Finally, we assume that the electric potential of the foundation and the initial displacement are such that

$$\varphi_F \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma_3)). \tag{43}$$

The initial data are chosen such that

$$u_0 \in \ V \tag{44}$$

and, moreover,

$$a_\mu(u_0,v)_V + j(v) \geq (f(0),v)_V \quad \forall v \in V. \tag{45}$$

We define now the functional $j : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ given by the formula

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v|\,da \quad \forall v \in V. \tag{46}$$

We also define the mappings $f : [0,T] \to V$ and $q : [0,T] \to W$, respectively, by

$$(f(t),v)_V = \int_\Omega f_0(t)v\,dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)v\,da, \tag{47}$$

$$(q(t),\psi)_W = \int_\Omega q_0(t)\psi\,dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi\,da + \int_{\Gamma_3} k\,\varphi_F(t)\psi\,da, \quad \forall v \in V, \psi \in W, t \in [0,T]. \tag{48}$$

The definition of f and q are based on Riesz's representation theorem ; moreover, it follows from assumptions by (39)–(40), that the integrals above are well-defined and

$$f \in W^{1,2}(0,T;V), \tag{49}$$

$$q \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{50}$$

Next, we define the bilinear forms $a_\mu : V \times V \to \mathbb{R}$, $a_e : V \times W \to \mathbb{R}$, $a_e^* : W \times V \to \mathbb{R}$, and $a_\alpha : W \times W \to \mathbb{R}$, by equalities

$$a_\mu(u,v) = \int_\Omega \mu\,\nabla u \cdot \nabla v\,dx, \tag{51}$$

$$a_e(u,\varphi) = \int_\Omega e\,\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = a_e^*(\varphi,u), \tag{52}$$

$$a_\alpha(\varphi,\psi) = \int_\Omega \beta\,\nabla\varphi \cdot \nabla\psi\,dx + \int_{\Gamma_3} k\,\varphi\psi\,dx, \tag{53}$$

for all $u,\ v \in V$, $\varphi, \psi \in W$. Assumptions (46)–(48) imply that the integrals above are well defined and, using (34), it follows that the forms a_μ, a_e and a_e^* are continuous ; moreover, the forms a_μ and a_α are symmetric and, in addition, the form a_α is W-elliptic, since

$$a_\alpha(\psi, \psi) \geq \alpha^* \|\psi\|_W^2 \quad \forall \psi \in W. \tag{54}$$

The variational formulation of Problem $\mathcal{P}$ is based on the following result.

Lemma 3.1. *If (u, φ) is a smooth solution to Problem $\mathcal{P}$, then $(u(t), \varphi(t)) \in X$ and*

$$\begin{aligned} &a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + (\int_0^t \theta(t-s)u(s)\, ds, v - \dot{u}(t))_V + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) \\ &+ j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ &\qquad \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{55}$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,\ t \in [0,T], \tag{56}$$

$$u(0) = u_0. \tag{57}$$

Now, from Lemma 3.1 and condition (57) lead to give the following variational Problem :

Problem $\mathcal{PV}$

Find a displacement field $u : [0,T] \to V$ and an electric potential field $\varphi : [0,T] \to W$ such that

$$\begin{aligned} &a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + (\int_0^t \theta(t-s)u(s)\, ds, v - \dot{u}(t))_V + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + \\ &j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ &\qquad \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{58}$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W,\ t \in [0,T], \tag{59}$$

$$u(0) = u_0. \tag{60}$$

Our main existence and uniqueness result, which we state now and prove in the next section, is the following :

Theorem 3.2. *Assume that (35)–(50) hold. Then the variational problem $\mathcal{PV}$ possesses a unique solution (u, φ) satisfies*

$$u \in W^{1,2}(0,T;V), \quad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{61}$$

We note that an element (u, φ) which solves Problem $\mathcal{PV}$ is called a weak solution of the antiplane contact Problem $\mathcal{P}$. We conclude by Theorem 3.2 that the antiplane contact Problem $\mathcal{P}$ has a unique weak solution, provided that (35)–(50) hold.

Lemma 3.3. *For all $\eta \in \mathcal{W}$ there exists a unique element $\eta \in W^{1,2}(0,T;X)$ such that satisfy the inequality and the data condition defined by the problem $\mathcal{PV}_\eta^1$:*

Problem $\mathcal{PV}_\eta^1$

$$\begin{aligned} &a(u_\eta(t), v - \dot{u_\eta}(t)) + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X + \\ &j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \geq (f(t), v - \dot{u_\eta}(t))_X, \\ &\forall v \in X,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{62}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{63}$$

We use in subsequent demonstration of the previous lemma the following theorem

Theorem 3.4. *([2], p. 117) Let $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ be a real Hilbert space and let $j : X \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ be a convex lower semicontinuous functional. Assume that $j \neq +\infty$, that is*

$$D(j) = \{v \in X \quad j(v) < \infty\} \neq \phi.$$

Let $f \in W^{1,2}(0,T;X)$ and $u_0 \in X$ be such that

$$\sup_{v \in D(j)} = \{(f(0), v)_X - (u_0, v)_X - j(v)\} < +\infty.$$

Then the variational problem $\mathcal{PV}$ possesses a unique solution (u, φ) satisfies $u(0) = u_0$ and

$$(u(t), v - \dot{u}(t))_X + j(v) - j(\dot{u}(t)) \leq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X \quad a.e.\, t \in (0,T).$$

– Step 2 :

In the second step, we use the displacement field u_η obtained in Lemma 3.3 to define the following variational Problem for the electric potential field.

Problem $\mathcal{PV}_\eta^2$

Find an electrical potential $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ such that

$$a_\alpha(\varphi_\eta(t), \psi) - a_e(u_\eta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,\ t \in [0,T]. \tag{64}$$

The well-posedness of problem $\mathcal{PV}_\eta^2$ follows.

Lemma 3.5. *There exists a unique solution $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ which satisfies (65). Moreover, if φ_{η_1} and φ_{η_2} are the solutions of (65) corresponding to η_1, $\eta_2 \in C([0,T];V)$ then, there exists $c > 0$, such that*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c\, \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{65}$$

Now, for all $\eta \in \mathcal{W}$ we denote by u_η the solution of Problem $\mathcal{PV}_\eta^1$ obtained in Lemma 3.3 and by φ_η the solution of Problem $\mathcal{PV}_\eta^2$ obtained in Lemma 3.5.

– Step 3 :

In the third step, we consider the operator $\Lambda : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$.
We now use Riesz's representation theorem to define the element $\Lambda\eta(t) \in \mathcal{W}$ by equality

$$\begin{aligned} (\Lambda\eta(t), w)_{\mathcal{W}} = \int_0^t \theta(t-s) u_\eta(s)\, ds + a_e^*(\varphi_\eta(t), w), \\ \forall \eta \in \mathcal{W}, \quad \forall w \in W \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{66}$$

Clearly, for a given $\eta \in \mathcal{W}$ the function $t \mapsto \Lambda\eta(t)$ belongs to $\mathcal{W}$. In this step we show that the operator $\Lambda : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ has unique fixed point.

Lemma 3.6. *There exists a unique $\eta^* \in \mathcal{W}$ such that $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Existence

Let $\eta^* \in W^{1,2}(0,T;V)$ be the fixed point of the operator Λ, and let u_{η^*}, φ_{η^*} be the solutions of problems $\mathcal{PV}^1_\eta$ and $\mathcal{PV}^2_\eta$, respectively, for $\eta = \eta^*$. It follows from (66) that

$$(\eta^*(t), v)_V = \int_0^t \theta(t-s)u_\eta*(s)\,ds + a^*_e(\varphi_\eta*(t), w) \quad \forall v \in V,\ t \in [0,T]$$

and, therefore, (58), (60) and (65) imply that $(u_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*})$ is a solution of problem $\mathcal{PV}$. Regularity (61) of the solution follows from Lemmas 3.3 and 3.5.

The uniqueness of the solution follows from the uniqueness of the fixed point of the operator Λ. It can also be obtained by using arguments similar as those used in [1].

4. Bibliographie

C. NICULESCU, A. MATEI, M. SOFONEA, « An Antiplane Contact Problem for Viscoelastic Materials with Long-Term Memory« , *Mathematical Modelling and Analysis*, n° 11, 213-228, 2006

S .MIGÓRSKI, A. OCHAL, M. SOFONEA, « Modeling and analysis of an antiplane piezoelectric contact problem« , *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, n° 19, 1295-1324, 2009

S. MIGÓRSKI, A. OCHAL, M. SOFONEA, « Solvability of Dynamic Antiplane Frictional Contact Problems for Viscoelastic Cylinders« , *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, n° 70, 3738-3748, 2009.

Z.-G. ZHOU, B. WANG, S.-Y. Du, « Investigation of antiplane shear behavior of two collinear permeable cracks in a piezoelectric material by using the nonlocal theory« , *Journal of Applied Mechanics*, n° 69, 1-3, 2002.

Rubrique

An Inverse Eigenvalue Problem

A Regularized Numerical Solution of an Inverse Eigenvalue Problem of Computing Guided Modes in a Class of Optical Fibers

REZGUI Hayat and CHOUTRI Abdelaziz

Mathematics Department
École Normale Supérieure de Kouba, B.P. 92, Vieux Kouba, 16050
Alger, Algérie.
rezguihayat@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous résolvons un problème inverse aux valeurs propres qui consiste à trouver (pour une fréquence donnée (nombre d'ondes)) une fibre optique à gradient d'indice appropriée à transporter des champs électromagnétiques ayant des constantes de propagation connues. Ceci est un problème mal posé, il lui faut donc une régularisation. Nous présentons alors une méthode numérique, basée sur la régularisation de *Tikhonov* afin de déterminer l'indice de réfraction d'une fibre optique appropriée. Par ailleurs, nous utilisons la méthode *L-curve* [1] pour déterminer la valeur optimale du paramètre de régularisation correspondant.

ABSTRACT. In this work, we solve an inverse eigenvalue problem that consists in finding (for a given frequency) a suitable graded-index optical fiber for carrying electromagnetic fields having known propagation constants. This is an ill-posed problem, and it need a regularization. We present a numerical method, based on *Tikhonov* regularization, in order to determine the refractive index of the considered optical fiber. Furthermore, we use the *L-curve* method [1] to determine the optimal value of the corresponding regularization parameter.

MOTS-CLÉS : Problèmes inverses aux valeurs propres, fibres optiques, profile à gradient d'indice, optimisation convexe, régularisation de *Tikhonov*, méthode *L-curve*

KEYWORDS : Inverse eigenvalue problems, optical fibers, graded-index profile, convex optimization, *Tikhonov* regularization, *L-curve* method

1. The direct problem

Computing guided modes in an optical fiber having an homogenous cladding (Figure 1)

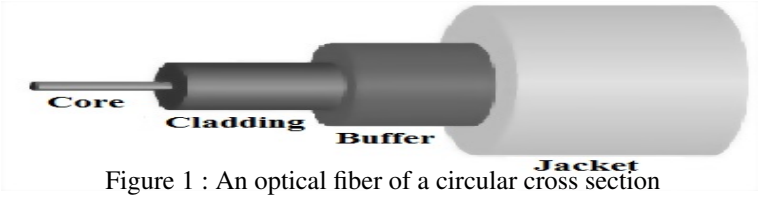


Figure 1 : An optical fiber of a circular cross section

under weak guidance assumptions is equivalent to solve the following scalar eigenvalue Problem (Π) posed in the whole plane $\mathbb{R}^2$ [2, 3, 4, 9] :

$$(\Pi)\left|\begin{array}{l}\text{Find } \beta \in]kn_\infty, kn_+[,\ u \in H^1(\mathbb{R}^2),\ u \neq 0 \text{ , such that :}\\ -\Delta u - n^2(x,y)k^2u = -\beta^2 u,\ \text{in } \mathbb{R}^2\end{array}\right.$$

where : Δ is the Laplacian operator in 2D, $-\beta^2$ is an eingenvalue of Problem (Π),
k is the wavenumber, u is a transverse component of the electromagnetic field and [7] :

$$n^2(x,y) = \begin{cases} n_+^2\left(1 - 2\delta\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^\alpha\right) & ,0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq a \\ n_\infty^2 & ,\sqrt{x^2+y^2} \geq a \end{cases}$$

n is the refractive index (of the considered optical fiber), it is a dimensionless fundamental parameter which depends on the characteristics of the optical fiber. n satisfies :

$$n \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ n_+ = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} n(x,y),\ n_+ > n_\infty > 0$$

δ is the normalized difference index, it is defined as : $\delta = \dfrac{n_+^2 - n_\infty^2}{2n_+^2}, \delta \ll 1$
α is the grade profile parameter, it satisfies : $1 \leq \alpha$
a is the characteristic radius of the fiber's core.

2. The inverse problem

The inverse eigenvalue Problem to be solved (in this work) is :

$$(\Pi'')\left|\begin{array}{l}\text{Find } n \in L^\infty(\Omega_R),\ \text{such that :}\\ -\Delta u_R(x,y) - k^2n^2(x,y)u_R(x,y) = -\beta_R^2 u_R(x,y), \text{in } \Omega_R\\ \gamma_1 u_R + \gamma_2 \dfrac{\partial u_R}{\partial r} = g,\ \text{on } S_R\end{array}\right. \tag{2.1}$$

knowing :
• A finite number of spectral data $(-\beta_R^2, u_R)$ of the direct problem posed in Ω_R (associated to a certain boundary condition : Dirichlet, Neumann, Robin).
• The frequency k.
where :

$$\begin{cases} \Omega_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 < R^2\right\}, S_R = \partial\Omega_R \\ \Omega_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 < a^2\right\}, R \text{ satisfies : } 0 < a < R, \\ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},\ \gamma_1 \text{ and } \gamma_2 \text{ cannot vanish at the same time,} \\ g \text{ is a real function defined on } S_R. \end{cases}$$

3. Approximation's function and statement of the objective

Henceforth, we set :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(r) &= n^2(r)\\ &= \begin{cases} n_+^2 - (n_+^2 - n_\infty^2).\Big(\frac{r}{a}\Big)^\alpha & ,0 \le r \le a \\ n_\infty^2 & ,a \le r \le R \end{cases}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Our aim is to find the suitable $c = (c_1, c_2, c_3)^t \in \mathbb{R}^3$ such that the following function :

$$\mathcal{N}_c(r) = \begin{cases} c_1 - (c_1 - c_2).\Big(\frac{r}{a}\Big)^{1+c_3^2} & ,0 \le r \le a \\ c_2 & ,a \le r \le R \end{cases} \tag{3.2}$$

presents the best approximation of the function $\mathcal{N}(r)$ versus the norm $\|.\|_\infty$.
The determination of the function $\mathcal{N}_c$, leads (from Equation (3.2)) to the determination of $\mathcal{N}$: the square of the exact refractive index n (or at least a numerical approximation to it) which is the objective of this work.

Notation. *In what follows, we denote :*
• $c^* = \big(n_+^2, n_\infty^2, \alpha\big)^t \in \mathbb{R}^3$.
• $c^{ad} = \big(c_1, c_2, 1 + c_3^2\big)^t$, *for all* $c = (c_1, c_2, c_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

Theorem 3.1.

$$\exists \zeta > 0, \forall c = (c_1, c_2, c_3)^t \in \mathbb{R}^3 : \|\mathcal{N} - \mathcal{N}_c\|_\infty \le \zeta.\|c^{ad} - c^*\|_1$$

(*Here and below* $\|.\|_1$ *denotes the* ℓ_1*-norm*). *(For the proof, See [10]).*

4. Notations and basic terminology

Let $l \in \mathbb{N}^*$. For each $c = (c_1, c_2, c_3)^t \in \mathbb{R}^3$, we denote :

$c^0 = \big(c_1^0, c_2^0, c_3^0\big)^t \in \mathbb{R}^3$ as an arbitrary starting vector of c,
$-(\beta_1(c))^2, -(\beta_2(c))^2, ..., -(\beta_l(c))^2$:
the l first corresponding eigenvalues $(Equation(2.1))$ corresponding to the potential $\mathcal{N}_c$,
$-(\beta_1)^2, -(\beta_2)^2, ..., -(\beta_l)^2$:
the l first corresponding eigenvalues $(Equation(2.1))$ corresponding to the potential $\mathcal{N}$,
$b(c) = \big(-(\beta_1(c))^2, -(\beta_2(c))^2, ..., -(\beta_l(c))^2\big)^t \in \mathbb{R}^l$,
$b = \big(-(\beta_1)^2, -(\beta_2)^2, ..., -(\beta_l)^2)\big)^t \in \mathbb{R}^l$.

The suitable values of c_1, c_2, c_3 (cited in Section 3.) will be computed by solving the following optimization problem (Equation (4.1)), posed in $\mathbb{R}^3$:

$$c^i = \underset{c \in \mathbb{R}^3}{argmin} f_i(c), \forall i \in \mathbb{N}^* \tag{4.1}$$

such that $\forall c \in \mathbb{R}^3, \forall i \in \mathbb{N}^*$:

$$f_i(c) = \|b - L_i(c)\|_2^2 \tag{4.2}$$

where :

$$L_i(c) = b\left(c^{i-1}\right) + \Gamma_i.\left(c - c^{i-1}\right)$$

$$c^{i-1} = \left(c_1^{i-1}, c_2^{i-1}, c_3^{i-1}\right)^t \in \mathbb{R}^3\ ,\ c^i = \left(c_1^i, c_2^i, c_3^i\right)^t \in \mathbb{R}^3$$

Γ_i is the real $l \times 3$ matrix defined by : $\Gamma_i = \left(\dfrac{\partial(-(\beta_p(c^{i-1}))^2)}{\partial c_j}\right)_{\substack{1\leq p\leq l\\ 1\leq j\leq 3}} = (\nabla b(c^{i-1}))^t$

5. *Tikhonov* regularization

Tikhonov regularization [5, 6, 8] is the most widely used method of regularization for solving ill-posed problems and inverse problems. In order to favor a particular solution with properties that seem relevant, a regularization term is introduced (in minimizing the function f_i on $\mathbb{R}^3$) as follows :

$$\mathcal{J}_{i,\lambda}(c) = f_i(c) + \lambda.\left\|c\right\|_2^2 \tag{5.1}$$

$\mathcal{J}_{i,\lambda}$ is twice differentiable and admits a Hessian matrix $\nabla^2\mathcal{J}_{i,\lambda}$ which is positive definite. So, the resolution of the following unconstrained convex minimization problem (Equation (5.2)) :

$$\underset{c\in\mathbb{R}^3}{min}\mathcal{J}_{i,\lambda}(c) \tag{5.2}$$

leads to solve the minimization problem (Equation (4.1)).
Each solution of Equation (5.2) is a solution of the stationary equation :

$$\nabla\mathcal{J}_{i,\lambda}(c) = \mathcal{H}_{i,\lambda}.c + \sigma_i = 0 \tag{5.3}$$

such that :

$$\mathcal{H}_{i,\lambda} = 2\Gamma_i^t.\Gamma_i + 2\lambda.I_3 \text{ (I_3 is the } 3\times 3 \text{ identity matrix)}$$

$$\sigma_i = -2.\Gamma_i^t.\left(b - b\left(c^{i-1}\right) + \Gamma_i.c^{i-1}\right)$$

Corollary 5.1. *For each $i \in \mathbb{N}^*$, Equation (5.2) admits a unique solution (which is the (unique) solution of Equation (5.3)) defined by :*

$$c^i = 2.(\mathcal{H}_{i,\lambda})^{-1}.\Gamma_i^t.\left(b - b\left(c^{i-1}\right)\right) + c^{i-1} - 2\lambda.(\mathcal{H}_{i,\lambda})^{-1}.c^{i-1} \tag{5.4}$$

6. Numerical Experiments

The effectiveness and the performance of the proposed approach is illustrated by two simple computed examples.
We adopted an iterative method (similar to that adopted in [11]) by the use of Equation (6.1) for each iteration $i \in \mathbb{N}^*$. We also use *L-curve* method to determine the optimal value of regularization parameter [1, 5, 6, 8] and hence the corresponding regularized solution.
The obtained numerical results prove that computed c_{reg} corresponding to the optimal choice λ_{opt} for λ is identical to the value of c where the relative error E_{rel}, defined as :

$$E_{rel}(c) = \frac{\left\|c^{ad} - c^*\right\|_2}{\left\|c^{ad}\right\|_2}, \forall c \in \mathbb{R}^3, \text{ is a minimum.}$$

In our examples, we considered a typical multimode graded-index optical fiber having a circular cross section (see Figure 1) such that
$2a = 62.5\mu m$ (core diameter) and $2R = 125\mu m$ (cladding diameter),
$n_+ = 1.5085$, $n_\infty = 1.5$, $k = 18.76017062, l = 1$.
$c^* = (n_+^2, n_\infty^2, \alpha) = (2.27557225, 2.25, \alpha)^t$, $\zeta = 1$ (ζ is defined in **Theorem 3.1.**) .

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(r) &= n^2(r)\\ &= \begin{cases} 2.27557225 - (2.27557225 - 2.25).\left(\dfrac{r}{31.25}\right)^{\alpha} & ,0 \le r \le 31.25\\ 2.25 & ,31.25 \le r \le 62.5 \end{cases}\end{aligned}$$

6.1. First example : A triangular index profile ($\alpha = 1$)

From **Theorem 3.1.**, we have (for $\lambda = \lambda_{opt} = 0.6$) :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N} - \mathcal{N}_{c_{reg}}\|_\infty &\le \zeta \times 7.8520425 \times 10^{-1}\\ &= 0.78520425\end{aligned}$$

here, we have $c^* = (2.27557225, 2.25, 1)^t$, $c_{reg}^{ad} = (2.192427, 2.829926, 1.122133)^t$ and $\|c^* - c_{reg}^{ad}\|_1 = 7.8520425 \times 10^{-1}$.

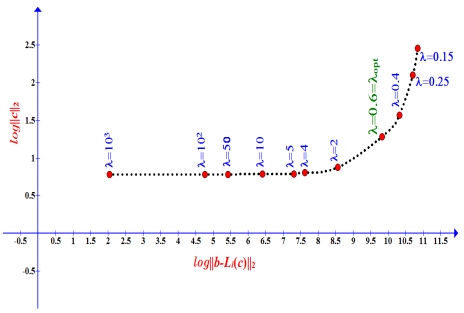


Figure 2 : The computed *L-curve* for $\alpha = 1$

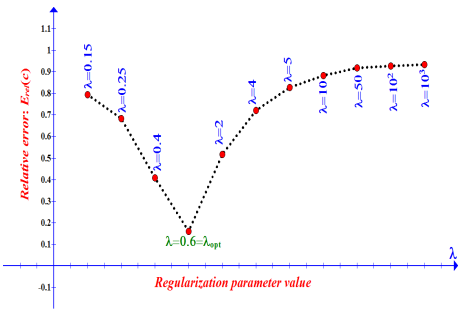


Figure 3 : Relative errors versus λ for $\alpha = 1$

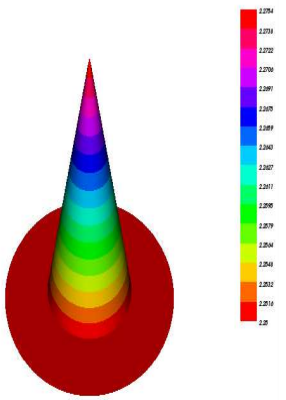


Figure 4 : True function $z = \mathcal{N}(x, y)$ for $\alpha = 1$

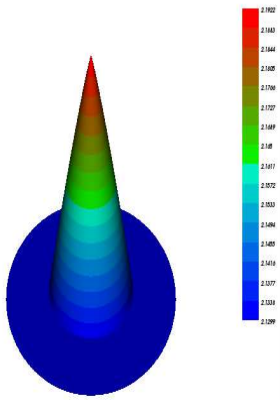


Figure 5 : Approximate function $z = \mathcal{N}_{c_{reg}}(x, y)$

6.2. Second example : A cubic index profile ($\alpha = 3$)

From **Theorem 3.1.**, we have (for $\lambda = \lambda_{opt} = 10$) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N} - \mathcal{N}_{c_{reg}}\|_\infty &\leq \zeta \times 4.7337425 \times 10^{-1} \\ &= 0.47337425 \end{aligned}$$

here, we have $c^* = (2.27557225, 2.25, 3)^t$, $c_{reg}^{ad} = (2.241208, 2.090452, 2.720538)^t$ and $\|c^* - c_{reg}^{ad}\|_1 = 4.7337425 \times 10^{-1}$.

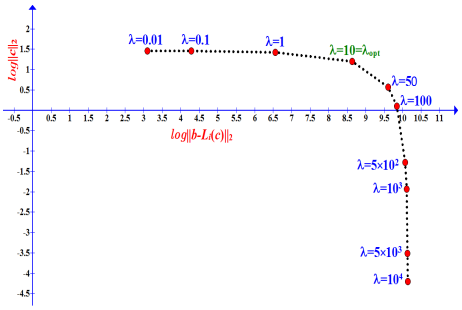


Figure 6 : The computed *L-curve* for $\alpha = 3$

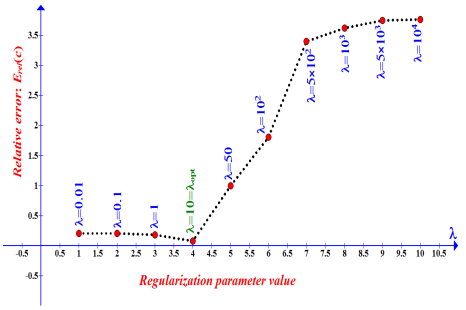


Figure 7 : Relative errors versus λ for $\alpha = 3$

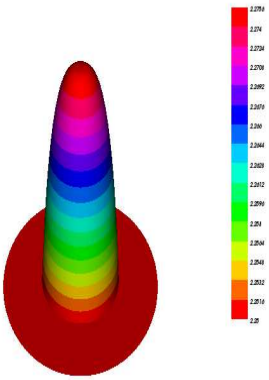


Figure 8 : True function $z = N(x, y)$ for $\alpha = 3$

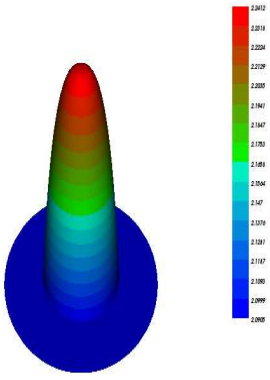


Figure 9 : Approximate function $z = N_{c_{reg}}(x, y)$

7. Conclusion

In this work, we presented a *Tikhonov* regularization assisted by *L-curve* method for the computation of regularized solutions of a discrete ill-posed inverse problem (in the absence of any prior information) of computing guided modes in graded-index optical fibers. Results of numerical experiments (compared to analytical solutions), are promising and indicate that the proposed method is able to be more efficient and addresses more general cases.
(For more examples, results and details one can see [10]).

8. Bibliographie

[1] V. AGARWAL, « Total variation regularization and L-curve method for the selection of regularization parameter », *ECE 599*, 2003.

[2] R. DJELLOULI, « Contribution à l'Analyse mathématique et au calcul des modes guidés des fibres optiques », *Thèse de Doctorat es-Sciences, Université Paris-Sud, France*, 1988.

[3] R. DJELLOULI, C. BEKKEY, « A finite element solution of guided modes of optical fibers using a local non-reflecting boundary conditions », *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Siam*, 2000, 404–408.

[4] R. DJELLOULI, C. BEKKEY, A. CHOUTRI , H. REZGUI, « A local boundary condition coupled to a finite element method to compute guided modes of optical fibers under the weak guidance assumptions », *Math. Method in Appl. Sci.*, vol. 23, 2000, 1551–1583.

[5] S. JINA, X. ZHANG, « A Tikhonov regularization method to estimate Earth's oblateness variations from global GPS observations », *Journal of Geodynamics*, vol. 79, 2014, 23–29.

[6] P. MOJABI , J. LOVETRI, « Adapting the normalized cumulative periodogram parameter-choice method to the Tikhonov regularization of 2-D/TM electromagnetic inverse scattering using born iterative method », *Prog. Electromagn. Res. M.*, vol. 1, 2008, 111–138.

[7] K. OKAMOTO, « Fundamentals of optical waveguides », *Elsevier : USA*, 2006.

[8] D. P. O'LEARY, « Near-optimal parameters for Tikhonov and other regularization methods », *Siam J. Sci. Comput.*, vol. 23, n° 4, 2001, 1161–1171.

[9] H. REZGUI, « Une méthode d'éléments finis couplée à une condition artificielle pour le calcul des modes guidés dans les fibres optiques en régime de faible guidage », *Thèse de Magistère, ENS de Kouba, Algérie*, 1999.

[10] H. REZGUI , A. CHOUTRI,, « An iterative method for *Tikhonov* regularization of an inverse eigenvalue problem of computing guided modes in graded-index optical fibers », submitted.

[11] H. REZGUI , A. CHOUTRI, « A numerical solution technique for solving an inverse eigenvalue problem of computing guided modes in optical fibers. (Case : A graded-index profile) », submitted.

[12] G. STOLTZ, « Optimisation sous contrainte », *Ecole des Ponts & Equipe-projet Matherials, INRIA Rocquencourt*, 2015, 1–25.

[13] D. S. WATKINS, « Fundamentals of matrix computations », *Wiley*, 2010.

Rubrique

An efficient projective approach for the linear complementarity problem

El Amir Djeffal
Mathematics Department
University of Batna 2
Batna
Algeria
djeffal_elamir@yahoo.fr

Adresse :
A définir sur plusieurs lignes par la commande `\address{...}`.
Email sur la dernière ligne.
Dans le cas d'adresses différentes des auteurs, indexer chaque auteur avec des astérisques comme * ou ** obtenues par `\fup{*}` ou `\fup{**}`.
Voir aussi « Consignes aux auteurs »

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous proposons un algorithme d'une méthodes de points intérieurs pour résoudre un problème de complémentarité linéaire (LCP). L'étude est basée sur la transformation d'un problème de complémentarité linéaire (LCP) en un problème quadratique convexe, nous utilisons l'approche de linéarisation pour obtenir le problème simplifié de Karmarkar. Les résultats théoriques déduire de celles établies, nous montrons que cet algorithme bénéficie d'une meilleure complexité théorique polynômiale à savoir, $O(n+m+1)L$, itération liée.

ABSTRACT. In this paper, we propose an algorithm of an interior point methods to solve a linear complementarity problem (LCP). The study is based on the transformation of a linear complementarity problem (LCP) into a convex quadratic problem, then we use the linearization approach to obtain the simplified problem of Karmarkar. Theoretical results deduct of those established later, we show that this algorithm enjoys the best theoretical polynomial complexity namely, $O(n+m+1)L$, iteration bound.

MOTS-CLÉS : Méthode projective, Méthode du point intérieur, Problème de complémentarité linéaire, Algorithme de Karmarkar

KEYWORDS : Projective method, Interior point method, Linear complementarity Problem, Karmarkar's algorithm

1. Introduction

Let us consider the linear complementarity problem (LCP) : find vectors x and y in real space $\Re^n$ that satisfy the following conditions :

$$x \geq 0,\ y = Mx + q \geq 0\ and\ x^t y = 0,$$

where q is a given vector in $\Re^n$ and M is a given $n \times n$ real matrix. LCP have important applications in mathematical programming and various areas of engineering [2, 5, 6]. Primal-dual path-following are the most attractive methods among interior point methods to solve a large wide of optimization problems because of their polynomial complexity and their numerical efficiency [1, 3, 4, 7, 8, 9, 10]. Since Karmarkar's seminal paper [11] a number of various interior point algorithms were proposed and analyzed. For these the reader refers to [12, 13, 14, 22]. The primal-dual interior point methods $(IPMs)$ for Linear Optimization (LO) problems were first introduced by Kojima et al. [15] and Megiddo [16]. They have shown their powers in solving large classes of optimization problems.

The principal idea of this method is to replace a linear complementarity problem by a convex quadratic program. After the appearance of the Karmarkar's algorithm [11], the researchers introduced extensions for the convex quadratic programming [17, 18, 19, 20, 21]. We propose in this paper an interior point method of type projectif to solve a more general problem where the objective function is not inevitably linear. We combine the approach of linearization with ingredients brought by Karmarkar.

The paper is organized as follows. In the next section, the statement of the problem is presented, we deal with the preparation of the algorithm and the description of the algorithm. In Section 3, we state its polynomial complexity. In Section 4, a conclusion and remarks are given.

We use the classical notation. In particular, $\Re^{n+m}$ denotes the $(n+m)$-dimensional Euclidean space. Given $u, v \in \Re^{n+m}$, $u^t v = \sum_{i=1}^{n+m} u_i v_i$ is their inner product, and $\|u\| = \sqrt{u^t u}$ is the Euclidean norm. Given a vector $z \in \Re^{n+m}$, $D = diag(z)$ is the $(n+m) \times (n+m)$ diagonal matrix. I is the identity matrix and e_{n+m+1} is the identity vector of $\Re^{n+m+1}$.

2. Statement of the problem

A convex non-linear programming CNP is the process of solving an optimization problem defined by a system of equalities and inequalities

$$\min \{f(x) : Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad (CNP)$$

where $f : \Re^n \to \Re$ is a convex nonlinear function, $A \in \Re^{m \times n}$, rank.$(A) = m,\ b \in \Re^m$ and its dual problem

$$\max \left\{L(x, y, s) : A^t y + s = -\nabla f(x),\ s \geq 0,\ y \in \Re^m\right\},$$

where $L(x, y, s)$ is the lagrangian function.

The linear complementarity problem associated with the convex nonlinear programming (CNP) is written as follows :

$$\text{find } z \in \Re^{n+m} \text{ such that : } z^t w = 0,\ w = Mz + q,\ (w,\ z) \geq 0 \qquad (LCP)$$

where $w \in \Re^{n+m}$, $z = (x, y) \in \Re^{n+m}$, $M = \begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) & A^t \\ -A & 0 \end{pmatrix} \in \Re^{(n+m)\times(n+m)}$ is a matrix, $q \in \Re^{n+m}$.

Remark 1. *In general, we can not transform an arbitrary linear complementarity problem in a convex quadratic program unless the matrix M is positive semidefinite.*
Theorem 1.[14] *A linear complementarity problem is equivalent to the following convex quadratic program :*

$$\min\left\{z^t(Mz+q) : Mz+q \geq 0,\ z \geq 0\right\},$$

where $(z^*, Mz^* + q)$ is a solution of the linear complementarity problem if and only if z^* is a optimal solution of the problem (1) with $(z^*)^t(Mz^* + q) = 0$.

In the next section we have introduced Karmarkar's algorithm for solving the linear complementarity problem (LCP).

2.1. Preparation of the algorithm

We can write the problem (1) under the following simplified Karmarkar's form :

$$\min\left\{g(t) : Bt = 0,\ t \in S_{n+m+1}\right\}, \qquad (2)$$

where $g : \Re^{n+m+1} \to \Re$ is a linear, convex and differentiable function, B is a matrix, t is a vector and $S_{n+m+1} = \left\{t \in \Re^{n+m+1} : e^t_{n+m+1}t = 1, t \geq 0\right\}$ is the simplex of dimension $(n + m)$ and of the center $a_i = \frac{1}{n+m+1},\ i = 1, ...,\ n + m + 1$.

We introduce the projective Karmarkar's transformation defined by :

$$T_k : \Re^{n+m} \to S_{n+m+1}$$

$$z \to t,$$

where

$$\begin{cases} t_i = \dfrac{\frac{z_i}{z^k_i}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n+m}\frac{z_i}{z^k_i}},\ i = 1, ...,\ n + m \\ \\ t_{n+m+1} = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n+m} t_i. \end{cases}$$

and we have

$$z = T_k^{-1}(t) = \frac{D_k t[n + m]}{t_{n+m+1}},$$

where

$$t[n + m] = (D_k^{-1}z)t_{n+m+1} = (z_i)_{i=1}^{n+m},\ D_k = diag(z_k).$$

Thus the problem

$$\min\left\{\ f(z) = z^t(Mz+q) : Mz+q \geq 0\ \right\} \Leftrightarrow \min\left\{\ f(z) = z^t(Mz+q) : Mz = l\ \right\},$$

is transformed as follows

$$\min\left\{f(T_k^{-1}(t)) : M\frac{D_k t[n+m]}{t_{n+m+1}} = l,\ \sum_{i=1}^{n+m+1} t_i = 1,\ t[n+m] \geq 0,\ t_{n+m+1} \geq 0\right\}, \tag{3}$$

hence, it is advisable to write (3) under the equivalent form :

$$\min\left\{g(t) = t_{n+m+1} f(D_k t[n+m]) : M_k t = 0,\ t \in S_{n+m+1}\right\}. \tag{4}$$

where

$$M_k = [MD_k,\ -l],\ t = \begin{bmatrix} t[n+m] \\ t_{n+m+1} \end{bmatrix}.$$

Note that the optimal value of g is $zero$ and the center of the simplex is feasible for (4), also note that the function g is convex on the set : $\{t \in S_{n+m+1} : M_k t = 0\}$.

Applying the linearization of the function g in the neighborhood of the center of the simplex a_i, and by introduce a ball of center a considered as a neighborhood of a, we have $g(t) = g(a) + \langle \nabla g(a), t-a \rangle$, for all $t \in \left\{t \in \Re^{n+m+1} : \|t-a\|^2 \leq \beta^2\right\}$.

Then we have the following sub-problem :

$$\min\left\{\nabla g(a)^t t : M_k t = 0, e_{n+m+1}^t t = 1, \|t-a\|^2 \leq \beta^2\right\}. \tag{5}$$

Lemma 1. *The optimal solution of the problem* (5) *is explicitly given by*

$$t^k = a - \beta d^k,$$

where $d^k = \frac{P^k}{\|P^k\|},\ P^k = p_{B_k} \nabla g(a),\ B_k = \begin{bmatrix} M_k \\ e_{n+m+1}^t \end{bmatrix}$.

2.2. Description of the algorithm

In this subsection, we describe the generic algorithm for our extension of LCP

Begin algorithm

Step(1)

Initialization : $\varepsilon > 0, 0 < \beta < 1,\ z^0$: is a strictly feasible point.

Step(2)

While$(f(z^k) - f(z^*) \geq \epsilon)$ **do**

Compute the matrices :

– $D_k = diag(z^k)$,

– $M_k = [MD_k,\ -l]$,

– $B_k = \begin{bmatrix} M_k \\ e_{n+m+1}^t \end{bmatrix}$.

Compute :

– $P^k = p_{B_k} \nabla g(a) = \left[I - B_k^t (B_k B_k^t)^{-1} B_k\right] \nabla g(a)$,

– $d^k = \frac{P^k}{\|P^k\|}$,

– $t^k = a - \beta d^k$.

Take :

$z^{k+1} = T_k^{-1}(t^k)$. Let $k = k + 1$ and go back to **Step (2)**

End While

End algorithm.

3. Convergence of algorithm

To established the convergence of our algorithm, we introduce a potential function associated with problem (1), and defined by :

$$F(z) = (n + m + 1)\log(f(z) - f(z^*)) - \sum_{i=1}^{n+m} \log(z_i).$$

We have the following lemma

Lemma 2. *For each iteration we obtain a reduction of the function g i.e :*

$$g(t^k) \leq g(a).$$

Theorem 2. *In every iteration of our algorithm, potential function is reduced of a constant value such that :*

$$F(z^{k+1}) < F(z^k) - \delta.$$

Under following assumptions

Assumption 1. The initial solution z^0verifies $z^0 \geq 2^{-2L}e_{n+m+1}$.

Assumption 2. The optimal solution z^* verifies $z^* \leq 2^{2L}e_{n+m+1}$, for any solution z we have $-2^{3L} \leq f(z^*) \leq 2^{3L}$.

In the following theorem , we study the complexity analysis of our algorithm.

Theorem 3. *For each iteration, the algorithm finds the optimal solution after $O((n + m + 1)L)$ iterations.*

4. Concluding remarks

In this paper we have extended results from Karmarkar [11], to prove also that the polynomial complexity of the algorithm for solving LCP is no more than $O((n + m + 1)L)$. Our numerical results are acceptable whereas getting a starting feasible solution for our algorithm. Finally, the numerical tests is an interesting topic for investigating the behavior of the algorithm so as to be compared with other approaches.

Acknowledgements

The authors thank the referees for their careful reading and their precious comments. Their help is much appreciated.

5. Bibliographie

[1] M. Achache, A new primal-dual path-following method for convex quadratic programming, Computational and Applied Mathematics $25(1)(2006)97 - 110$.

[2] M. Achache, A weighted path-following method for the linear complementarity problem. Universitatis Babes-Bolyai, Series Informatica $49(1)(2004)61-73$.

[3] M. Achache, H. Roumili, A. Keraghel, A numerical study of an infeasible primal-dual path-following algorithm for linear programming, Applied Mathematics and Computation $(186)(2007)472-1479$.

[4] Y.Q. Bai, G. Lesaja, C. Roos, G.Q. Wang, M. El'Ghami, A class of large-update and small-update primal-dual interior point algorithms for linear optimization, Journal of Optimization Theory and Application $(138)(2008)341-359$.

[5] X. Chen, Smoothing methods for complementarity problem and their applications. a survey, Journal of the Operations Research Society of Japan $(43)(2000)2-47$.

[6] R.W. Cottle, J.S. Pang, R.E. Stone, The Linear Complementarity Problem, Academic Press, San Diego, 1992.

[7] Zs. Darvay, A new algorithm for solving self-dual linear programming problems. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Series Informatica $47(2)(2002)15-26$.

[8] J. Peng, C. Roos, Terlaky, A new sufficient large-update interior point method for linear optimization, Journal of Computational and Technologies $6(4)(2001)61-80$.

[9] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky, A New Paradigm for Primal-dual Interior-Point Methods, Princeton University Press, Princeton, NY, 2002.

[10] Y. Qian, A polynomial predictor–corrector interior point algorithm for convex quadratic programming, Acta Mathematica Scientia $26B(2)(2006)265-279$.

[11] N.K. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica $4(1984)373395$.

[12] C. Roos, T. Terlaky, J.Ph. Vial, Theory and algorithms for linear optimization, in : An Interior Approach, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1997.

[13] S.J. Wright, Primal-dual Interior-Point Methods, SIAM, Philadelphia, USA, 1997.

[14] Yinyu Ye, Interior Point Algorithms : Theory and Analysis, Wiley-Interscience, 1997.

[15] M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise, A primal-dual interior point algorithm for linear programming, in : N. Megiddo (Ed.), Progress in Mathematical Programming : Interior Point and Related Methods, Springer Verlag, New York, $1989, pp.29-47$.

[16] N. Megiddo, Pathways to the optimal set in linear programming, in : N. Megiddo (Ed.), Progress in Mathematical Programming : Interior Point and Related Methods, Springer Verlag, New York, $1989, pp.313-158$.

[17] M. Achache, Complexity analysis and numerical implementation of a short step primal-dual algorithm for linear complementarity problems, Applied Mathematics and computation $216\ (2010)\ 1889-1895$.

[18] Z. Kebbiche, A. Keraghel, A. Yassine, Extension of a projective interior point method for linearly constrained convex programming. Applied mathematics and computation $193\ (2007)\ 553-559$.

[19] B. Merikhi, Etude comparative de l'extension de l'algorithme de Karmarkar et des méthodes simpliciales pour la programmation quadratique convexe, Thèse de Magister, Institut de Mathématiques, University Ferhat Abbas, Sétif, Octobre 1994.

[20] A. Nemirovskii, K. Scheinberg, Extension of Karmarkar's algorithm onto convex quadratically constrained quadratic problems, Mathematical Programming : Series A $72(3)(1996)273-289$

[21] Y. Ye, E. Tse, An extension of Karmarkar's projective algorithm for convex quadratic programming, Mathematical Programming $44(1989)157-179$.

[22] S. Mehrotra, On the implementation of a (primal-dual) interior point method, SIAM Journal on Optimization $2(1992)575-601$.

BVP

A weak solution for a BVP with time depending operator on the Hole-line

Zahar Samira

Laboratoire des mathématiques appliquées
Université Abderrahmane Mira
Bejaia
Algérie
zahar_samira@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on va établir un résultat d'existence pour un problème au limite posé sur la droite réelle avec un opérateur de dérivation dépendant du temps. On va utiliser le théorème du point fixe de Schauder-Tichonoff pour prouver l'existence de solutions faibles.

ABSTRACT. This work is concerned with existence result of a boundary value problem posed on the hole line with a nonlinear term and time depending derivative operator. We will use Schauder-Tichonoff's fixed point theorem to prove existence of weak solutions.

MOTS-CLÉS : interval infini , nonlinéarité non positive, coefficients variables, solution faible, Molchanov.

KEYWORDS : infinity interval, sign changing nonlinearity, variable coefficient, weak solution, Molchanov.

1. Introduction

In this work we are interested in existence of solutions to the following boundary value problem :

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) + h(x,y) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Here q is a variable coeficient instead of a constant, it's continuous and $h(.,.)$ is a carathéodory function. For this purpose, we will use Schauder-Tichonoff's fixed theorem.

In one hand, we extend some results in [1] where the authors considered the problem

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u &= h(x,u), \quad -\infty < x < +\infty. \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

and prove existence of weak solutions.

In a second hand ; existence theorem 3.1 consists also one implication of the Molchanov criterion for problem (1). Note that compactness criteria of Fréchet-Kolmogorov or Corduneaneau bring us relative compactness of a set (here, it's the image $T(M)$ of a set M by a fixed point operator T) ; but Molchanov criterion gives compactness of a known fixed point operator : it's an operator associated to a Dirichlet linear problem on the hole line (see recall blow). So we can not use it but find it's analogous for a more general non linear problem by assuming some conditions on the nonlinearity.

Recall :

Consider the following linear boundary value problem :

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = f(x), \quad a.e\ x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{|x|\longrightarrow\infty} y(x) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

where $f \in L^p(\mathbb{R}), q \in \widetilde{L}^p_{loc}(\mathbb{R})$ for $p \geq 1$ and $q > q_0 > 0$ and

$$\widetilde{L}^p(\mathbb{R}) = \Big\{ L^p(\mathbb{R}) \text{ for } p \in [1;+\infty); \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ for } p = +\infty \Big\}.$$

Let G be the Green's function associated to the problem (9), and the integral operator

$$T : \widetilde{L}^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{L}^p(\mathbb{R})$$

defined by

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)f(t)dt. \tag{4}$$

We have Molchanov criterion :

Theorem 1.1. *[2] T is compact if and only if*

$$\lim_{|t|\longrightarrow+\infty} \int_{t-a}^{t+a} q(s)ds = +\infty, \quad \forall a \in]0;+\infty[. \tag{5}$$

2. Preliminaries and auxiliary Lemma

Lemma 2.1 ([3]). *There exists two solutions u, v of the equation*

$$y''(t) = q(t)y(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

such that

1. $u(t) > 0, \quad v(t) > 0, \quad u'(t) < 0, \quad v'(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} u(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} u'(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} v(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} v'(t) = 0$
3. $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v'(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} u(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} u'(t) = +\infty$
4. $v'(t)u(t) - u'(t)v(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$

$\{u, v\}$ is a fundamental system of solutions.

Lemma 2.2 ([2]). *Let*

$$\lim_{|t| \longrightarrow +\infty} \int_{t-a}^{t+a} q(s)ds = +\infty, \quad \forall a \in]0; +\infty[\tag{7}$$

Condition (7) is satisfied if and only if

$$\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} d(x) = 0,$$

where d is the positive solution of

$$2 = d(x) \int_{x-d(x)}^{x+d(x)} q(\xi)d\xi \tag{8}$$

Our arguments will be based on fixed point theory. So, let us recall Schauder-Tichonoff's fixed point theorem [6] :

Theorem 2.1. *Let K be a closed, convex subset of a locally convex, Hausdorff space E. Assume that $T\colon\ K \longrightarrow K$ is continuous, and $T(K)$ is relatively compact in E. Then T has at least one fixed point in K.*

Here, we look for solutions in the Lebesgue Space $L^p(\mathbb{R})$. We'll need a compactness criterion in $L^p(\mathbb{R})$ due to Fréchet-Kolmogorov :

Theorem 2.2 ([5], p. 275). *A set $S \subset L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$ is relatively compact if and only if S is bounded and for every $\varepsilon > 0$, we have :*

(i) $\exists\, \delta > 0$ *such that* $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx < \varepsilon, \ \forall\, u \in S, \ \forall\, 0 < h < \delta.$

(ii) $\exists N > 0$ *such that* $\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,N]} |u(x)|^p \, dx < \varepsilon, \ \forall\, u \in S.$

2.1. Green's function

The Green's function corresponding to the problem

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = f(x), \quad a.e\ x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} y(x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

is written by

$$G(x,t)=\begin{cases} u(x)v(t), & x\geq t,\\ u(t)v(x), & x\leq t.\end{cases} \tag{10}$$

where

$$v(x)=y(x)\int_{-\infty}^{x}\frac{d\xi}{y^2(\xi)},\quad \text{and}\quad u(x)=v(x)\int_{x}^{+\infty}\frac{d\xi}{v^2(\xi)}$$

satisfy the properties of lemma 2.1 and y is solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y''(x)=q(x)y(x),\ x\in\mathbb{R}\\ y(0)=1,\ y'(0)=0.\end{cases} \tag{11}$$

3. Existence of solution

The main result is the following

Theorem 3.1. *Suppose $h(x,u)=l(x)g(u)$ is a Carathéodory function with $l\in L^p(\mathbb{R}),\ 1<p<+\infty$ and g satisfies the following polynomial growth condition*

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, k,\sigma>0,\ \ |g(y)|\leq k|y|^{\sigma},\ \ \textit{for all } x\in\mathbb{R} \textit{ and } y\in\mathbb{R}.\\ L:=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{-|x-t|}|^p l^p(t)dt\right)^{\frac{\sigma}{p-1}}dx<\infty,\\ \textit{with } (\theta\neq 1) \textit{ or } (\theta=1 \textit{ and } kL^{\frac{p-1}{p\sigma}}\leq 1) \textit{ with } \theta:=\frac{(p-1)^2}{p^2\sigma}.\end{array}\right\} \tag{12}$$

Then, problem (1) admits at least one solution in $L^r(\mathbb{R})$ with $r=\frac{p\sigma}{p-1}$.

4. Bibliographie

[1] S. DJEBALI, T. MOUSSAOUI, « A class of second order BVPs on infinite intervals », *Elec. J. Qual. Th. Dif. Eq.*, n° 4, 2006.

[2] L.SHUSTER, « A priori estimates of solution of the Sturm-Liouville equation and the A.M.Molchanov criterion », *Matematicheskie Zametki*, vol. 50, n° 1, 1991.

[3] N.CHERNYAVSKAYA, L.SHUSTER, « Estimates for Green's function of the Sturm-Liouville operator », *Journal of Differential Equations*, n° 111, 1994.

[4] N.CHERNYAVSKAYA, L.SHUSTER, « Estimates for the Green function of a general Sturm-Liouville and their Application », *Proc. Amer. Math. Soc.*, n° 127, 1999.

[5] K. YOSHIDA, « Functional Analysis, third edition », *Springer Verlag, Berlin*, 1971.

[6] E. ZEIDLER, « Nonlinear Functional Analysis, T1 », *Fixed Point Theory*, 1985.

Rubrique

Estimation de la moyenne d'une distribution à queue lourde sous censure aléatoire

Soltane Louiza*, Meraghni Djamel* et Necir Abdelhakim*

*Département de Mathématiques
Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie
Biskra
Algérie
louiza_stat @yahoo.cm
djmeraghni@yahoo.com
necirabdelhakim@yahoo.fr

RÉSUMÉ. On a constaté qu'il y a des distributions à queues lourdes pour lesquelles les conditions de Stute [The central limit theorem under random censorship. Ann. Statist. 1995; 23: 422-439] ne sont pas vérifiées . Dans ce travail, on utilise la théorie des valeurs extrêmes pour proposer un nouvel estimateur approcher de la moyenne assurant la propriété de normalité asymptotique. Une étude de simulation est réalisée pour évaluer la performance de cette procédure d'estimation.

ABSTRACT. The central limit theorem introduced by Stute [The central limit theorem under random censorship. Ann. Statist. 1995; 23: 422-439] does not hold for some class of heavy-tailed distributions. In this paper, we make use of the extreme value theory to propose an alternative estimating approach of the mean ensuring the asymptotic normality property. A simulation study is carried out to evaluate the performance of this estimation procedure.

MOTS-CLÉS : Censure aléatoire, Estimateur de Hill, Estimateur de Kaplan-Meier, Valeurs extrêmes

KEYWORDS : Extreme values, Hill estimator, Kaplan-Meier estimator, Random censoring.

1. Introduction

La moyenne est un paramètre de localisation d'une distribution. Elle est très importante dans la synthèse des valeurs d'une variable aléatoire (va) X . Malheureusement, elle n'est pas suffisante pour bien décrire l'ensemble des données et pour cela on a besoin d'un paramètre supplémentaire appelé "la variance". Cette dernière mesure la dispersion autour de la moyenne. La remarque principale sur la moyenne est qu'elle peut ne pas exister, comme pour les lois α-stables de paramètre de forme $\alpha := 1/\gamma$, où γ désigne l'indice des valeurs extrêmes (IVE) :

• $0 \leq \alpha \leq 1$: moyenne et variance infinies. Par exemple, la distribution de Cauchy si $\alpha = 1$.

• $1 < \alpha < 2$: moyenne finie et variance infinie, comme les distributions à queues lourdes.

• $\alpha = 2$: moyenne et variance finies. C'est le cas de la distribution de Gauss.

Soit $(X_{1:n}, ..., X_{n:n})$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, de X de fonction de répartition (fdr) F et de moyenne (quand elle existe) $\mu = E(X) := \int_0^\infty x dF(x)$. L'estimateur naturel de μ est la moyenne empirique $\overline{X} := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Il est consistant, sans biais et, en vertu du Théorème Centrale Limite (TCL), il est asymptotiquement normal à condition que $E\left(X^2\right) < \infty$. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, Peng (2001) a proposé un estimateur asymptotiquement normal en exploitant les outils de la théorie des valeurs extrêmes. Dans les deux cas, les estimateurs sont construits à partir de la totalité des observations.

Mais, dans plusieurs domaines de la vie socio-économique, telles l'assurance, la recherche médicale et l'analyse de fiabilité, les données sont souvent censurées, de telle façon que les techniques d'estimation basées sur les données complètes deviennent inappropriées. La censure des données se fait selon plusieurs mécanismes tels la censure à droite, la censure à gauche, la censure double (ou mixte),... Dans ce travail, on s'intéresse uniquement au cas des censures à droite du type aléatoire. Celui-ci correspond à un modèle fréquemment utilisé en pratique. Dans ce type de censure, au lieu d'observer les $X_i's$, on observe les couples de va's (Z_i, δ_i), $(1 \leq i \leq n)$ définis par

$$Z_i := \min(X_i, Y_i) \quad et \quad \delta_i := \mathbf{1}\{X_i \leq Y_i\}.$$

– $X_1, ..., X_n$: copies indépendantes d'une va censurée X de fdr F.

– $Y_1, ..., Y_n$: copies indépendantes d'une va de censure Y de fdr G (indépendante de X).

– Z : variable réellement observée de fdr H, vérifiant $(1 - H) := (1 - F)(1 - G)$.

– δ_i : indicateur de censure qui détermine si X a été censurée ou non.

Lorsque la variable X est censurée à droite par une autre variable, les estimateurs cités ci-dessus ne fonctionnent pas car ils sont basés sur des échantillons complets. Pour les données censurées, Stute (1995) a introduit l'estimateur suivant et a montré que, sous certaines conditions, il est asymptotiquement normal.

$$\widetilde{\mu}_n := \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1} \prod_{j=1}^{i-1} \left[\frac{n-j}{n-j+1}\right]^{\delta_{[j:n]}} Z_{i:n},$$

où $Z_{1:n} \leq ... \leq Z_{n:n}$ sont les statistiques d'ordre associées à un échantillon $(Z_1, ..., Z_n)$ et $\delta_{[1:n]}, ..., \delta_{[n:n]}$ les concomitants correspondants satisfaisant $\delta_{[i:n]} = \delta_j$ si $Z_{i:n} = Z_j$.

On suppose que F et G sont à queues lourdes ou, en d'autres termes, que $\overline{F}$ et $\overline{G}$ sont à variations régulières à l'infini avec des indices $-1/\gamma_1$ et $-1/\gamma_2$ $(\gamma_1, \gamma_2 > 0)$ respectivement. C'est-à-dire, pour tout $x > 0$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\overline{F}(xz)}{\overline{F}(z)} = x^{-1/\gamma_1} \ et \ \lim_{z\to\infty} \frac{\overline{G}(xz)}{\overline{G}(z)} = x^{-1/\gamma_2}, \qquad [1]$$

Par conséquent H est à queue lourde, avec comme IVE $\gamma := \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$. L'équation 1 est connue comme la condition de variation régulière du premier ordre. Cependant, cette condition ne suffit pas pour étabir la normalité asymptotique des estimateurs en analyse des valeurs extrêmes. Pour cela, une condition, dite de variation régulière du second ordre et spécifiant le taux de convergence dans l'équation 1, est nécessaire. Il existe des constantes $\rho_j < 0$ et des fonctions A_j, $j = 1, 2$ tendant vers zéro, et ne changeant pas de signe au voisinage de l'infini, telles que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(tx)/\overline{F}(t) - x^{-1/\gamma_1}}{A_1(t)} = x^{-1/\gamma_1} \frac{x^{\rho_1/\gamma_1} - 1}{\gamma_1\rho_1}, \qquad [2]$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{G}(tx)/\overline{G}(t) - x^{-1/\gamma_2}}{A_2(t)} = x^{-1/\gamma_2} \frac{x^{\rho_2/\gamma_2} - 1}{\gamma_2\rho_2}. \qquad [3]$$

La classe des distributions à queues lourdes, satisfaisant la condition du second ordre, joue un rôle important dans la théorie des valeurs extrêmes. Elle cotient des distributions, telles Burr, Fréchet, Benktander, Pareto généralisé, log-logistique, log-gamma et α-stable $(0 < \alpha < 2)$, connues pour être des modèles appropriés pour la modélisation des grandes pertes en assurance, des rendements d'indices et des fluctuations des prix en finance.

2. Résultat principal

On a constaté qu'il y a des distributions à queues lourdes pour lesquelles les conditions de Stute (1995) ne sont pas vérifiées. Le but de ce travail est de proposer une méthode d'estimation de la moyenne, en présence de censure aléatoire à droite, pour ce type de distributions. On commence par décomposer la moyenne en deux parties comme suit :

$$\mu = \int_0^{Z_{n-k:n}} \overline{F}(x)dx + \int_{Z_{n-k:n}}^{\infty} \overline{F}(x)dx.$$

Ensuite, on remplace $\overline{F}(x)$ dans la première partie par l'estimateur de Kaplan et Meier (1958) de F, qui est défini pour tout $x < Z_{n:n}$ par

$$\widehat{\overline{F}}_n(x) := \prod_{Z_{j:n}\leq x} \left(\frac{n-j}{n-j+1}\right)^{\delta_{[j:n]}},$$

et dans la deuxième partie par l'estimateur de Weissman adapté de $\overline{F}$, qui est donné par

$$\widehat{\overline{F}}\,(x) := \left(\frac{x}{Z_{n-k:n}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}_1^{(H,c)}} \prod_{j=1}^{n-k} \left(\frac{n-j}{n-j+1}\right)^{\delta_{[j:n]}}.$$

où $k = k_n$ une suite d'entiers satisfaisant les conditions suivantes :

$$1 < k < n,\ \ k \to \infty \ et\ \ k/n \to 0 \ \ quand\ \ n \to \infty, \qquad [4]$$

et $\widehat{\gamma}_1^{(H,c)}$ désigne l'estimateur de Hill adapté (voir Einmahl et al., 2008) de l'indice de queue γ_1 sous censure aléatoire, qui est défini par ce rapport $\widehat{\gamma}_1^{(H,c)} := \widehat{\gamma}^H/\widehat{p}$, où $\widehat{\gamma}^H := k^{-1}\sum_{i=1}^{k} \log Z_{n-i+1:n}/Z_{n-k:n}$ l'estimateur de Hill classique (Hill, 1975) pour l'échantillon $Z_{1:n}, ..., Z_{n:n}$ et $\widehat{p} := k^{-1}\sum_{i=1}^{k} \delta_{[n-i+1:n]}$ l'estimateur du pourcentage des données observées dans la queue de droite.

Finalement, notre estimateur est :

$$\widehat{\mu} := \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n-j}{n-j+1}\right)^{\delta_{[j:n]}} Z_{i:n} + \prod_{j=1}^{n-k} \left(\frac{n-j}{n-j+1}\right)^{\delta_{[j:n]}} \frac{Z_{n-k:n}}{1-\widehat{\gamma}_1^{(H,c)}}.$$

Le résultat de normalité asymptotique de cet estimateur est donné, sous certaines conditions, dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soient F et G des fdr's satisfaisant les conditions du second ordre (2) et (3) avec $(\gamma_1, \gamma_2) \in R$ où $R := \{\gamma_1, \gamma_2 \in (0,\infty) \times (0,\infty) : \gamma_2/(1+2\gamma_2) < \gamma_1 < 1\}$. Soit $k = k_n$ une suite d'entiers satisfaisant (4) et $h = h_n := H^{-1}(1-k/n)$ tel que $\sqrt{k}A_1(h) = \lambda$, $\sqrt{k}A_2(h) = O(1)$ et $\sqrt{k}h\overline{F}(h) \to \infty$. Alors*

$$\sqrt{k}\left(\frac{\widehat{\mu}-\mu}{h\overline{F}_n(h)}\right) \to \mathcal{N}\left(m, \mathcal{V}^2\right), \ \ (en\ distribution),\ quand\ \ n \to \infty.$$

où

$$m := \lambda/(1-p\rho_1)(1-\gamma_1)^2 + \lambda/(\gamma_1+\rho_1-1)(1-\gamma_1),$$

et

$$\mathcal{V}^2 := \frac{2p\gamma_1\left(\gamma_1 - p^2\gamma_1^2 + p^2 + 2p\gamma_1^2 - 3p\gamma_1\right)}{(\gamma_1-1)^2(1-2p+2p\gamma_1)(1-p+p\gamma_1)} - \frac{4\gamma_1^2}{(1-\gamma_1)^3(1-2p+2p\gamma_1)} + \frac{2(1+2p)\gamma_1^2}{p(1-\gamma_1)^4}.$$

3. Etude de simulation

Pour évaluer la performance de l'estimateur $\widehat{\mu}$, on réalise une étude de simulation basée sur 1000 échantillons d'une va de Burr de paramètre γ_1 censurée par une autre va de Burr de paramètre $\gamma_2 = p\gamma_1/(1-p)$, où p représente la proportion de données observées dans la queue de droite. Les résultats numériques finaux sont obtenus en faisant les moyennes sur les 1000 réplications. On commence par déterminer le nombre optimal d'observations extrêmes utilisées dans le calcul de $\widehat{\gamma}_1^{(H,c)}$. Pour cela, on applique l'algorithme de Reiss and Thomas (2007). Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant pour le choix de $\gamma_1 = 0.3$ avec différentes valeurs de p. On remarque que l'estimation de $\widehat{\mu}$ est meilleure pour une grande valeur de p.

$\gamma_1 = 0.3 \to \mu = 1.298$						
$p = 0.40$						
n	$\widehat{\mu}$	abs bias	mse	bor. de conf.	prob.couv.	long.
500	1.247	0.052	0.021	$1.043 - 1.450$	0.88	0.407
1000	1.244	0.054	0.020	$1.099 - 1.389$	0.88	0.291
1500	1.233	0.065	0.005	$1.119 - 1.346$	0.80	0.227
2000	1.231	0.067	0.005	$1.135 - 1.328$	0.74	0.193
$p = 0.70$						
500	1.265	0.033	0.003	$1.069 - 1.460$	0.97	0.391
1000	1.269	0.029	0.002	$1.123 - 1.415$	0.96	0.291
1500	1.279	0.019	0.001	$1.162 - 1.395$	0.98	0.233
2000	1.278	0.020	0.001	$1.178 - 1.377$	0.96	0.199

Tableau 1 – Résultats de simulation de l'estimation du μ d'une va de Burr censurée par une autre va de Burr basé sur 1000 échantillons.

4. Bibliographie

[1] J. H. EINMAHL, A. FILS-VILLETARD, A. GUILLOU, « Statistics of extremes under random censoring », *Bernoulli*, vol. 14, n° 1, pp. 207-227, 2008.

[2] B. M. HILL ,« A simple general approach to inference about the tail of a distribution », *The Annals of Statistics*, vol. 03, n° 5, pp. 1163-1174, 1975.

[3] E.L. KAPLAN, P. MEIER, « Non-parametric estimation from incomplete observations. », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 53, pp. 457-481, 1958.

[4] L. PENG, « Estimating the mean of a heavy-tailed distribution. », *Statistic and Probability Letters*, vol. 52, pp. 255-264, 2001.

[5] R.D. REISS, M. THOMAS, « Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields », *Birkhäuser, Basel*, 1958.

[6] W. STUTE, « The central limit theorem under random censorship. », *Annals of Statistics*, vol. 23n° 2, pp. 422-439, 1995.

[7] I. WEISSMAN, « Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 73, pp. 422-439, 1978.

Rubrique

Coupling Parareal with FETI Method

Saloua AOUADI [1], Rim GUETAT [2]

[1,2] *Faculty of Sciences of Tunis, University of Tunis El Manar*
2060 Tunis, Tunisia
saloua.mani@fst.rnu.tn, rymguetat@yahoo.fr

ABSTRACT. In this paper, we present a new parallel algorithm based on coupling parareal with non-overlapping domain decomposition methods which increase parallelism in time and in space. For this we focus on the iterative methods of parallization in space to solve the interface problem like Schur complement and Finite Element Tearing and Interconnect method (FETI). In the new algorithm, the Schur Complement is chosen as a fine propagator and FETI method is used as coarse propagator with a few iterations. Numerical experiments illustrate that the coupled of these two approaches leads to an robust algorithm with the fast convergence and the scalability of this new method.

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous présentons un nouvel algorithme parallèle basé sur le couplage du pararéel avec les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement afin d'augmenter le parallélisme dans le temps et l'espace. Nous nous concentrons sur les méthodes itératives de parallélisation en espace pour résoudre le problème d'interface par les méthodes de complément de Schur et de FETI. Dans ce nouvel algorithme, le complément de Schur est choisi pour le propagateur fin et la méthode de FETI est utilisée pour le propagateur grossier avec quelques itérations. Des expériences numériques illustrent que le couplage de ces deux approches mène à un algorithme robuste qui assure une convergence rapide et la scalabilité de cette nouvelle méthode.

KEYWORDS : Parallel Algorithm, Parareal algorithm, Non-overlapping domain decomposition method, Schur complement, FETI method.

MOTS-CLÉS : Algorithme parallèle, Algorithme du pararéel, Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, Complément de Schur, Méthode de FETI.

1. Introduction

In this paper we will focus on domain decomposition methods applied to Finite Element Method (FEM). Though non-overlapping domain decomposition methods are powerful technique for solving elliptic partial differential equations (PDEs). These methods consist of splitting the global domain into serval non overlapping subdomains and using a parallel solver to solve the local problems. This procedure leads to iterative methods to find interface unknowns connecting domains together, namely the interface displacements in the Schur complement methods. The performance of the method depends on the choice of efficient preconditioner for the interface operators. In this context two methods arose in 91's such as the Neumann-Neumann method and Finite Element Tearing and Interconnect (FETI) [4]. In the present paper, the method of non-overlapping domain decomposition used is FETI method where is usually referred to as a dual approach. Non-overlapping domain decomposition method can be extended to time dependent problems. The classical approach consists in discretizing in time with an implicit scheme and applying a domain decomposition method for the steady problems obtained at each time step. The numerical temporal evolution schemes are sequential in nature and can be costly on a parallel computer. To reduce the computational cost over the whole time interval, The recent research in increasing parallelism in temporal direction, for this purpose we adopt the parareal algorithm introduced for the first time by Lions and al [1] which need to be solved in real-time. The parareal algorithm can be interpreted as different approaches, such as mutltigrid-in-time algorithm or predictor-corrector method [3]. To be valuable to solve stiff models in real-time simulations, parareal use different models for the coarse and the fine solvers. For problems with a larger size, or larger complexity, the parareal method suffers from the size of the spatial subproblem to solve, in this case we propose to combine the parareal algorithm with the domain decomposition method in order to reduce the complexity and performs the parallelism both in space and in time subdomains. We develop in this paper a new parallel algorithm for advection-dominated diffusion problem by coupling the parareal algorithm and the non-overlapping domain decomposition like Schur complement and FETI method. In this new algorithm, the Schur complement method is chosen as the fine propagator on each sub-interval with only a few iterations; for the coarse propagater we use a parallel preconditioner such as FETI method, where the interface problem is solved by Krylov solvers like Conjucate Gradient (CG) for symmetric positive definite matrix. The remainder of the paper proceeds as follows. The model problem is presented in Section 2. In Section 3, we present the FETI method. Section 4 describes the parareal algorithm. We propose our new coupled-algorithm in Section 5. Some experimental results are reported in Section 6. Our conclusion is given finally in Section 7.

2. Model problem

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^2$, with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$. Our model problem is the advection-dominated diffusion problem defined by

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \alpha.\nabla u = f \ \ in \ \ \Omega\times]0,T], \\ u(\mathbf{x}, t=0) = u_0 \ \ in \ \ \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 \ \ on \ \ \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{1}$$

where α is the advection velocity and f is the second term . If $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, the unique weak solution u is in $L^2(0,\tau;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,\tau;L^2(\Omega))$.
Once equation (1) discretized in time by an implicit scheme of first order, with a uniform time step equal to ΔT, the model problem reduces at every time step $T_{n+1} = (n+1)\Delta T$ to the solution of $A\mathbf{u}_{n+1} := (I + \Delta T K)\mathbf{u}_{n+1} = b_{n+1}$ where $\mathbf{u}_n(x)$ is the vector of nodal values of the approximation of the solution $u(x, T_n)$, I is a identity matrix, K is a symmetric positive definite matrix arising from the discretization of the advection-dominated diffusion problem and b_{n+1} the vector of nodal values of the right hand side depending on $\mathbf{u}_n(x)$. At a fixed time level T_{n+1}, we have to solve the problem (2) depending on the time step parameter by applying domain decomposition methods.

3. The FETI method

We decompose the computational domain Ω into finitely many non-overlapping subdomains $\Omega_i, i = 1 \dots N_s$ and denote the subdomain boundaries by $\partial\Omega_i$. The local interfaces are defined by $\Gamma_{ij} = (\partial\Omega_i \cap \Omega_j) \setminus \partial\Omega$. Furthermore we define the global interface of this decomposition $\Gamma = \bigcup_{i \neq j} \Gamma_{ij}$. The interface continuity condition can be written as $\sum_{i=1}^{N_i} B_i \mathbf{u}_{n+1}^i = 0$ where B_i is a signed boolean matrix defined by $B_i \mathbf{u}_{n+1}^i = \pm \mathbf{u}_{n+1,\Gamma}^i$. We introduce the Lagrange multipliers λ_{n+1} that connect subdomains, the system $A\mathbf{u}_{n+1} = b_{n+1}$ can now be rewritten as the saddle point system

$$\begin{bmatrix} A_{II}^i & A_{I\Gamma}^i & 0 \\ A_{I\Gamma}^{i^T} & A_{\Gamma\Gamma}^i & B_i^T \\ 0 & B_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1,I}^i \\ \mathbf{u}_{n+1,\Gamma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1,I}^i \\ b_{n+1,\Gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2]$$

Eliminating the unknowns corresponding to the subdomain interior i.e. $\mathbf{u}_{n+1,I}^i$ and in (3) we arrive at

$$\begin{cases} S_i \mathbf{u}_{n+1,\Gamma} + B_i^T \lambda & = b_{n+1,\Gamma} \\ B_i \mathbf{u}_{n+1,\Gamma} & = 0, \end{cases} \quad [3]$$

where S_i is the local primal Schur complement $S_i := A_{\Gamma\Gamma}^i - A_{I\Gamma}^{i^T} A_{II}^{i^{-1}} A_{I\Gamma}^i$. Further eliminating the primal variables $\mathbf{u}_{n+1}^i$, we obtain the following one-level FETI problem $F\lambda_{n+1} = d$ where $F := B_i S_i^{-1} B_i^T$ and $d := -B_i S^{-1} b_\Gamma$. The parallel Dirichlet preconditioner is then as follows $M^{-1} := \sum_{i=1}^{N} D_i B_i S_i B_i^T D_i$, with D_i is a scaling diagonal subdomain matrix. The FETI algorithms are preconditioned conjugate gradient methods PCG for solving the preconditioned linear system $M^{-1} F \lambda_{n+1} = M^{-1} d$.

4. The parareal in time algorithm

The exact flow of the problem is denoted $u(t) = \mathcal{E}_t(u_0)$. The strategy of parareal algorithm is to do a time decomposition in the spirit of domain decomposition. We divide the total simulation time into N subintervals $[T_n, T_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N-1$ of size ΔT. Then $u(T_n) = \mathcal{E}_{\Delta T}(u(T_n)) = \mathcal{E}_{n\Delta T}(u_0)$, from the semigroup property of $\mathcal{E}$. In general

$\mathcal{E}$ is not realizable and can only be approximated, we thus introduce a fine and precise propagator $\mathcal{F}$, it is based on an appropriate classical discretization scheme based on a small enough time step δt, then we have the approximation $u(T_n) \simeq U_n = \mathcal{F}_{n\Delta T}(u_0)$. The original parareal algorithm makes it possible to define iteratively a sequence U_n^k that converges toward U_n as k goes to infinity. The definition of this sequence requires a coarse propagator $\mathcal{G}$, which represents a cheap and less accurate approximation to $\mathcal{F}_{\Delta T}$ and based on a similar scheme in time with the larger time step ΔT, $\delta t \ll \Delta T$. By nature $\mathcal{G}$ has to be run sequentially and $\mathcal{F}$ in parallel. In this way, the algorithm starts with an initial approximation U_n^0 given for example by the sequential computation :

$$U_0^0 = u_0, \qquad U_n^0 = \mathcal{G}_{\Delta T}(U_{n-1}^0),$$

the numerical scheme of the parareal method is given by :

$$U_n^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta T}(U_{n-1}^{k+1}) + \mathcal{F}_{\Delta T}(U_{n-1}^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(U_{n-1}^k),$$

with the initial condition $U_0^k = u_0$. Note that after k iterations of the parareal method, the solution U_m^k for $m \leq k$ is exactly equal to the numerical solution given by using the $\mathcal{F}$ propagator in a serial manner.

5. Parareal-Non-Overlapping Domain Decomposition Methods

The parareal-domain decomposition algorithm does this by using a parareal approximation for the initial condition and a domain decomposition algorithms for the boundary conditions. We use the FETI and Schur complement algorithms for the approximate resolution of the coarse and fine propagators independently over each block $\Omega_i \times [T_{n-1}, T_n]$, $i = 1, \ldots N_s, n = 0, \ldots, N$. The coupled parareal is based on the dual iterative definition of the snapshots U_n^k at each time T_n and on the interface conditions $u_{n-1,\Gamma}^{k,0}$ and the Lagrange multipliers $\lambda_{n-1}^{k,0}$ over $[T_{n-1}, T_n]$. The algorithm is thus expressed as follows

$$U_n^0 = \widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U_{n-1}^0, \lambda_{n-1}^{0,0}),$$

$$U_n^{k+1} = \widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U_{n-1}^{k+1}, \lambda_{n-1}^{k+1,0}) + \widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(U_{n-1}^k, u_{n-1,\Gamma}^{k,0}) - \widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U_{n-1}^k, \lambda_{n-1}^{k,0}),$$

where $\widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U_{n-1}^{k+1}, \lambda_{n-1}^{k,0})$ and $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(U_{n-1}^k, u_{n-1,\Gamma}^{k,0})$ are the approximate propagators with only some Q and P domain decomposition iterations.
More precisely we construct $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}$ and $\widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}$ as following. We denote by $u_{i,n-1}^{k,P}(x,t)$ and $v_{i,n-1}^{k,Q}(x,t)$ the local solutions on the space-time slices $\Omega_i \times [T_{n-1}, T_n]$ at iteration k then we define the global fine solution by $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(U_{n-1}^k, u_{n-1,\Gamma}^{k+1,0}) = \sum_{i=1}^{N_s} \chi^i(x) u_{i,n-1}^{k,p}(x, T_n)$ and the global coarse propagator by $\widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U_{n-1}^k, \lambda_{n-1}^{k,0}) = \sum_{i=1}^{N_s} \chi^i(x) v_{i,n-1}^{k,q}(x, T_n)$ where χ^i are a regular partition of unity defined by $\forall x \in \Omega$, $\sum_{i=1}^{N_s} \chi^i(x) = 1, \chi^i \geq 0, i = 1, \ldots, N_s$.
To accelerate convergence, we initialized the interface conditions and Lagrange multipliers by the previous iterate parareal after a few iterations of domain decomposition

methods$u^{k,0}_{n-1,\Gamma} = u^{k-1,P}_{n-1,\Gamma}$ similarly $\lambda^{k,0}_{n-1} = \lambda^{k-1,Q}_{n-1}$ where the boundary conditions at the interface are compatible with the initial condition provided at time T_{n-1} for each local problem. At last, we denote by $u^{k-1,\infty}_{n-1,\Gamma}$ and $\lambda^{k-1,\infty}_{n-1}$ the exact interface conditions associated with the initial condition U^{k-1}_{n-1} which then verify $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(U^k_{n-1}, u^{k,\infty}_{n-1,\Gamma}) = \mathcal{F}_{\Delta T}(U^k_{n-1})$ and $\widetilde{\mathcal{G}}_{\Delta T}(U^k_{n-1}, \lambda^{k,\infty}_{n-1}) = \mathcal{G}_{\Delta T}(U^k_{n-1})$.

6. Numerical Results

We consider the model problem (1) on the unit square in two dimensions with the initial condition $u_0(x) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, advection velocity $\alpha = (y, -x)$ and $f(t) = 1+t$. The prototype implementation was done in FreeFem++, we discretize in space using finite elements P^1-Lagrange on a uniform mesh with meshsize h. The time discretization is a characteristics method of order 1 for the advection and implicit for the diffusion operator. We choose the coarse time step $\Delta T = \frac{1}{10}$ and the fine time step $\delta t = \frac{\Delta T}{50}$. We decompose the domain into N_s non-overlapping subdomains with cross-points, namely interface nodes that belong to more than two domains. We employ a CG algorithm for determining the values of interface conditions for domain decomposition algorithms. We investigate the numerical scalability of the parallel in space and time methods with respect to the mesh size h, the number of subdomains N_s, and the coarse time step ΔT. For the convergence of the new iterative solver, we compare the relative error $\frac{\|U_{exact}(T_n) - \mathcal{F}_{n\Delta T}(u_0)\|_{H^1(\Omega)}}{\|U_{exact}(T_n)\|_{H^1(\Omega)}}$ with $\frac{\|U_{exact}(T_n) - U^k_n\|_{H^1(\Omega)}}{\|U_{exact}(T_n)\|_{H^1(\Omega)}}$ where U_{exact} is supposed the exact solution (reference solution) computed in the global domain with a very fine time step $\delta t/10$.

First, we fix $N_s = 16$ subdomains and vary h. The performance results obtained for non-overlapping decomposition methods are given in Table 1, we deduce that FETI and Schur Complement are much less sensitive with respect the mesh size. Next we fix

Table 1. *Number of FETI, Schur Complement and Parareal iterations with varying discretization size*

h	FETI (coarse propagator) **# iterations**	Schur Complement (fine propagator) **# iterations**	Parareal **# iterations**
$1/20$	3	2	5
$1/40$	3	3	5
$1/80$	3	3	5
$1/160$	2	3	5

$h = 1/160$ and vary the number of space decompositions subdomains N_s. From table 3, it is observed that the convergence of are FETI and Schur Complement weakly impacted by the increase of the number of subdomains. Finally, for $N_s = 16$ and $h = 1/80$, we make the number CG constant (3 iterations per subdomain) next we fix the fine time step $\delta t = \frac{1}{6000}$ and vary ΔT. The log_{10} scale error between and the reference one is -3.38. From table 2, it is observed that when increasing the number of time decompositions subdomains parareal is barely affected.

Table 2. *Number of FETI, Schur Complement and Parareal iterations for various number of domains*

N_s	FETI **# iterations**	Schur Complement **# iterations**	Parareal **# iterations**
4	2	2	5
8	3	3	5
16	3	3	4
32	3	3	4

Table 3. *Historic of the errors using a norm $L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega))$ in log_{10} scale between parareal-domain decomposition solutions and the reference one, for different values of k*

k	ΔT	$\Delta T/2$	$\Delta T/4$	$\Delta T/8$
1	-1.16	-1.57	-2.05	-2.1
2	-1.82	-2.26	-2.74	-2.85
3	-2.55	-3.03	-3.37	-3.37
4	-3.25	-3.31	-3.37	-3.37
5	-3.37	-3.38	-3.37	-3.37

7. Conclusion

We presented a new algorithm for advection-dominated diffusion problem by combining the parareal algorithm and two domains decomposition algorithms Schur complement and FETI in order to perform the parallelism both in time and space. The numerical results indicate that the method is scalable with respect to mesh size, number of space subdomains and coarse time step.

8. References

Lions J.-L.,Maday Y. and Turinici G., *Résolution d'EDP par un schéma en temps pararéel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), No. 7, 661–668.

Gander, M. J. & Vandewalle S. *Analysis of the parareal time-parallel time-integration method,* SIAM J. Sci. Comput., 29,(2007), 556-578.

Bal G. and Maday Y., *A parareal time discretization for non-linear PDEs with application to the pricing of an American put,* volume 23 of Lect. notes Comput. Sci. Eng., pages 189–202, 2002, Springer.

Charbel Farhat and Francois-Xavier Roux, *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(6), 1991 :1205.

Homogenization via unfolding in three phase composites

Ahmed Boughammoura, Yosra Braham

Department of Mathematics, Higher Institute of Informatic and Mathematics of Monastir, Tunisia
ahmed.boughammoura@gmail.com
Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Monastir, Tunisia
brahamyosraa@gmail.com

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous étudions un problème de diffusion de chaleur dans un composite périodique à trois phases: matrice, fibres et interphase. Les conductivités thermiques du milieu varient périodiquement avec une période de taille ε^β $(0 < \varepsilon, \beta)$ dans les directions transversales des fibres. De plus, on suppose que la conductivité de l'interphase et le contraste de l'anisotropie du matériau dans les fibres sont de même ordre $O(\varepsilon^2)$ (grandeur de type double porosité) et que la conductivité de la matrice est d'ordre $O(1)$. Pour homogénéiser ce modèle, nous introduisons le concept d'opérateur d'éclatement partiel pour les domaines anisotropes. En particulier, nous montrons que les effets des propriétés de l'interphase sur les modèles homogénéisés sont détectés seulement lorsque $0 < \beta \leq 1$.

ABSTRACT. In this work we consider a heat transfer equation in a periodic composite having three phases: matrix, fibers and interphase. The heat conductivities of the medium vary periodically with a period of size ε^β $(0 < \varepsilon, \beta)$ in the transverse directions of the fibers. In addition, we assume that the conductivity of the interphase material and the anisotropy contrast of the material in the fibers are of the same order $O(\varepsilon^2)$ (the so-called the double-porosity type scaling) and the conductivity of the matrix is of order $O(1)$. To homogenize this problem, we introduce the concept of partial unfolding for anisotropic domains. In particular, we prove that the effects of the interphase properties on the homogenized models are detected only when $0 < \beta \leq 1$.

MOTS-CLÉS : Homogénéisation, opérateur d'éclatement, modèle double porosité, interphase.

KEYWORDS : Homogenization, unfolding operator; double-porosity model, interphase.

1. Introduction

Within the realm of physics, it is well known that the effective mechanical and thermal properties of a combination of fibers, which have highly-anisotropic characteristics, with matrix materials of a completely different nature is strongly influenced by the presence of an inevitable interphase between these two phases (see [8] and [10]). As a consequence, the fiber-matrix interphase has a crucial impact on the behavior and properties of the fiber reinforced composite.

In this work, using the unfolding method, we study the homogenization of a heat transfer problem in a fiber-reinforced composites. More precisely, we consider an elliptic problem in medium consisting of three conducting materials : fiber, interphase and matrix. We assume that the conductivity of the interphase material and the anisotropy contrast in the fiber are of the same order ε^2 (the so-called the double-porosity type scaling) while the matrix material having a conductivity of order 1. The concept of partial unfolding operator for anisotropic domains that we shall introduce allow us to analyze directly a highly anisotropic fiber-reinforced composites where the physical properties are only relevant in the transversal directions and vary periodically with a period cell of size $\varepsilon^\beta, \beta > 0$ in the cross section.

We introduce the concept of partial unfolding operator

2. Statement of the problem

Let $\tilde{\Omega}$ be a bounded open set in $\mathbb{R}^2$ with Lipschitz boundary. We consider the following cylindrical domain

$$\Omega = \tilde{\Omega} \times I, \text{ where } I =]0, 1[.$$

To introduce the reference periodic medium we denote by Y and $\tilde{Y}$ the unit cube in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^2$ respectively. (i.e. $\tilde{Y} :=]0, 1[^2$ and $Y := \tilde{Y} \times I$.) We assume that $\tilde{Y}$ is partitioned as

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_{13} \cup \tilde{Y}_3 \cup \tilde{Y}_{23} \cup \tilde{Y}_2,$$

where $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$, $\tilde{Y}_3$ are three connected open subsets such that $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2 = \emptyset$, $\partial\tilde{Y} \cap \tilde{Y}_3 = \emptyset$ and where $\tilde{Y}_{\alpha 3}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ is the interface between $\tilde{Y}_\alpha$ and $\tilde{Y}_3$.

Now, for $i = 1, 2, 3$, we shall denote a_i the conductivity of the material in Ω_i and assume that

– $a_i \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$,

– a_i is $\tilde{Y}$-periodic with respect to $\tilde{y}$,

– $a_0 \leq a_i(\tilde{y})$ a.e $\tilde{y}$ with $a_0 > 0$, independent of $\tilde{y}$.

In what follows, $x = (\tilde{x}, x_3)$ and $\tilde{y}$ denote points of $\mathbb{R}^3$ and $\tilde{Y}$ respectively, where $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$ are the transverse vectors.

We set

$$a_i^\varepsilon(x) = a_i(\tfrac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}),$$

for every $x \in \Omega_i^\varepsilon$ and $i \in \{1, 2, 3\}$. Hence, the global conductivity of the material in Ω is given by :

$$A^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{3} \chi_i^\varepsilon(x) A_i^\varepsilon(x),$$

where

$$\chi_i^\varepsilon := \chi_i(\tfrac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}), A_1^\varepsilon(x) := a_1^\varepsilon(x)\begin{pmatrix}\varepsilon^2 I_2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A_2^\varepsilon(x) := a_2^\varepsilon(x) I_3, A_3^\varepsilon(x) := \varepsilon^2 a_3^\varepsilon(x) I_3,$$

I_2, I_3 denotes the identity matrices in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ respectively.

Our purpose is to study the homogenization of the following elliptic problem :

$$(P^\varepsilon)\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) = f^\varepsilon, & x \in \Omega,\\ \frac{\partial}{\partial x_3} u^\varepsilon(\tilde{x},1) = 0, & \tilde{x} \in \tilde{\Omega},\\ u^\varepsilon(\tilde{x},x_3) = 0, & (\tilde{x},x_3) \in \partial\tilde{\Omega}\times[0,1[, \end{cases}$$

where $f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. For any $\varepsilon > 0$ the problem (P^ε) has a unique solution u^ε in $H^1_{LB}(\Omega) := \Big\{u \in H^1(\Omega),\ \ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\tilde{\Omega}\times[0,1[\Big\}$, as a consequence of the Lax-Milgram Theorem.

3. The partial unfolding operator $\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}$

The coordinates of any vector x in Ω can be split into a "fast" part $x = (\tilde{x}, x_3)$ and a "slow" part $\tilde{y} := \frac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}$. Based on this ε^β-periodicity assumption, for each $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ one has the following unique decomposition

$$\tilde{x} = \varepsilon^\beta\Big(\Big[\tfrac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}\Big]_{\tilde{Y}} + \Big\{\tfrac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}\Big\}_{\tilde{Y}}\Big).$$

where for any $\xi \in \mathbb{R}^2$, we denote by $[\xi]_{\tilde{Y}}$ the unique integer combination such that $\xi - [\xi]_{\tilde{Y}}$ belongs to $\tilde{Y}$. The following notations are also used :

$$\begin{cases} \Xi_\varepsilon = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^2, Y_\xi{}^\varepsilon = \varepsilon^\beta(\xi + \tilde{Y}) \times I \subset \Omega\Big\},\\ \widehat{\Omega_\varepsilon} = \mathrm{interior}\Big\{\underset{\xi\in\Xi_\varepsilon}{\cup} \varepsilon^\beta(\xi + \overline{\tilde{Y}}) \times I\Big\},\\ \Lambda_\varepsilon = \Omega\backslash\widehat{\Omega_\varepsilon}. \end{cases} \tag{1}$$

The set Ω_ε is the largest union of $\varepsilon^\beta(\xi + \overline{\tilde{Y}})$ cells included in Ω, while Λ_ε is the subset of Ω containing the parts from $\varepsilon^\beta(\xi + \overline{\tilde{Y}})$ cells intersecting the boundary $\partial\Omega$. To define the partial unfolding operator with respect to the transverse vector $\tilde{x}$, we introduce the following two-scale mapping $t_\varepsilon : \Omega \times \tilde{Y} \to \Omega$

$$t_\varepsilon(x,\tilde{y}) = \begin{cases} \Big(\varepsilon^\beta\Big[\tfrac{\tilde{x}}{\varepsilon^\beta}\Big]_{\tilde{Y}} + \varepsilon^\beta\tilde{y}, x_3\Big) & for \quad (x,\tilde{y}) \in \widehat{\Omega_\varepsilon}\times\tilde{Y},\\ x & for \quad (x,\tilde{y}) \in \Lambda_\varepsilon\times\tilde{Y}. \end{cases}$$

Now, we shall define the partial unfolding operator in the $\tilde{x}$-directions and of power β, which will be denoted $\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}$, that maps measurable functions defined in Ω_i^ε into measurable functions in $\Omega \times \tilde{Y}_i$, i=1,2,3.

Definition 3.1. *Let $\varepsilon, \beta > 0$. For any function ϕ Lebesgue-measurable on Ω, the partial unfolding operator $\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}$ is defined by*

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(\phi)(x,\tilde{y}) = \phi\Big(t_\varepsilon(x,\tilde{y})\Big) \quad for \quad (x,\tilde{y}) \in \Omega\times\tilde{Y}. \tag{2}$$

3.1. Partial unfolding of gradients

For any $w \in H^1(\Omega)$ we have

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(\nabla w)(x,\tilde{y}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^\beta}\nabla_{\tilde{y}}\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(w) \\ \partial_{x_3}\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(w) \end{pmatrix}, & (x,\tilde{y}) \in \widehat{\Omega_\varepsilon} \times \tilde{Y}, \\ \nabla w, & (x,\tilde{y}) \in \Lambda_\varepsilon \times \tilde{Y}. \end{cases} \tag{3}$$

In particular, one has obviously the following commutative property between $\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}$ and ∂_{x_3}, namely

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta} \circ \partial_{x_3} = \partial_{x_3} \circ \mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}. \tag{4}$$

Next, we shall mention some useful convergence results.

Theorem 3.2.

Let $\{w_\varepsilon\}$ be a sequence in $H^1(\Omega)$ which converges weakly to w. Then, there exists a subsequence still denoted $\{w_\varepsilon\}$ and there exists $\widehat{w}$ in $L^2\left(\Omega, H^1_{per}(\tilde{Y}) \cap H^1_b(I)\right)$ such that

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(\nabla w_\varepsilon) \rightharpoonup \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{x}} w + \nabla_{\tilde{y}}\widehat{w} \\ \partial_{x_3} w \end{pmatrix} \text{ in } L^2(\Omega; H^1_{per}(\tilde{Y}))^3,$$

where $H^1_b(I) := \left\{u \in H^1(I) :\ u(0) = 0\right\}$ and $H^1_{per}(\tilde{Y})$ is the closure, with respect to the H^1-norm, of the space $\mathcal{C}^\infty_{per}(\tilde{Y})$ of infinitely differentiable $\tilde{Y}$-periodic functions.

Corollary 3.3.

Let $\{w_\varepsilon\}$ be a sequence in $H^1(\Omega)$ such that $\{w_\varepsilon\}$ is a bounded sequence in $L^2(\Omega)$. In addition, we assume that

$$\varepsilon \parallel \nabla_{\tilde{x}} w_\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C,\ \parallel \partial_{x_3} w_\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Then, there exists a subsequence $\{w_\varepsilon\}$ (still denoted w_ε) and $w \in L^2\left(\Omega, H^1_{per}(\tilde{Y}) \cap H^1_b(I)\right)$ such that

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(w_\varepsilon) \rightharpoonup w(x,\tilde{y}) \text{ in } L^2(\Omega; H^1_{per}(\tilde{Y})),$$

$$\mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(\partial_{x_3} w_\varepsilon) \rightharpoonup \partial_{x_3} w(x,\tilde{y}) \text{ in } L^2(\Omega \times \tilde{Y}).$$

Moreover

$$\varepsilon^\beta \mathcal{T}_{\tilde{x},\varepsilon^\beta}(\nabla_{\tilde{x}} w_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_{\tilde{y}} w(x,\tilde{y}) \text{ in } L^2(\Omega \times \tilde{Y})$$

if $\beta \geq 1$.

4. Main Results

The asymptotic behavior of the solution u^ε is characterized by a critical power of the scale ε^β, namely $\beta = 1$. In order to describe the main results of the present work it is convenient to split them up into three different scales :

– subcritical scale : $\beta < 1$,

– critical scale : $\beta = 1$,

– supercritical scale : $\beta > 1$.

First, let us introduce the following functions $s_2 = \left(s_2^1, s_2^2, s_2^3\right) \in \left(H^1_{per}(\tilde{Y})\right)^3$, solutions of the so-called cellular problems :

$$\begin{cases} -div_{\tilde{y}}[a_2(\tilde{y})[\nabla_{\tilde{y}} s_2^k(\tilde{y}) + e_k]] = 0 \; in \; \tilde{Y}_2 \\ \\ a_2(\tilde{y})[\nabla_{\tilde{y}} s_2^k(\tilde{y}) + e_k].n_2(\tilde{y}) = 0 \; on \; \tilde{Y}_{23}, \\ \\ a_2(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}} s_2^k.n_2(\tilde{y})_{|}\partial Y_2 \tilde{\cap} \bar{\tilde{Y}} \; \tilde{Y}_2 - periodic. \end{cases}$$

Now, we define the following homogenized matrix

$$A_{kj}^{2,hom} = \int_{\tilde{Y}_2} a_2(\tilde{y})[e_k + \nabla_{\tilde{y}} s_2^k(\tilde{y})][e_j + \nabla_{\tilde{y}} s_2^j(\tilde{y})]d\tilde{y}, \; k,j = 1,2,3.$$

1. Subcritical scale : $\beta < 1$

Theorem 4.1. *Let u_ε be the solution to (P^ε). Then, there exits $(u_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in H = (H^1_{LB}(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_{per}(\tilde{Y}_1) \times L^2(\Omega, H^1(\tilde{Y})_{|\mathbb{R}}))$ unique solution of the two-scale homogenized problem :*

$$\begin{cases} -div_x\Big(A^{2,hom}\nabla u_2(x)\Big) - \partial^2_{x_3}\displaystyle\int_{\tilde{Y}_1} a_1(\tilde{y})\tilde{v_1}(x,\tilde{y})d\tilde{y} = \Big(1 - |\tilde{Y}_3|\Big) f(x) \text{ in } \Omega, \\ \\ \tilde{v}_2(x,\tilde{y}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} u_2(x) s_2^k(\tilde{y}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1(\tilde{y})\partial^2_{x_3}\tilde{v_1}(x,\tilde{y}) = f(x) \; in \; \tilde{Y}_1, \\ \partial_{x_3}\tilde{v_1}((\tilde{x},1),\tilde{y}) = 0 \; on \; \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

2. Critical scale : $\beta = 1$

Theorem 4.2. *Let u_ε be the solution to (P^ε). Then, there exits $(u_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, w_3) \in H = (H^1_{LB}(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_{per}(\tilde{Y}_1)_{|\mathbb{R}})) \times L^2(\Omega, H^1(\tilde{Y})_{|\mathbb{R}}) \times L^2(\Omega, H^1(\tilde{Y}_3)_{|\mathbb{R}})$ unique solution of the two-scale homogenized problem :*

$$\begin{cases} -div_x\Big(A^{2,hom}\nabla u_2(x)\Big) + \frac{|\tilde{Y}_2|}{|\tilde{Y}_3|}\displaystyle\int_{\tilde{Y}_{23}} a_3(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}} w_3(x,\tilde{y})n_3(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = |\tilde{Y}_2| f(x) \text{ in } \Omega, \\ \\ \tilde{v}_2(x,\tilde{y}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} u_2(x) s_2^k(\tilde{y}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -div_{\tilde{y}}\Big[a_1(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}}\tilde{v_1}(x,\tilde{y})\Big] - a_1(\tilde{y})\partial^2_{x_3}\tilde{v_1}(x,\tilde{y}) = f(x) \; in \; \tilde{Y}_1, \\ \\ a_1(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}}\tilde{v_1}(x,\tilde{y})n_1(\tilde{y}) = a_3(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}} w_3(x,\tilde{y})n_1(\tilde{y}) \; on \; \tilde{Y}_{13}, \\ \\ \partial_{x_3}\tilde{v_1}((\tilde{x},1),\tilde{y}) = 0 \; on \; \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} div_{\tilde{y}}\Big[a_3(\tilde{y})\nabla_{\tilde{y}} w_3(x,\tilde{y})\Big] = f(x) \; in \; \tilde{Y}_3, \\ \\ w_3(x,\tilde{y}) = 0 \;\; on \;\; \tilde{Y}_{23}, \\ \\ w_3(x,\tilde{y}) = \tilde{v}_1(x,\tilde{y}) - u_2(x) \; on \; \tilde{Y}_{13}. \end{cases}$$

3. Supercritical scale : $\beta > 1$

Theorem 4.3. *Let u_ε be the solution to (P^ε). Then, there exits $(u, \tilde{v}_2) \in H = H^1_{LB}(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1(\tilde{Y})_{|\mathbb{R}})$ the unique solution of the homogenized problem :*

$$\begin{cases} -div_x\Big(A^{2,hom}\nabla u(x)\Big) - a^{1,hom}\partial^2_{x_3}u(x) = f \text{ in } \Omega, \\ \partial_{x_3}u(\tilde{x}, 1) = 0 \text{ on } \tilde{\Omega}, \\ a^{1,hom} = \frac{1}{|\tilde{Y}_1|}\displaystyle\int_{\tilde{Y}_1} a_1(\tilde{y})d\tilde{y}, \\ \tilde{v}_2(x, \tilde{y}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\partial_{x_k}u(x)s_2^k(\tilde{y}). \end{cases}$$

5. Bibliographie

[1] A.BOUGHAMMOURA, « Homogenization of a degenerate parabolic problem in a highly heterogeneous periodic medium with highly anisotropic fibers », *Mathematical and Computer Modeling* **49** (2009) 66-79.

[2] A. BOUGHAMMOURA, « Homogenization of an elastic medium having three phases », *Ricerche mat.*, **64** (2015), 65-85.

[3] M. MABROUK, A. BOUGHAMMOURA, « Homogenization of a strongly heterogeneous periodic elastic medium », *Internat. J. Engrg. Sci.*, **41** (2003), 817-843.

[4] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN, G. GRISO ,« Periodic unfolding and homogenization, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. i* **335** (2002), 99-104.

[5] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN, G. GRISO ,« Periodic unfolding and homogenization », *SIAM J. MATH. A NAL.* **40, 4** (2008), pp. 1585-1620

[6] J. FRANCŮ , N. E. SVANSTED ,« Some remarks on two-scale convergence and periodic unfolding », *Applications of Mathematics* **4** (2012), 359-375.

[7] N. A. FLECK, G. M. MULLER, M. F. ASHBY AND J. W. HUTCHINSON, « Strain gradient plasticity :theory and experiment », *Acta Metall. Mater.* **42** (1994), 475-487.

[8] L. T. DRZAL, « Interfaces and Interphases », ASM Handbook, Volume 21 : Composites, D.B. Miracle and S.L. Donaldson, editors, (2001), 169-179.

[9] HASHIN Z. , « Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites », *J. Mech. Phys. Solids.*, **50** (2002), 2509-2537.

[10] B. PUKÁNSZKY , « Interfaces and interphases in multicomponent materials : past, present, future », *European Polymer Journal*, **41** (2005), 645-662.

Rubrique

Study of a fourth-order parabolic equation in time-dependent domains

KHELOUFI Arezki

Département de Technologie
Université Bejaia
Ville Bejaia
Pays Algérie
arezkinet2000@yahoo.fr

RÉSUMÉ. De nouveaux résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale d'une solution sont donnés pour une équation parabolique d'ordre 4 en dimension deux d'espace, posée dans un domaine conique dépendant du temps. L'étude est réalisée dans le cadre des espaces de Sobolev avec poids. Notre méthode est basée sur la technique de décomposition des domaines. Quelques détails concernant les résultats donnés ici peuvent être trouvés dans [7].

ABSTRACT. New results on the existence, uniqueness and maximal regularity of a solution are given for a two-space dimensional fourth-order parabolic equation set in conical time-dependent domains. The study is performed in the framework of anisotropic weighted Sobolev spaces. Our method is based on the technique of decomposition of domains. Some details concerning the results given here can be found in [7].

MOTS-CLÉS : Equations paraboliques d'ordre 4, Domaines coniques, Espaces de Sobolev anisotropes avec poids

KEYWORDS : Fourth-order parabolic equations, Conical domains, Anisotropic weighted Sobolev spaces

1. Introduction

Let Q be an open set of R^3 defined by

$$Q = \left\{(t, x_1, x_2) \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Omega_t, 0 < t < T\right\}$$

where T is a finite positive number and for a fixed t in the interval $]0, T[$, Ω_t is a bounded domain of R^2 defined by

$$\Omega_t = \left\{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varphi(t)\right\}.$$

Here φ is a continuous real-valued function defined on $[0, T]$, Lipschitz continuous on $[0, T]$ and such that

$$\varphi(t) > 0$$

for every $t \in]0, T]$. We assume that

$$\varphi(0) = 0, \tag{1}$$

$$\varphi'(t)\,\varphi^2(t) \quad \to \quad 0 \qquad as \;\; t \to 0. \tag{2}$$

In Q, consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}^4 u = f \in L^2_\omega(Q), \\ \\ u|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = \partial_\nu u|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

where ∂_ν stands for the normal derivative, ∂Q is the boundary of Q and Γ_T is the part of the boundary of Q where $t = T$.

Remark 1

The boundary conditions of Problem (3) are equivalent to

$$u|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = \partial_{x_j} u\big|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = 0, \;\; j = 1, 2.$$

Here, $L^2_\omega(Q)$ is the space of square-integrable functions on Q with the measure $\omega dt dx_1 dx_2$, where the weight ω is a real-valued function defined on $[0, T]$, differentiable on $]0, T]$, such that

$$\forall t \in [0, T] : \omega(t) > 0, \tag{4}$$

$$\omega \;\; is\, a\, decreasing\, function\, on \;\;]0, T]. \tag{5}$$

The difficulty related to this kind of problems comes from the fact that the domain Q considered here is nonstandard since it shrinks at $t = 0$ ($\varphi(0) = 0$), which prevents the domain Q to be transformed into a regular domain without the appearance of some degenerate terms in the parabolic equation, see for example Sadallah [11].

In this work, we will prove that Problem (3) has a solution with optimal regularity, that is a solution u belonging to the anisotropic weighted Sobolev space

$$H^{1,4}_{0,\omega}(Q) := \left\{u \in H^{1,4}_\omega(Q) : \partial^k_{x_j} u\Big|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = 0, \;\; k = 0, 1; \;\; j = 1, 2\right\},$$

with

$$H^{1,4}_\omega(Q) = \{u : \partial_t u, \partial^\alpha u \in L^2_\omega(Q), |\alpha| \leq 4\}$$

where

$$\alpha = (i_1, i_2) \in N^2, |\alpha| = i_1 + i_2, \partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} u.$$

The space $H_\omega^{1,4}(Q)$ is equipped with the natural norm, that is

$$\|u\|_{H_\omega^{1,4}(Q)} = \left(\|\partial_t u\|_{L_\omega^2(Q)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq 4} \|\partial^\alpha u\|_{L_\omega^2(Q)}^2 \right)^{1/2}.$$

Our main result is

Theorem 1

Let us assume that φ satisfies condition (1) and the weight function ω verifies assumptions (4) and (5). Then, the fourth-order parabolic operator

$$L = \partial_t + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}^4$$

is an isomorphism from $H_{0,\omega}^{1,4}(Q)$ into $L_\omega^2(Q)$ in the following cases :

1) φ is an increasing function in a neighborhood of 0,

2) φ verifies the condition (2).

The case of a second-order parabolic equation is studied in [12] and in [6] both in two-dimensional and multidimensional cases. We can find in Sadallah [11] a study of such kind of problems in the case of one space variable. Further references on the analysis of higher-order parabolic problems in non-cylindrical domains are : Baderko [1, 2], Cherepova [3, 4], Galaktionov [6], Labbas and Sadallah [8] and Mikhailov [9, 10].

The organization of this work is as follows. In Section 2, we indicate the steps which allow us to prove Theorem 1.

2. Proof of Theorem 1

2.1. Uniqueness of solutions

Proposition 1 Under the assumptions (4) and (5) on the weight function ω, Problem (3) is uniquely solvable.

2.2. Case of a truncated domain Q_n

In this subsection, we replace Q by Q_n, $n \in N^*$

$$Q_n = \left\{ (t, x_1, x_2) \in Q : \frac{1}{n} < t < T \right\}.$$

Theorem 2

For each $n \in N^*$, the problem

$$\begin{cases} \partial_t u_n + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}^4 u_n = f_n \in L_\omega^2(Q_n), \\ \partial_{x_j}^k u_n \Big|_{\partial Q_n \setminus \Gamma_T} = 0, \ k = 0, 1; \ j = 1, 2, \end{cases} \quad [6]$$

where $f_n = f|_{Q_n}$ admits a unique solution $u_n \in H_\omega^{1,4}(Q_n)$.

Proof of Theorem 2 : The key of the proof is the following change of variables

$$(t, x_1, x_2) \quad \mapsto \quad (t, y_1, y_2) = \left(t, \tfrac{x_1}{\varphi(t)}, \tfrac{x_2}{\varphi(t)}\right)$$

which transforms Q_n into the cylinder $P_n = \left]\frac{1}{n}, T\right[\times B(0,1)$ and Problem (6) into

$$\begin{cases} \partial_t v_n + \frac{1}{\varphi^4(t)} \sum_{j=1}^{2} \partial_{y_j}^4 v_n + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \sum_{j=1}^{2} y_j \partial_{y_j} v_n = g_n \\ \partial_{y_j}^k v_n \Big|_{\partial P_n \setminus \Sigma_T} = 0, k = 0, 1;\ j = 1, 2 \end{cases}$$

where Σ_T is the part of the boundary of P_n where $t = T$.

2.3. Case of a conical type domain

Now, we return to the conical domain Q and we suppose that the function φ satisfies conditions (1) and (2).
For each $n \in N^*$, we denote $f_n = f|_{Q_n}$ and $u_n \in H_{\omega}^{1,4}(Q_n)$ the solution of Problem (3) in Q_n. Such a solution exists by Theorem 2.

The following energy estimate is the most important step of this work which will allow us to prove the existence of a solution to our problem throughout a passage to the limit. The details of the proof can be found in [7].

Proposition 2

There exists a constant K_1 independent of n such that

$$\|u_n\|_{H_{\omega}^{1,4}(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L_{\omega}^2(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L_{\omega}^2(Q)}.$$

3. Bibliographie

[1] E. A. BADERKO, « The solvability of boundary value problems for higher order parabolic equations in domains with curvilinear lateral boundaries », *Differencial'nye Uravnenija*, vol. 12, n° 10, 1781-1792, 1999.

[2] E. A. BADERKO, « E. A. Baderko, On the solution of boundary value problems for linear parabolic equations of arbitrary order in noncylindrical domains by the method of boundary integral equations », *Ph D Thesis, Moscow*, 1992.

[3] M. F. CHEREPOVA, « On the solvability of boundary value problems for a higher order parabolic equation with growing coefficients », *Doklady Mathematics*, vol. 74, n° 3, 819-820, 2006.

[4] M. F. CHEREPOVA, « Regularity of solutions of boundary value problems for a second-order parabolic equation in weighted Hölder spaces », *Differential Equations*, vol. 49, n° 1, 79-87, 2013.

[5] V. A. GALAKTIONOV, « On regularity of a boundary point for higher-order parabolic equations : towards Petrovskii-type criterion by blow-up approach », *Differential Equations*, vol. 16, n° 5, 597-655, 2009.

[6] A. KHELOUFI, B. K. SADALLAH, « Study of the heat equation in a symmetric conical type domain of R^{N+1} », *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 37, 1807-1818, 2014.

[7] A. KHELOUFI, B. K. SADALLAH, « Resolution of a high-order parabolic equation in conical time-dependent domains of R^3 », *Arab Journal of Mathematical Sciences*, vol. 22, 165-181, 2016.

[8] R. LABBAS, B. K. SADALLAH, « Smoothness of the solution of a fourth order parabolic equation in a polygonal domain », *Int. J. Appl. Math.*, vol. 1, 75-90, 1999.

[9] V. P. MIKHAILOV, « The Dirichlet problem for a parabolic equation. I », *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 61, n° 103, 40-64, 1963.

[10] V. P. MIKHAILOV, « The Dirichlet problem for a parabolic equation. II », *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 62, n° 104, 140-159, 1963.

[11] B. K. SADALLAH, « Etude d'un problème $2m$-parabolique dans des domaines plan non rectangulaires », *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)*, vol. 2, n° 1, 51-112, 1983.

[12] B. K. SADALLAH, « Study of a parabolic problem in a conical domain », *Math. J. Okayama Univ.*, vol. 56, 157-169, 2014.

Rubrique

Existence of Positive Solution for Systems of ϕ-Laplacian Three-point Boundary Value Problems on the Positive Half-line

MEBARKI Karima

Département de Mathématiques
Université Bejaia
Ville Bejaia
Pays Algérie
mebarqi_karima@hotmail.fr

RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail est l'étude de l'existence des solutions positives pour un problème aux limites de trois points de deux systèmes de deux équations du second ordre non linéaires de type ϕ-Laplacien. Les nonlinéarités peuvent changer de signe, ayant des singulariés à l'origine et dépendent des solutions et de leurs premières dérivées. En utilisant la théorie du point fixe sur les cones de quelques espaces de Banach à poinds, nous prouvons quelques résultats d'existence de solutions positives non triviales.

ABSTRACT. This work concerns the existence of positive solutions to a three-point boundary value problem for two systems of two second-order nonlinear ϕ-Laplacian equations on $(0, +\infty)$. The nonlinearities may change sign, exhibit time singularities at the origin, and depend both on the solutions and their first derivatives. Using the fixed point theory on cones of some weighted Banach spaces, some existence results of nontrivial positive solutions are proved.

MOTS-CLÉS : ϕ-laplacien, Solutions positives, Point fixe, la demi droite

KEYWORDS : ϕ-Laplacian, positive solutions, Fixed point, Half line

1. Introduction

In this paper, we first consider the following general system of nonlinear second-order ϕ-Laplacian three-point boundary value problems posed on the positive half-line :

$$\begin{cases} -(\phi(y_1'))'(t) = m_1(t) f_1(t, y_1(t), y_2(t), y_1'(t), y_2'(t)), & t \in I \\ -(\phi(y_2'))'(t) = m_2(t) f_2(t, y_1(t), y_2(t), y_1'(t), y_2'(t)), & t \in I \\ y_1(0) = \alpha y_1'(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} y_1'(t) = 0, \\ y_2(0) = \alpha y_2'(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} y_2'(t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha \geq 0$ and $\eta > 0$. For $i = 1, 2$, the nonlinear functions f_i: $R^+ \times (R^+)^2 \times R^2 \to R^+$ are nonnegative and m_i: $I \to R^+$ are nonnegative, continuous but are allowed to have a singularity at the origin $t = 0$. The interval $I := (0, +\infty)$ denotes the set of positive real numbers and $R^+ := [0, +\infty)$.

The nonlinear operator of derivation ϕ: $R \to R$ is an increasing homeomorphism such that $\phi(0) = 0$ (ϕ is not necessarily odd), satisfies

$$|\phi^{-1}(x)| \leq \phi^{-1}(|x|), \ \forall x \in R \text{ and } \forall \alpha, \beta \in R^+, \quad \phi(\alpha\beta) \leq \phi(\alpha)\phi(\beta)$$

Clearly, ϕ is an extension of the usual multiplicative p-Laplacian nonlinear operator $\phi(s) = |s|^{p-2}s \ \ (p > 1)$.

In the second part of the paper, we focus on a system with a particular structure, namely

$$\begin{cases} -(\phi(y'))'(t) = m(t) f(t, x(t)), & t \in I \\ -(\phi(x'))'(t) = m(t) g(t, y(t)), & t \in I \\ y(0) = \alpha y'(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} y'(t) = 0, \\ x(0) = \alpha x'(\eta), \quad \lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where the nonnegative functions f, g: $I \times R^+ \to R$ are continuous but may change sign ; the function m: $I \to R^+$ is continuous with possible singularity at $t = 0$.

In the particular case of second-order differential equations corresponding to $\phi = I_d$, system (1) has been widely studied in the literature ([2, 3, 4]).

In this work, we first prove an existence result of nontrivial positive solutions for system (1) under suitable conditions on the positive functions f_i and m_i, $i = 1, 2$ and thus extend some of the above works. This system is different from those considered in [1, 2, 3, 4]. Firstly, the singular system (1) is posed on an infinite interval. Secondly, the nonlinear operator of derivation extends the model case of the p-Laplacian nonlinear operator. Finally, the function m presents a time-singularity at $t = 0$.

The boundary value problem is formulated as a fixed point problem of a nonlinear operator. The index fixed point theory on cones of Banach spaces is employed.

The second part is devoted to investigating the singular system (2) where the nonlinearities are allowed to change sign. We prove the existence of positive solutions on a translate of a cone in a Banach space. Each existence result is illustrated by means of an example of application.

2. The general case of system (1)

By a positive solution of problem (1), we mean a couple of functions $(y_1, y_2) \in C^1[0,+\infty) \times C^1[0,+\infty)$ such that $\phi(y_i') \in C^1(0,+\infty)$ with $y_i(t) \geq 0$ on $[0,+\infty)$ for $i = 1, 2$ and such that the equations in (1) are satisfied. Consider the space

$$X = \left\{ \begin{array}{c} y = (y_1, y_2) \mid \ y_i \in C^1(R^+, R),\ y_i(0) = \alpha y_i'(\eta), \\ \text{and } \lim_{t\to+\infty} y_i'(t) = 0,\ i = 1, 2 \end{array} \right\}.$$

This is a Banach space with the norm

$$\|y\| = \|y_1\| + \|y_2\|, \ \text{ where } \|y_i\| = \sup_{t\in R^+} |y_i'(t)|,\ i = 1, 2.$$

Consider the following hypotheses where $i = 1, 2$:

$(\mathcal{G}_1)$ The functions $f_i : R^+ \times (R^+)^2 \times R^2 \to R^+$ are continuous and when y_1, y_2, z_1, z_2 are bounded $f_i(t, (t+\alpha)y_1, (t+\alpha)y_2, z_1, z_2)$ are bounded on $[0,+\infty)$.

$(\mathcal{G}_2)$ The functions m_i: $I \longrightarrow R^+$ are continuous, do not vanish identically on any subinterval of I. They may be singular at $t = 0$ but are integrably bounded, that is

$$A_i := \int_0^{+\infty} m_i(s)ds < \infty.$$

Our main existence result of this section is :

Theorem. Assume that the following assumptions hold

$(\mathcal{G}_3)$
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f_i(t, y_1, y_2, z_1, z_2) \\ \leq a_i(t) \left(\phi\left(\frac{y_1}{t+\alpha}\right) + \phi\left(\frac{y_2}{t+\alpha}\right)\right) + b_i(t)\left(\phi(z_1) + \phi(z_2)\right) + c_i(t), \\ \text{for all } (t, y_1, y_2, z_1, z_2) \in I \times (R^+)^2 \times R^2, \text{ with} \\ m_i a_i,\ m_i b_i,\ m_i c_i \in L^1(R^+), \ \text{for } i = 1, 2. \end{array} \right.$$

$(\mathcal{G}_4)$ There exists $R > 0$ such that

$$\phi^{-1}\left(2\left(|m_i a_i|_{L^1} + |m_i b_i|_{L^1}\right)\phi(R) + |m_i c_i|_{L^1}\right) < R/2. \qquad [3]$$

$(\mathcal{G}_5)$ There exist $0 < \gamma < \delta$ such that for all $(t, y_1, y_2, z_1, z_2) \in [\gamma, \delta] \times (R^+)^2 \times R^2$, we have

$$f_i(t, y_1, y_2, z_1, z_2) \geq g_i\left(t, \frac{y_1}{t+\alpha}, \frac{y_2}{t+\alpha}\right),$$

where $g_i \in C([\gamma, \delta] \times (R^+)^2)$ satisfies

$$\liminf_{y_1+y_2\to 0} \min_{t\in[\gamma,\delta]} \frac{g_i\left(t, \frac{y_1}{t+\alpha}, \frac{y_2}{t+\alpha}\right)}{\phi(y_1 + y_2)} \geq \ell_i \qquad [4]$$

with constants ℓ_i satisfying $\phi^{-1}\left(\ell_i \int_\gamma^\delta m_i(t)dt\right) > \frac{1}{\gamma}$, fori=1,2. Then, system (1) has at least one positive solution $y = (y_1, y_2)$ such that

$$0 < \|y\| < R.$$

3. The particular case of system (2)

In this section, we prove an existence result of nontrivial positive solutions for problem (2) under new conditions on the functions f, g, and m. In particular the nonlinearities f, g may change sign but we still obtain existence of positive solutions with precise information on the lower bounds. By a positive solution we mean a solution $(y, x) \in C^1[0, +\infty) \times C^1[0, +\infty)$ such that $\phi(y') \in C^1(0, +\infty)$ and $\phi(x') \in C^1(0, +\infty)$ with $x(t) > 0$ and $y(t) > 0$ on $[0, +\infty)$. For some real parameter $\theta > 0$, let

$$Y = \left\{ y \in C([0, +\infty), R) \mid \ y(0) = \alpha y'(\eta), \ \lim_{t \to +\infty} e^{-\theta t} y(t) = 0 \right\},$$

which is a weighted Banach space with the Bielecki-type norm [**?**]

$$\|y\|_\theta = \sup_{t \in [0, +\infty)} e^{-\theta t} |y(t)|\cdot$$

The nonlinearities are assumed to satisfy the following hypotheses :

$(\mathcal{H}_1)$ The functions $f : R^+ \times R^+ \to R$ and $g : R^+ \times R^+ \to R$ are continuous and when y, z are bounded, the function $g(t, e^{\theta t} y)$ is bounded on $[0, +\infty)$, and f satisfies $\int_0^{+\infty} m(s) f(s, k(\alpha+s)) ds < \infty$, for any positive constant k. For instance, one may take $g(t, y) = 1 + \frac{e^{-\theta t}}{1+t} y$.

$(\mathcal{H}_2)$ The function m: $I \longrightarrow R^+$ is continuous and does not vanish identically on any subinterval of I. It may be singular at $t = 0$ but is integrably bounded, i.e.

$$A := \int_0^{+\infty} m(s) ds < \infty.$$

Let

$$K = \begin{cases} \alpha, & \text{if } \theta\alpha \geq 1, \\ \frac{1}{\theta} e^{\theta\alpha - 1}, & \text{if } 0 < \theta\alpha < 1, \end{cases} \qquad [5]$$

and

$$\omega(t) = \alpha \phi^{-1} \left(\int_\eta^{+\infty} m(\tau) d\tau \right) + \int_0^t \phi^{-1} \left(\int_s^{+\infty} m(\tau) d\tau \right) ds, \ t \in R^+. \qquad [6]$$

Let K be defined by (5) and for each $M > 0$

$$S_M = \sup\{ g(t, e^{\theta t} y) \mid \ t \in R^+, \ y \in [0, M] \}.$$

Our main existence result in this section is :

Theorem. Assume that Assumptions $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ hold together with

$(\mathcal{H}_4)$ $\begin{cases} f(t, e^{\theta t} y) \leq a_1(t) \left(\phi(y) + y \right) + b_1(t), \\ g(t, e^{\theta t} y) \leq a_2(t) \left(\phi(y - \omega) + y - \omega \right) + b_2(t), \end{cases}$
for all $(t, y) \in R^+ \times R^+$, where ma_i, mb_i belong to $L^1(I)$.

$(\mathcal{H}_5)$ There exists $R > 0$ such that

$$K \phi^{-1} \left\{ |ma_1|_{L^1} \left(\phi(KR) + KR \right) + |mb_1|_{L^1} \right\} + \|\omega\|_\theta < R. \qquad [7]$$

$$\phi^{-1} \left\{ |ma_2|_{L^1} \left(\phi(R) + R \right) + |mb_2|_{L^1} \right\} < R. \qquad [8]$$

$(\mathcal{H}_6)$ There exist positive constants $\|\omega\|_\theta < \rho < R$ and γ, δ $(\eta < \gamma < \delta)$ such that, for all $(t, y) \in [\gamma, \delta] \times [\omega(t), \rho]$,

$$g(t, e^{\theta t} y) > \ell \phi^2(e^{\theta t} y),$$

and for all $t \in [\gamma, \delta],\ y \geq \mu$,

$$f(t, y) \geq \lambda y,$$

where

$$\ell := \frac{\phi^2(1/\gamma)}{\int_\gamma^{+\infty} m(t)dt}, \quad \lambda = \left(\gamma \int_\gamma^{+\infty} m(t)dt\right)^{-1},$$

and

$$\mu = (\alpha + \gamma)\phi^{-1}\left(\Lambda \int_\gamma^{\delta} m(t)dt\right),$$

where $\Lambda = \min_{t \in [\gamma, \delta],\ y \in [0, \rho]} g(t, e^{\theta t} y)$.

Then, System (2) has at least one positive solution (y, x) such that

$$0 < \|y - \omega\|_\theta < R, \quad \|x\|_\theta \leq K\phi^{-1}(AS_R),$$

and for all $t \in [0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y(t) & > & \alpha\phi^{-1}\left(\int_\gamma^{\delta} m(\tau)d\tau\right) + \int_0^t \phi^{-1}\left(\int_s^{+\infty} m(\tau)d\tau\right) ds, \\ x(t) & > & \alpha\phi^{-1}\left(\int_\gamma^{\delta} m(s)g(s, y(s))ds\right). \end{cases}$$

4. Bibliographie

[1] S. DJEBALI, K. MEBARKI, « Fixed point theory for translates of cones and applications », *Nonlinear Studies*, vol. 1, n° 4, 579-589, 2014.

[2] D.G. DE FIGUEIREDO, P. UBILLA, « Suplinear systems of second-order ODE's », *Nonlin. Anal., T.M.A.*, vol. 68, n° 6, 1765-1773, 2008.

[3] S.L. XI, M. JIA , H.P. JI, « Positive solutions of boundary value problem for systems of second-order differential equations with integral boundry condition on the half line », *Elec. J. Qual. The. Diff. Eqns.*, vol. 31, 1-13, 2009.

[4] X.Q. ZHANG, « Positive solutions of singular multipoint boundary value problem for systems of nonlinear second-order differential equations on infinite intervals in Banach spaces », *Bound. Value Prob., Vol.*, vol. 2009, 22 pages, 2009.

Arima en pratique avec LaTeX

Quelques remarques sur le comportement asymptotique pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux dans un domaine discrétisé

Hisao Fujita Yashima* — Ibtissem Annaka**

* Département de mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Constantine
25000 Constantine
ALGERIE
hisaofujitayashima@qq.com

** Département de mathématiques
Université de Guelma
24000 Guelma
ALGERIE
annakaibtisem@gmail.com

RÉSUMÉ. On considère le système d'équations stochastiques du mouvement d'un gaz visqueux barotropique dans un domaine discrétisé en une dimension spatiale. On rappelle que l'existence d'une mesure invariante a été démontrée pour l'équation approchée formulée par l'introduction d'un poids artificiel. Ensuite on étudie le comportement asymptotique de la solution, en examinant d'abord le comportement asymptotique de la solution de l'équation déterministe. Pour cette analyse on utilise des fonctions appropriées pour mesurer l'écart de la densité de la position du repos. On obtient une caractérisation du comportement asymptotique, qui met en évidence le rôle de l'énergie fournie par la perturbation stochastique et celui du poids artificiellement introduit.

ABSTRACT. We consider the stochastic equation system of motion of barotropic viscous gas in a discretized one-dimensional domain. We recall that the existence of an invariant measure has been proved for the approximate equation formulated by the introduction of an artificial weight. After that, the asymptotic behavior of the solution is studied, by examining first the asymptotic behavior of the solution of the deterministic equation. For this analysis, appropriate functions for measurement of the distance of the density from its position of rest are used. A characterization of the asymptotic behavior, which indicates the role of the energy provided by stochastic perturbation and that of the weight artificially introduced, is given.

MOTS-CLÉS : Equations stochastiques, comportement asymptotique, mesure invariante, gaz visqueux barotropique, domaine discrétisé

KEYWORDS : Stochastic equations, asymptotic behavior, invariant measure, barotropic viscous gas, discretized domain

1. Introduction

Nous rappelons que le mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale est régi, dans les coordonnées lagrangiennes massiques ξ (nous prenons $0 < \xi < 1$), par le système d'équations

$$\partial_t v = \eta \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h \partial_\xi (\varrho^\gamma), \qquad \partial_t \frac{1}{\varrho} = \partial_\xi v \tag{1}$$

(voir [AKM]), où v et ϱ représentent respectivement la vitesse et la densité du gaz, tandis que η et γ sont respectivement le coefficient de viscosité et l'exposant adiabatique. Ici nous avons adopté l'équation constitutive de la pression $p = h\varrho^\gamma$ (h : constante positive).

Si on considère le système d'équations [1] sous une perturbation stochastique exprimée par un mouvement brownien W à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$, on aura le système d'équations stochastiques

$$dv = [\eta \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h \partial_\xi (\varrho^\gamma)]dt + dW, \qquad \partial_t \frac{1}{\varrho} = \partial_\xi v, \tag{2}$$

avec la condition aux limites

$$v|_{\xi=0,1} = 0. \tag{3}$$

L'existence et l'unicité de la solution du système d'équations [2] avec une condition initiale ont été démontrées dans [TFY]. Mais, comme on va le voir dans la suite, pour démontrer l'existence d'une mesure invariante on a dû discrétiser le domaine $[0,1]$ et introduire un « poids » ε, qui régularise la densité ϱ. Pour comprendre la nature de cette « intrigue », dans le présent travail nous allons retourner au cas déterministe et examiner le comportement asymptotique de la solution du système d'équations dans le domaine discrétisé avec un « poids » ε, puis revenir aux équations stochastiques avec des instruments introduits dans le cas déterministe.

2. Existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique

Soient $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, et $\varepsilon > 0$. On discrétise le domaine $[0,1]$, de sorte qu'il est remplacé par

$$\xi_i = i\delta, \qquad i = 0, 1, \cdots, N, \qquad \delta = \frac{1}{N}.$$

On va considérer $v_i = v_i(t)$, $i = 0, 1, \cdots, N$, qui correspondraient à la vitesse au point ξ_i à l'instant t, et $\varrho_i = \varrho_i(t)$, $i = 1, \cdots, N$, qui correspondraient à la densité dans l'intervalle $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ à l'instant t. Or, comme il faut que $\varrho_i > 0$, en posant

$$\sigma_i = \log \varrho_i,$$

nous formulons les équations avec σ_i. En effet nous considérons le système d'équations

$$dv_i = [\frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma)]dt \quad [4]$$
$$+\lambda_i dW_i, \qquad i = 1, \cdots, N-1,$$
$$\frac{d}{dt}\sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}[v_i - v_{i-1}] - \varepsilon(e^{\sigma_i} - 1), \qquad i = 1, \cdots, N, \quad [5]$$

avec les conditions

$$v_0 = v_N = 0, \quad [6]$$

où η et h sont des constantes strictement positives et γ est une constante telle que $1 < \gamma < 2$, tandis que λ_i, $i = 1, \cdots, N-1$, sont des constantes positives et W_i, $i = 1, \cdots, N-1$, sont des mouvements browniens canoniques à valeurs réelles définis sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbf{P})$; on suppose que W_i, $i = 1, \cdots, N-1$, sont indépendants.

Dans [BFY] on a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Il existe une mesure invariante μ définie sur $\mathbf{R}^{2N-1}$ pour le système d'équations [4]–[5] (avec [6]) telle que*

$$\mu(\{\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i} = 1\}) = 1. \quad [7]$$

La démonstration du théorème 1 se base essentiellement sur les estimations de la solution et le théorème de Khas'minskii (voir le théorème 5.1 du chap. III de [Has]).

Comme le théorème 1 peut être démontré pour quelconque $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, se pose la question naturelle : « si N tend vers l'infini, la suite de mesures invariantes construites dans le théorème 1 (ou une sous-suite d'elles) converge vers une mesure invariante pour l'équation dans le domaine continu $[0, 1]$? » A ce propos dans [LFY] on a montré qu'une sous-suite de mesures invariantes converge dans une topologie très faible vers une mesure qui peut être interprétée comme une mesure invariante dans un sens très faible.

3. Comportement asymptotique de l'équation déterministe dans le domaine discrétisé

3.1. Existence et unicité de la solution

Considérons le système d'équations

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\eta}{\delta^2}(e^{\sigma_{i+1}}v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i})v_i + e^{\sigma_i}v_{i-1}) - \frac{h}{\delta}((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma), \quad [8]$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}[v_i - v_{i-1}] - \varepsilon(e^{\sigma_i} - 1) \qquad [9]$$

($i = 1, \cdots, N-1$ dans [8] et $i = 1, \cdots, N$ dans [9]) avec les conditions

$$v_0 = v_N = 0. \qquad [10]$$

Rappelons d'abord l'existence et l'unicité de la solution de ce système d'équations.

LEMME 1. *On suppose que*

$$\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_{0i}} = 1. \qquad [11]$$

Alors le système d'équations [8]–[9] avec la condition aux limites [10] et la condition initiale

$$v_i(0) = v_{0i} \quad i = 1, \cdots, N-1, \qquad \sigma_i(0) = \sigma_{0i} \quad i = 1, \cdots, N, \qquad [12]$$

admet dans l'intervalle $[0, \infty[$ *une solution* $(v_1(t), \cdots, v_{N-1}(t), \sigma_1(t), \cdots, \sigma_N(t))$ *et une seule vérifiant la condition*

$$\delta \sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t)} = 1 \quad \forall t \geq 0. \qquad [13]$$

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. En multipliant les deux membres de [8] par δv_i et ceux de [9] par $h\delta(e^{\sigma_i})^{\gamma-1}$, on déduira l'inénalité

$$\frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N} (e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 t \qquad [14]$$

avec deux constantes C_0 et C_1, d'où on obtiendra l'existence et l'unicité de la solution globale.

D'autre part, en multiplier les deux membres de [9] par $\delta e^{-\sigma_i}$ et en utilisant les conditions [10] et [11], on obtiendra [13].

3.2. Comportement asymptotiqur de la solution

Pour le comportement asymptotique de la solution, on a la

PROPOSITION 1. *Supposons que la donnée initiale* $(v_{01}, \cdots, v_{0,N-1}, \sigma_{01}, \cdots, \sigma_{0N})$ *vérifie la condition [11]. Quand* $t \to \infty$*, on a*

$$v_i(t) \to 0 \ \textit{pour} \ i = 1, \cdots, N-1, \quad e^{\sigma_i(t)} \to 1 \ \textit{pour} \ i = 1, \cdots, N. \qquad [15]$$

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On pose

$$\Phi_1(v,\sigma) = \frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N} f_1(\sigma_i), \qquad \Phi_2(v,\sigma) = \delta\eta\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 + h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N} f_2(\sigma_i), \tag{16}$$

où

$$f_1(x) = (e^x)^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-x}-1) - 1, \qquad f_2(x) = (e^x)^{\gamma} - (e^x)^{\gamma-1} + e^{-x} - 1.$$

On remarque que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont positives et strictement convexes et s'annulent seulement au point $x = 0$, qui est leur point de minimum ; en outre on a

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{17}$$

Comme

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\big((e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i(t)}-1) - 1\big),$$

$$\sum_{i=1}^{N}\big(-(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma} + (e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1}\big) = \sum_{i=1}^{N}\big(-(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma} + (e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} - e^{-\sigma_i(t)} + 1\big),$$

de l'égalité

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(e^{\sigma_i})^{\gamma-1} = -\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\eta}{\delta}e^{\sigma_i}(v_i - v_{i-1})^2 - h\varepsilon\delta\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^{\gamma} - (e^{\sigma_i})^{\gamma-1})$$

et de l'inégalité [17] on déduira que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(v,\sigma) \le -\Phi_2(v,\sigma) \le -\min(2\eta, \varepsilon(\gamma-1))\Phi_1(v,\sigma), \tag{18}$$

ce qui implique que

$$\frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{N}\big((e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(e^{-\sigma_i(t)}-1) - 1\big) \to 0$$

pour $t \to \infty$, d'où on obtient [15].

REMARQUE. Il n'est pas difficile de voir que la solution $(v_1(t), \cdots, v_{N-1}(t), \sigma_1(t), \cdots, \sigma_N(t))$ converge vers 0 exponentiellement.

4. Comportement asymptotique de la solution de l'équation stochastique et estimation d'énergie de la mesure invariante

Pour la solution du système d'équations [4]–[5] avec [6] et avec une condition initiale, en utilisant la formule d'Ito et la technique similaire à la déduction de (3.13) de [BFY] on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{\delta}{2}\mathbf{E}\sum_{i=1}^{N-1}(v_i(t))^2+\frac{h\delta}{\gamma-1}\mathbf{E}\sum_{i=1}^{N}(e^{\sigma_i(t)})^{\gamma-1}\Big]=-\eta\mathbf{E}\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\sigma_i}}{\delta}(v_i-v_{i-1})^2$$

$$-h\varepsilon\delta\mathbf{E}\sum_{i=1}^{N}((e^{\sigma_i})^{\gamma}-(e^{\sigma_i})^{\gamma-1})+\frac{1}{2}\Lambda,\qquad \Lambda=\delta\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i^2. \tag{19}$$

De manière analogue à [18] (voir aussi [16]) on déduit de [19] l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}\Phi_1(v,\sigma)\le-\mathbf{E}\Phi_2(v,\sigma)+\frac{1}{2}\Lambda\le-\min(2\eta,\varepsilon(\gamma-1))\mathbf{E}\Phi_1(v,\sigma)+\frac{1}{2}\Lambda. \tag{20}$$

L'inégalité [20] implique que

$$\forall\alpha>0\ \ \exists\bar{t}_\alpha\ge0\ \text{ tel que }\quad \mathbf{E}\Phi_1(v,\sigma)\le\frac{\Lambda}{2\min(2\eta,\varepsilon(\gamma-1))}+\alpha\quad\text{ pour tout }\ t\ge\bar{t}_\alpha.$$

On aura donc $\mathbf{E}_\mu\Phi_1(v,\sigma)\le\frac{\Lambda}{2\min(2\eta,\varepsilon(\gamma-1))}$ pour l'espérance mathématique $\mathbf{E}_\mu$ par rapport à la mesure invariante μ. La fonction $\Phi_1(v,\sigma)$ (voir [16]) peut être considérée comme l'énergie de l'état (v,σ) et donc $\mathbf{E}_\mu\Phi_1(v,\sigma)$ peut être considérée comme l'énergie de l'état représenté par la mesure invariante μ.

5. Bibliographie

[AKM] ANTONTSEV, S. N., KAZHIKHOV, A. V., MONAKHOV, V. N., *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids* (translated from Russian). North-Holland, 1990.

[BFY] BENSEGHIR, R., FUJITA YASHIMA, H. « Mesure invariante pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension avec la discrétisation du domaine », *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, vol. 58, 2013, pp. 149–162.

[Has] HAS'MINSKII, R. Z. : *Stochastic stability of differential equations* (translated from Russian). Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[LFY] LASFER, F., FUJITA YASHIMA, H. « Une versione de mesure invariante pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension », *Annales Math. Africaines*, vol. 5, 2015, pp. 29–46.

[TFY] TORNATORE, E., FUJITA YASHIMA, H. « Equazione stocastica monodimensionale di un gas viscoso barotropico », *Ricerche Mat.*, vol. 46, 1997, pp. 255–283.

Rubrique

Design of heat conduction using

topological sensitivity analysis method

Kallekh Afef [1] — Maatoug Hassine [2]

[1,2] Departement of Mathematics
University of Monastir
Tunisia
Laborator: UR13ES64, Analysis and control of PDEs
[1] Afef.Kallekh@fsm.rnu.tn, [2] maatoug.hassine@enit.rnu.tn

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère un problème d'optimisation de forme lié à l'équation de chaleur instationnaire. On propose une approche basée sur la méthode de l'analyse de sensibilité topologique. On donne un développement asymptotique d'une fonction de forme par rapport à la perturbation du domaine par l'insertion d'un petit isolant. Des exemples numériques sont présentées pour démontrer l'efficacité de l'approche proposée.

ABSTRACT. In this work, we consider a shape optimization problem related to the unsteady heat equation. The proposed approach is based on the topological sensitivity analysis method. It consists in computing an asymptotic expansion of a design function with respect to the insertion of a small insulator in the design domain. Illustrative examples are presented to demonstrate this effectiveness of the proposed approach to optimize a heat conductor.

MOTS-CLÉS : Gradient topologique, optimisation de forme, analyse de sensibilité topologique, équation de chaleur instationnaire, conducteur thermique.

KEYWORDS : Topological gradient, shape optimization, topological sensitivity analysis, transient heat equation, heat conductor.

1. Introduction

The notion of shape optimization is increasingly getting more and more widely used in the design of several thermal systems like board design, thermal insulation of conductors, printed circuits and cooling fans. The optimization procedure is to find optimal structure by determining for every point in the design domain if there should be material or not (void element). Shape optimization has become an extremely active area of research and development. As a result, various numerical approaches have been developed in the design of thermal system, among them, boundary element method developed by Park and Yoo for shape optimization of two-dimensional heat transfer system [5] ,solid isotropic material with penalization (SIMP)method developed by Turteltaub in a transient heat conduction problem [8], evolutionary structural optimization method (ESO) developed to design the material thermal conduction problems [6]. This design method based on the simple concept of gradually removing inefficient material from a structure. More recently, motivated by the inverse problem of identifying a small inclusion, Sokolowski and Zochowski proposed the topological derivatives approach [7]. The key idea is to assess the sensitivity of an appropriately chosen function taken from the solution of a partial differential equation. This recently approach provides a useful tool for engineers and architects who are interested in exploring structurally efficient shapes during the conceptual design stage of a project.The main idea of shape optimization algorithm via topological sensitivity analysis consist in determining the best location and geometry of holes or void in the design domain. In addition, the topological gradient was extended via topological sensitivity analysis in order to include arbitrary shaped holes with different boundary condition (Dirichlet or Neumann) to Laplace, Helmoltz, Stokes and Navier-Stokes equations [2, 3]. On the basis of these previous works, the aim of the present study is to extend the topological sensitivity analysis to unsteady heat equation in a homogenous conductor $\mathcal{H}$ with the respect to the presence of a small insulator $\mathcal{I}_\varepsilon$ in the conductive materials. More precisely, we aim to optimize the material configuration by identifying the best location and shape of the newly created holes (insulators) with adiabatic boundary (with homogeneous Neumann boundary condition) inside the design domain, in order to minimize an objective function j. The concept consists in computing an asymptotic expansion of the design function as follows :

$$j(\mathcal{H}\backslash\overline{\mathcal{I}_\varepsilon}) - j(\mathcal{H}) = f(\varepsilon)g(x) + o(f(\varepsilon)), \varepsilon \geq 0 \text{ small enough,}$$

the function $f(\varepsilon)$ is positive and going to zero with ε. The signs and absolute value taken by function g in $\mathcal{H}$ are the decisive input used by a dedicated algorithm, depending on the application task to perform. The best locations of holes or insulators inside conductive elements is given by the most negative value of the scalar function g.

This paper is organized as follows : we give a precise statement of the optimization problem in Section 2. We derive a topological sensitivity analysis for the unsteady heat equation with respect to the presence of a small insulator with adiabatic boundary in Section 3. To demonstrate the efficiency and accuracy of the approach, we present some numerical results in Section 4.

2. Formulation of the problem

Let $\mathcal{H}$ be a heated design domain fully occupied by conductive materials. We assume that $\mathcal{H}$ is an open and bounded domain of $\mathbb{R}^d, d = 2, 3$, with a smooth boundary $\partial\mathcal{H}$. The heat transfer across the domain is solution to the corresponding partial differential equation

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta = F \text{ in } \mathcal{H} \times (0, T), \tag{1}$$

under the following boundary and initial conditions

$$\begin{cases} \nabla\theta.n & = \phi & \text{on} & \Gamma \times (0,T), \\ \theta & = u_d & \text{on} & \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T), \\ \theta(\cdot,0) & = 0 & \text{in} & \mathcal{H}, \end{cases}$$

where Γ_1, Γ_2 and Γ are portions of the boundary $\partial\mathcal{H}$ having a nonnegative Lebesgue measure and satisfy $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma = \partial\mathcal{H}$ and $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma = \varnothing$.

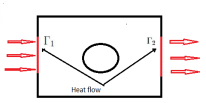


Figure 1. *A theoretical model of a thermal conductor.*

The purpose is to determine the optimal shape of heat conductor $\mathcal{C}$, in order to minimize a given design function.

$$\min_{\mathcal{C}\in\mathcal{E}_{ad}} j(\mathcal{C}) \text{ such that } |\mathcal{C}| \leq V_{desired},$$

where j denotes the shape function of the form

$$j(\mathcal{C}) = \int_0^T J(\theta_{\mathcal{C}})dt,$$

depends of the design domain through $\theta_{\mathcal{C}}$ solution to the unsteady heat equation (1) in $\mathcal{C}$ and $\mathcal{E}_{ad}$ is a given set of admissible domains.

To solve this optimization problem, we shall use a topological gradient method [2, 3, 4, 7]. It consists of studying the variation of a shape function j with the respect to the presence of a small insulator in the design domain $\mathcal{H}$.

3. Topological sensitivity analysis

We denote by $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}\backslash\overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$ the perturbed domain with smooth boundary Γ_ε obtained by inserting a small insulator $\mathcal{I}_\varepsilon$ in the domain $\mathcal{H}$. We suppose that the insulator has the form $\mathcal{I}_\varepsilon = z + \varepsilon\mathcal{I}$ where $z \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ and $\mathcal{I}$ is a fixed open and bounded subdomain of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ containing the origin, whose boundary $\partial\mathcal{I}$ is of class $\mathcal{C}^1$. In $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}\backslash\overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$, the temperature field θ_ε satisfies the following system :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta\theta_\varepsilon & = F & \text{in} & \mathcal{H}_\varepsilon \times (0,T), \\ \nabla\theta_\varepsilon.n & = \phi & \text{on} & \Gamma \times (0,T), \\ \theta_\varepsilon & = u_d & \text{on} & \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T), \\ \nabla\theta_\varepsilon.n & = 0 & \text{on} & \partial\mathcal{I}_\varepsilon \times (0,T), \\ \theta_\varepsilon(\cdot,0) & = 0 & \text{in} & \mathcal{H}_\varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

It should be noted that, for any $F \in L^2(0,T,L^2(\mathcal{H})$, the problem (2) has a unique solution θ_ε in $\mathcal{V}_\varepsilon = L^2([0,T],\mathcal{X}_\varepsilon) \cap H^1([0,T],\mathcal{X}_\varepsilon')$ where $\mathcal{X}_\varepsilon = \{\theta \in H^1(\mathcal{H}_\varepsilon);\ \theta = u_d \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$ [1].
Note that for $\varepsilon = 0$, $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}$ and θ_0 is solution to (1).

In the presence of a small insulator $\mathcal{I}_\varepsilon$ in the design domain $\mathcal{H}$, we consider the design function j on the form

$$j(\mathcal{H}_\varepsilon) = \int_0^T J_\varepsilon(\theta_\varepsilon(.,t))dt,$$

where θ_ε is the solution of (2) and J_ε is a scalar function defined on $\mathcal{X}_\varepsilon$.

Our aim is to compute the sensitivity variation of the shape function j with respect to ε. More precisely, we establish an asymptotic formula on the form

$$j(\mathcal{H}_\varepsilon) - j(\mathcal{H}) = f(\varepsilon)\delta j(z) + o(f(\varepsilon)), \ \ \forall z \in \mathcal{H}, \tag{3}$$

for a large class of shape function j satisfying the following assumptions :

Assumption 3.1 $i)$ $\forall \varepsilon \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{X}_\varepsilon$, $J_\varepsilon(\theta) \in L^1(0,T)$.

$ii)$ *The function J_ε is differentiable with respect to θ, its derivative being denoted by $DJ_\varepsilon(\theta)$ satisfies*

$$\|DJ_\varepsilon(\theta_\varepsilon) - DJ_0(\theta_0)\|_{L^2(0,T,\mathcal{X}'_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{d/2}). \tag{4}$$

$iii)$ *There exist a real number δJ, and a scalar function $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tending to zero with ε such that*

$$\int_0^T (J_\varepsilon(\theta_\varepsilon(\cdot,t)) - J_0(\theta_0(\cdot,t)))dt = \int_0^T DJ_\varepsilon(\theta_\varepsilon)(\theta_\varepsilon - \theta_0)dt + f(\varepsilon)\delta J + o(f(\varepsilon)). \tag{5}$$

Under assumption 3.1, the variation of the shape function j with respect to ε reads as follows

$$\begin{aligned} j(\mathcal{H}_\varepsilon) - j(\mathcal{H}) &= \int_0^T \Big(J_\varepsilon(\theta_\varepsilon(\cdot,t)) - J_0(\theta_0(\cdot,t))\Big)dt, \\ &= \int_0^T DJ_\varepsilon(\theta_\varepsilon)(\theta_\varepsilon - \theta_0)dt + f(\varepsilon)\delta J + o(f(\varepsilon)) \\ &= \mathcal{A}_\varepsilon(\theta_0 - \theta_\varepsilon, p_\varepsilon) + f(\varepsilon)\delta J + o(f(\varepsilon), \end{aligned}$$

where p_ε is the solution to the associated adjoint problem

$$\mathcal{A}_\varepsilon(w, p_\varepsilon) = -\int_0^T DJ_\varepsilon(\theta_\varepsilon(\cdot,t))(w)dt, \quad \forall w \in \mathcal{V}_\varepsilon. \tag{6}$$

To begin with, we approximate the state $z_\varepsilon = p_\varepsilon - p_0$ by

$$h_\varepsilon(x,t) = \varepsilon P(\frac{x-z}{\varepsilon})\nabla_x p_0(z,t), \ \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T),$$

where $P = (P_1, .., P_d)^t$ is a field vector.
We start the derivation of the topological asymptotic expansion with the following estimate of $s_\varepsilon = p_\varepsilon - p_0 - h_\varepsilon$. This estimate plays a fundamental role in determining our topological asymptotic expansion.

Proposition 3.2 *The function $s_\varepsilon = p_\varepsilon - p_0 - h_\varepsilon$ admits the following estimate*

$$\|s_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\mathcal{H}_\varepsilon))} + \|s_\varepsilon\|_{L^2(0,T,H^1(\mathcal{H}_\varepsilon))} = o(\varepsilon^{d/2}).$$

We are now ready to compute the topological asymptotic expansion for the shape function j. It consists in deriving the variation $j(\mathcal{H}_\varepsilon) - j(\mathcal{H})$ with respect to the presence of a small insulator $\mathcal{I}_\varepsilon$ in the design domain $\mathcal{H}$. The main result obtained in the case of spherical hole is summarized by the following theorem

Theorem 3.3 *Let $z \in \mathcal{H}$ and j be a design function on the form $j(\mathcal{H}_\varepsilon) = \int_0^T J_\varepsilon(\theta_\varepsilon(\cdot,t))dt$. If the shape function J_ε satisfies the assumptions* 3.1*, then j admits the following asymptotic expansion*

$$j(\mathcal{H}_\varepsilon) - j(\mathcal{H}) = \varepsilon^2\pi\Big[\int_0^T F(z,t)p_0(z,t)dt - 2\int_0^T \nabla_x\theta_0(z,t).\nabla_x p_0(z,t)dt$$
$$- \int_0^T \frac{\partial\theta_0}{\partial t}(z,t)p_0(z,t)dt + \delta J(z)\Big] + o(\varepsilon^2).$$

4. Numerical studies

In this case, one seeks to design a thermal conductor. We consider $\mathcal{H} = (0,10)\times(0,10)$, whose contour is given by $\partial\mathcal{H} = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, where $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ and $meas(\Gamma_1) = meas(\Gamma_2) = 4$, and Γ_N. One has that $\phi = 0$ on Γ_N and on $\Gamma_{D_1} = \Gamma_{D_2}$ are prescribed the temperatures $u_d = 0$ on Γ_1 and $u_d = 100$ on Γ_2 respectively. In the hole created via topological gradient, Neumann homogeneous boundary conditions are imposed, that is $\phi = 0$ on $\partial\mathcal{I}_\varepsilon$. Therefore, the idea is to create holes where the shape function given by

$$j(\mathcal{H}_\varepsilon) = \int_0^T \int_{\mathcal{H}_\varepsilon} |\nabla\theta_\varepsilon|^2 dxdt + meas(\mathcal{H}_\varepsilon),$$

is less sensible, that is, where δj assumes the smallest values. The adopted stop criterion is over the final volume to be obtained. That is, the idea is creating the holes while $meas(\mathcal{H}) \geq meas(\hat{\mathcal{H}})$, where $meas(\hat{\mathcal{H}})$ corresponds to the final volume required.The aim is to determine the optimal shape $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{H}$ of the heat conductors domain minimizing the design function :

$$\min_{\mathcal{C}\in\mathcal{E}_{ad}} j(\mathcal{C}),$$

where $\mathcal{E}_{ad}$ is a set of admissible domains defined by

$$\mathcal{E}_{ad} = \{\mathcal{C} \subset \mathcal{H} \text{ such that } \Gamma_1 \subset \partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{C} \text{ and } \Gamma_2 \subset \partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{C}\}.$$

The optimal design is obtained iteratively. We apply an iterative process to build sequence of geometries $(\mathcal{C}_k)_{k\geq 0}$ with $\mathcal{C}_0 = \mathcal{H}$. At the k^{th} iteration the topological gradient δj is computed in $\mathcal{C}_k$ and the new geometry $\mathcal{C}_{k+1} = \mathcal{C}_k \backslash \overline{\mathcal{I}}_k$ is obtained by inserting a small insulator $\mathcal{I}_k$ in the design domain $\mathcal{C}_k$. The insulator $\mathcal{I}_k$ is defined by a level set curve of δj :

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathcal{C}_k \text{ such that } \delta j(x) \leq c_k < 0\},$$

where c_k is chosen in such a way that the shape function decreases as much as possible. Numerically, the constant c_k depends on the most negative value of δj.

The algorithm :

• Initialization : choose $\mathcal{C}_0 = \mathcal{H}$ and set $k = 0$.

• Repeat until $|\mathcal{C}_k| \leq V_{\text{desired}}$:

- Solve the unsteady heat equation in $\mathcal{C}_k$,
- Solve the associated adjoint problem in $\mathcal{C}_k$,
- Compute the topological gradient $\delta j_k(x),\ \forall x \in \mathcal{C}_k$,
- Determine the insulator $\mathcal{I}_k$,
- Set $\mathcal{C}_{k+1} = \mathcal{C}_k \backslash \overline{\mathcal{I}}_k$,

- $k \leftarrow k+1$.

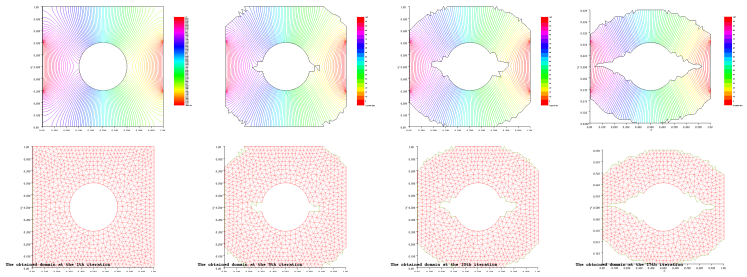


Figure 2. *The obtained results for different iterations* $k = 0$, $k = 5$, $k = 10$ *and* $k = 17$.

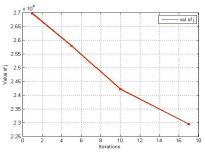


Figure 3. *Variation of the design function during iterations.*

Figure 3 shows the variation of the design function during iterations. The optimal design obtained in the last iteration $(k = 17)$ is presented in figure 2 in considering $meas(\hat{\mathcal{H}}) = 0.7\, meas(\mathcal{H})$. One also observes a heat conductor that directs the flux from Γ_1 to Γ_2. This academic example shows that topological gradient can be used to determine where the insulator $\mathcal{I}_\varepsilon$ must be placed, in order to automatically design components able to channel the heat flux from Γ_1 (hotter region) to Γ_2 (colder region).

5. Bibliographie

[1] M. ABDELWAHED, M. CHORFI, V. RĂDULESCU, « Numerical solutions to heat equations », *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2016(68), 2016.

[2] M. ABDELWAHED ,M. HASSINE , M.MASMOUDI , « Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique », *Math. Anal. and Applic.*, vol. 356, 2009.

[3] PH. GUILLAUME, M. HASSINE , « Removing holes in topological shape optimization », *ESAIM, Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 14, n° 1, 2008.

[4] A.A. NOVOTNY, R.A. FEIJOO, E. TAROCO, C. PADRA,« Topological sensitivity analysis », *Comput. Methods Appl. Mech. Engng* vol. 192, 2003.

[5] C.W. PARK, Y.M. YOO, « shape design sensitivity analysis of a two-dimensional heat transfer system using the boundary element method », *Comput. Struct.*, vol. 28, 1988.

[6] LI. QING, GRANT P. STEVEN, Y.M XIE, OSVALDO M., « Shape and topology design for heat conduction by Evolutionary Structural Optimization », *International journal of heat and mass transfer*, vol. 42, 1999.

[7] J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI, « Topological derivates for elliptic problems », *Inverse Problems*, vol. 15, n° 1, 1999.

[8] S. TURTELTAUB, « Optimal material properties for transient problems », *Struct. Multidiscip. Optim.* vol. 22,2001.

Estimation *a posteriori* optimale et garantie pour un modèle réduit d'écoulement en milieu poreux fracturé.

MGHAZLI Zoubida(*)
NAJI Ilyas(**)

LIRNE[1]
Faculté des Sciences, Université ibn tofaïl
Kénitra, Maroc
(*) mghazli_zoubida@yahoo.com
(**)i.naji.univ@gmail.com

RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail est de développer des estimations a posteriori optimales et garanties pour le modèle réduit de l'écoulement en milieux poreux fracturé introduit et analysé par V. Martin, J. Jaffré et J. Roberts, dans [3]. Ce modèle est approché par les éléments finis mixtes basées sur les espaces de Raviart-Thomas de plus bas degrés. Dans ce type d'approximation la vitesse est bien approchée, par contre la pression obtenue n'appartient pas à $H^1(\Omega)$. Afin d'améliorer l'approximation de la pression, et pour les besoins de développement d'estimation d'erreur *a posteriori* garantie, on utilise les techniques de reconstruction de la pression (Cf[5]). On obtient une estimation d'erreur optimâle et garantie, en majorant la norme de l'erreur globale par des indicateurs d'erreur entièrement calculable qui sont définis localement sur chaque éléments du maillage avec 1 comme constante multiplicative [4] , et en minorant l'erreur par ces indicateurs à une constante multiplicative près. Des résultats numériques montrent que les indicateurs trouvés représentent bien l'erreur.

ABSTRACT. The aim of this work is to develop optimal and guaranteed a posteriori error estimates for the model of flow in fractured porous medium introduced and analyzed by V. Martin, J.Jaffré and J. Roberts, in [3]. This model is approached by mixed finite elements based on Raviart-Thomas spaces of lowest degrees. In this type of discretization, the velocity is well approximated. In order to improve the pressure approximation, and to obtain a guaranteed error estimate, we consider a post-processing for the pressure ([5]). An optimal and guaranteed error estimate is obtained, by increasing the overall norm of the error by fully calculable error indicators that are locally defined on each mesh elements to ensure reliability (constante=1)[4], and lower bound up to a generic constant to ensure effectiveness. Numerical results show that the indicators used in this estimation represent well the error.

MOTS-CLÉS : Estimation d'erreur a posteriori, post-traitement, reconstruction, modèle réduit, milieu poreux fracturé

KEYWORDS : A posteriori error estimate, post-processing, reconstruction, reduced model, fractured porous media.

1. Position du problème et formulation faible

Dans ce travail, nous considérons la reconstruction de la pression à partir de la vitesse de Darcy en suivant la démarche de Vohralík ([5]) pour développer des estimations d'erreur *a posteriori* pour le modèle réduit de l'écoulement en milieux poreux fracturé donné dans [3] et défini par (pour $\xi = 1$)

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \nabla p_i \text{ dans } \Omega_i, & \text{div}\mathbf{u}_i = q_i \text{ dans } \Omega_i, \text{ pour } i = 1,2, \\ u_f = -K_{f,\tau} d \nabla_\tau p_f \text{ dans } \gamma, & \text{div}_\tau u_f = q_f + \sum_{i=1}^{2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i|\gamma} \text{ dans } \gamma, \\ \alpha_f p_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = \alpha_f p_f \text{ dans } \gamma, & \text{pour } i = 1,2, \\ p_i = \overline{p_i} \text{ sur } \Gamma_i, \text{ pour } i = 1,2, & p_f = \overline{p}_f \text{ sur } \partial\gamma, \end{array}\right. \tag{1}$$

où Ω_i pour $i = 1, 2$ sont deux ouverts polygonaux de $\mathbb{R}^2$ séparés par une fracture unidimensionnelle représentée par la droite γ, approximation d'un domaine Ω_f de largeur d. On note $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \gamma$, le bord de Ω_i privé de γ pour $i = 1, 2$. $\mathbf{K}_i$, p_i et $\mathbf{u}_i$ sont respectivement la conductivité hydraulique, la pression et la vitesse de Darcy dans Ω_i pour $i = 1, 2$. On suppose que K_i est un tenseur diagonal de termes diagonaux K_{i1} et K_{i2} avec $0 < c_{K_i} \leq K_{ij} \leq C_{K_i}$, pour $i, j = 1, 2$. p_f et u_f sont respectivement la pression et la vitesse de Darcy dans la fracture γ, $\bar{p}_i$ est la pression donnée sur le bord Γ_i, $\mathbf{n}_i$ le vecteur normal sortant de Ω_i, $i = 1, 2$, $K_{f,n}$ et $K_{f,\tau}$ sont respectivement la composante suivant la normale et la composante suivant la tangente de la conductivité hydraulique K_f dans la fracture, avec $0 < c_f \leq K_{fj} \leq C_f$ pour $j = n, \tau$, et $\alpha_f = \frac{2K_{f,n}}{d}$, et où div_τ et ∇_τ représentent le gradient et la divergence tangentiels respectifs, et les données aux limites $\bar{p}_i \in L^2(\Gamma_i)$, $p_f \in L^2(\partial\gamma)$.

Rappelons que $H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{q} \in (L^2(\Omega)^2 / \text{div}\mathbf{q} \in L^2(\Omega) \right\}$, où $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable. Une formulation mixte du problème (1) est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{trouver } (\mathbf{u}, p) \in W \times M \textit{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \beta(\mathbf{v}, p) = -L_d(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W, \\ \beta(\mathbf{u}, r) = L_q(r), \quad \forall r \in M, \end{array}\right. \tag{2}$$

où $M = \left\{ p = (p_1, p_2, p_f) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times L^2(\gamma) \right\}$ muni de la norme

$\|p\|_M^2 = \sum_{i=1}^{2} \|p_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|p_f\|_{0,\gamma}^2$, $W = \Big\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, v_f) \in H(\text{div}, \Omega_1) \times H(\text{div}, \Omega_2) \times H(\text{div}_\tau, \gamma) \,|\, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \in L^2(\gamma)\ , i = 1, 2 \Big\}$

muni de la norme énergie

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\text{div}}^2 &= \sum_{i=1}^{2} \left(\|\mathbf{K}_i^{-1/2} \mathbf{u}_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\text{div}\mathbf{u}_i\|_{0,\Omega_i}^2 \right) + \|(K_{f,\tau} d)^{-1/2} u_f\|_{0,\gamma}^2 \\ &\quad + \|\text{div}_\tau u_f\|_{0,\gamma}^2 + \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i\|_{0,\gamma}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Les formes bilinéaires $a : W \times W \to \mathbb{R}$ et $\beta : W \times M \to \mathbb{R}$ sont définies par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i + \int_\gamma (K_{f,\tau} d)^{-1} u_f v_f + \sum_{i=1}^{2} \int_\gamma (\frac{1}{\alpha_f} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i),$$

$$\beta(\mathbf{u},r)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\mathrm{div}\mathbf{u}_i\ r_i+\int_{\gamma}\mathrm{div}_\tau u_f\ r_f-\sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma}\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n}_i r_f,$$

et $L_q(r)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}q_i r_i+\int_{\gamma}q_f r_f, \qquad L_d(v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_i}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_i\overline{p}_i+\int_{\partial\gamma}v_f\cdot n_f\overline{p}_f.$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (2) se démontre, comme dans [3], en utilisant les techniques standard. Soient $\mathcal{T}_{ih}$ une triangulation de Ω_i, de pas h_{T_i} pour $i=1,2$, et $\mathcal{T}_{fh}$ une triangulation de γ de pas h_{T_f}, P_0 l'ensemble des fonctions polynômiales de degré 0, $P_0(\mathcal{T}_{ih})=\{v\,|\,v_{|T}\in P_0(T),\,\forall T\in\mathcal{T}_{ih}\},\ i=1,2$, et $\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_{fh}):=\{v_f\in\mathcal{C}^0(\gamma)\ |\ v_f|_{T_f}\in P_1(T_f),\forall T_f\in\mathcal{T}_{fh}\}$. L'espace de Raviart-Thomas de plus bas degré est donné par $RT_0(T)=\{q\in H(\mathrm{div},T)|q\in(P_0(T))^2\oplus xP_0(T)\}$ et on définit alors $RT_0(\mathcal{T}_{ih})=\{\mathbf{q}\in H(\mathrm{div},\Omega_i)|\mathbf{q}_{|T}\in RT_0(T),\,\forall T\in\mathcal{T}_{ih}\}$, $i=1,2$. Une approximation du problème (2) basée sur les éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} trouver\ \ (\mathbf{u}_h,p_h)\in W_h\times M_h\ tel\ que\\ a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)-\beta(\mathbf{v}_h,p_h)=-L_d(\mathbf{v}_h),\ \ \forall\mathbf{v}_h\in W_h,\\ \beta(\mathbf{u}_h,r_h)=L_q(r_h),\ \forall r_h\in M_h,\end{array}\right. \tag{4}$$

où $M_h=\{p=(p_1,p_2,p_f)\in P_0(\mathcal{T}_{1h})\times P_0(\mathcal{T}_{2h})\times P_0(\mathcal{T}_{fh})\}$, $W_h=\{\mathbf{v}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,v_f)\in RT_0(\mathcal{T}_{1h})\times RT_0(\mathcal{T}_{2h})\times\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_{fh})\ \}$. Les techniques standards (Cf. [3]) permettent de montrer que le problème (4) admet une solution unique.

2. Estimation d'erreur *a posteriori*

2.1. Post-traitement

Afin de donner une meilleurs approximation pour la pression, nous considèrons un post-traitement de p_h similaire à [5]. Soit $\bar{p}_h=(\bar{p}_{1h},\bar{p}_{2h},\bar{p}_{fh})$ une fonction polynomiale par morceaux de degré ≤ 2 telle que l'ont ait

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathbf{K}_i\nabla\bar{p}_{ih|T_i}=\mathbf{u}_{ih|T_i}, & \forall T_i\in\mathcal{T}_{ih},\ \ i=1,2,\\ \dfrac{1}{|T_i|}\displaystyle\int_{T_i}\bar{p}_{ih}=p_{ih|T_i}, & \forall T_i\in\mathcal{T}_{ih},\ \ i=1,2,\\ -K_{f\tau}d\nabla_\tau\bar{p}_{fh|T_f}=u_{fh|T_f}, & \forall T_f\in\mathcal{T}_{fh},\\ \dfrac{1}{|T_f|}\displaystyle\int_{T_f}\bar{p}_{fh}=p_{fh|T_f}, & \forall T_f\in\mathcal{T}_{fh}.\end{array}\right. \tag{5}$$

La fonction $\bar{p}_h$ ainsi construite n'est pas continue à travers les inter-éléments dans Ω_i, $i=1,2$ et γ. Nous lui associons une fonction continue qu'on note $\tilde{p}_h$ et que l'on calcule à l'aide de l'opérateur d'Oswald.

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{p}_{ih}(x)=\displaystyle\sum_k\phi_{ki}\tilde{p}_{ih}(a),\\ \tilde{p}_{ih}(a)=\dfrac{1}{|\mathcal{T}_{ia}|}\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_{ia}}\bar{p}_{ih}|_K(a),\ \ i=1,2,f,\end{array}\right. \tag{6}$$

où ϕ_{ki}, pour $i=1,2$, sont les fonctions de base de Lagrange associées à $P_1(\mathcal{T}_{ih})\cap C^0(\Omega_i)$, et $\mathcal{T}_{ia}$ est l'ensemble des éléments qui partagent le nœud a. Pour pouvoir tenir

compte de la condition de Dirichlet non-homogène, on utilise la modification de l'opérateur d'Oswald, qu'on notera $\tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i}$, introduite dans [2], et qui est telle que $\tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i}(a) = \tilde{p}_{ih}(a)$ pour les noeuds qui ne sont pas sur Γ_i, et $\tilde{p}_{ih|\Gamma_i}^{\Gamma_i} = \bar{p}_i$ au sens de la trace. Cette transformation permet d'avoir $(p_i - \tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i})|_{\Gamma_i} = 0$. Nous considérons aussi une construction analogue à (6) pour $\tilde{p}_{fh}$ notée $\tilde{p}_{fh}^{\partial\gamma}$, et on note $\tilde{p}_h^{\Gamma} := (\tilde{p}_{1h}^{\Gamma_1}, \tilde{p}_{2h}^{\Gamma_2}, \tilde{p}_{fh}^{\partial\gamma})$.

2.2. La borne supérieure de l'erreur

On définit maintenant la L^2-norme énergie pour les fonctions de $(L^2(\Omega_1))^2 \times (L^2(\Omega_2))^2 \times L^2(\gamma)$ par

$$|||\mathbf{w}|||_\star^2 = \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{K}_i^{-1/2}\mathbf{w_i}\|_{0,\Omega_i}^2 + \|(K_{f,\tau}d)^{-1/2}w_f\|_{0,\gamma}^2, \tag{7}$$

et pour $T_i \in \mathcal{T}_{ih}$, $i = 1, 2$ et $T_f \in \mathcal{T}_{fh}$, $|||\mathbf{w}_i|||_{\star,T_i} := \|\mathbf{K}_i^{-1/2}\mathbf{w_i}\|_{0,T_i}$ et $|||w_f|||_{\star,T_f} := \|(K_{f,\tau}d)^{-1/2}w_f\|_{0,T_f}$.
Nous définissons aussi la norme pour les fonctions scalaires

$$|||p|||_1^2 = \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{K}_i^{1/2}\nabla p_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|(K_{f,\tau}d)^{1/2}\nabla_\tau p_f\|_{0,\gamma}^2$$

Pour montrer une borne supérieure de l'erreur, nous considèrons aussi une formulation standard dont l'unique variable principale est la pression cf.[4].

Theorem 1. *Soient p la solution de la formulation standard, $(\mathbf{u}_h, p_h)$ la solution de (4) et $\tilde{p}_h$, $\tilde{p}_h^{\Gamma}$ définies dans §2.1 , alors*

$$|||p - \tilde{p}_h|||_1 \leq \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left\{ \sum_{T_i \in \mathcal{T}_{ih}} \xi_{R,T_i}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_i \in \mathcal{T}_{ih}} \eta_{R,T_i}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_f \in \mathcal{T}_{fh}} \xi_{RN,T_f}^2 \right\}^{1/2} \right\}$$
$$+ \left\{ \sum_{T_f \in \mathcal{T}_{fh}} \xi_{R,T_f}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_f \in \mathcal{T}_{fh}} \eta_{R,T_f}^2 \right\}^{1/2} + \eta_{os},$$

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\star \leq \sum_{i=1}^{2} \left\{ \sum_{T_i \in \mathcal{T}_{ih}} (\eta_{R,T_i} + \xi_{R,T_i})^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_f \in \mathcal{T}_{fh}} (\eta_{R,T_f} + \xi_{R,T_f} + \xi_{RN,T_f})^2 \right\}^{1/2}.$$

où $\xi_{R,T_i} = \dfrac{h_{T_i}}{\pi\sqrt{c_{K_i}}}\|q_i - div\mathbf{u}_{ih}\|_{0,T_i}$, $\xi_{R,T_f} = \dfrac{h_{T_f}}{\pi\sqrt{dc_{K_f}}}\|q_f + \sum_{i=1}^{2} \mathbf{u}_{ih}\cdot\mathbf{n}_i - div_\tau u_{fh}\|_{0,T_f}$, (8)

$$\xi_{RN,T_f} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1 + C_{\Omega_i}}{\sqrt{c_{K_i}}} + \frac{|\gamma|}{\pi\sqrt{dc_{K_f}}} \right) \|\alpha_f\tilde{p}_{fh} - \alpha_f\tilde{p}_{ih} + \mathbf{u}_{ih}\cdot\mathbf{n}_i\|_{0,T_f}, \tag{9}$$

$$\eta_{R,T_i} = |||\mathbf{u}_{ih} + \mathbf{K}_i\nabla(\tilde{p}_{ih})|||_{\star,T_i} \qquad \eta_{R,T_f} = |||u_{fh} + K_{f,\tau}d\nabla_\tau\tilde{p}_{fh})|||_{\star,T_f}. \tag{10}$$

$$\eta_{os} = \left\{ \frac{2C_{K_f}}{d} \left(\frac{C_\gamma}{\sqrt{dc_{K_f}}} + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{c_{K_i}}}(1 + \frac{\bar{h}_i}{\pi}) \right) + 2 \right\} (|||\tilde{p}_h - \tilde{p}_h^{\Gamma}|||_{1,D} + \|\tilde{p}_h - \tilde{p}_h^{\Gamma}\|_{0,D}),$$

où D est l'ensemble de tous les éléments qui ont une intersection avec Γ_i, $i = 1, 2$ ou $\partial\gamma$, $\bar{h}_i$ est le plus grand diamètre de ces éléments, et C_{Ω_i} est la constante de Poincaré dans Ω_i.

3. La borne inférieure de l'erreur

Dans cette section afin d'éviter une sur-estimation, nous donnons l'efficacité de l'estimation. Le symbole $\preceq$ désigne une majoration à une constante multiplicative prés.

Theorem 2. *Soient p la solution de la fomulation standard, $(\mathbf{u}_h, p_h)$ la solution de (4) et $\tilde{p}_h$, $\tilde{p}_h^\Gamma$ définies dans §2.1.*

$$\xi_{R,T_i} \preceq |||u - u_h|||_{\star,T_i} \tag{11}$$

$$\xi_{R,T_f} \preceq |||u - u_h|||_{\star,T_f} \tag{12}$$

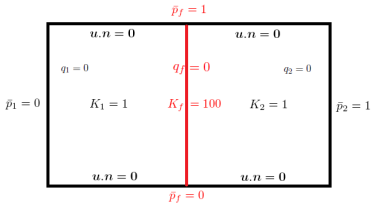
$$\xi_{RN,T_f} \preceq |||p - \tilde{p}_h|||_{1,T} + |||u - u_h|||_{div} \tag{13}$$

$$\eta_{R,T_i} \preceq |||p - \tilde{p}_h|||_{1,T_i} + |||u - u_h|||_{\star,T_i} \tag{14}$$

$$\eta_{R,T_f} \preceq |||p - \tilde{p}_h|||_{1,T_f} + |||u - u_h|||_{\star,T_f} \tag{15}$$

4. Résultats numériques

Soit $\Omega_1 =]-1, 0[\times]0, 1[$, $\Omega_2 =]0, 1[\times]0, 1[$, et $\gamma = \{0\}\times]0, 1[$, et (1) avec les données de la figure (a) et $d = 0.001$. Les calculs des tableaux ci-dessous (où les colonnes du premiers tableau représentent les moyennes des indicateurs, S dans le deuxième tableau est la somme de ces cinq moyennes) sont faits avec FreeFem++ [1]. Pour ite=1 jusqu'a 4 les pas de maillage sont de plus en plus petits (l'avant dernière colonne du deuxième tableau représente le nombre d'éléments du maillage). Ces calculs montrent, d'une part, que S converge vers zéro quand le pas du maillage tend vers zéro avec une vitesse de convergence de l'ordre de 1 (dernière colonne). D'autre part, l'indicateur η_{R,T_f} défini dans (10) est relativement plus petit que η_{R,T_i} dû au fait que u_{fh} est continue aux nœuds du maillage ce qui n'est pas le cas de $\mathbf{u}_{ih}$. Notons enfin que dans ce cas test le terme d'oscillations est nul puisque, les données au bord étant constantes, les deux interpolées $\tilde{p}_h$ et $\tilde{p}_h^\Gamma$ coïncident.



(a) Données du problème (Data of the problem)

ite	$\sum_{i=1}^{2} \xi_{R,T_i}$	ξ_{RTf}	$\xi_{RN,Tf}$	$\sum_{i=1}^{2} \eta_{R,T_i}$	η_{R,T_f}
1	2.29654e-019	2.66416e-018	2.64798e-009	0.00162045	3.04204e-005
2	6.14099e-020	4.75136e-019	3.40311e-010	0.000323719	6.02028e-006
3	3.12636e-020	1.73136e-019	9.49005e-011	0.000122519	2.27921e-006
4	1.68428e-020	8.44171e-020	3.7148e-011	6.08094e-005	1.13593e-006

ite	S	nbrE	Ordre
1	0.00165087	200	-
2	0.00032974	800	1.1
3	0.000124798	1800	1.1
4	6.19454e-005	3200	1.2

5. Bibliographie

[1] HECHT F., PIRONNEAU O., MORICE J. : "*FreeFEM++*", Third Edition, v3.20, www.freefem.org, 2013.

[2] JIRÁNEK P., STRAKOŠ Z., VOHRALÍK, M. "*A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers*". SIAM J. Sci. Comput. 32, 3 (2010), 1567-1590.

[3] MARTIN V., JAFFRÉ J., ROBERTS J. E. :"*Modeling fractures as barriers and interfaces for flow in porous media*", SIAM J. Sci. Comput.,26(5) :1667-1691, 2005.

[4] MGHAZLI Z., NAJI I. :"*Analyse a posteriori d'erreur par reconstruction pour un modèle d'écoulement dans un milieu poreux fracturé* ", à paraître dans, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser, I (2016)

[5] VOHRALÍK M. : "*Unified primal formulation-based a priori and a posteriori error analysis of mixed finite element methods*", Math. Comp., 79 (2010), pp. 2001-2032.

Statistical inference of a parallel system

under the ARI models

Soumaya Ghnimi* — Soufiane Gasmi **

* Faculty of Sciences of Tunis
University of Tunis El Manar
Tunis
Tunisia
soumaya_ghnimi@yahoo.fr

** The National Higher School of Engineering of Tunis
University of Tunis
5 Avenue Taha Hussein Montfleury, 1008 Tunis
Tunisia
soufiane.kasmi3@gmail.com

ABSTRACT. This paper presents a new algorithm for simulating the failures process of a parallel system subject to an imperfect repair under the Arithmetic Reduction of Intensity models which are generally used to model maintenance policy of systems subject to a random failure and undergoing imperfect repairs. The purpose of this paper is to generate a simulated failure data of such system in order to forecast the behavior of the failure process using the Exponentiated Weibull distribution.

RÉSUMÉ. *A définir par la commande* `\resume{...}`

KEYWORDS : Imperfect maintenance, simulation, Repairable systems, Arithmetic Reduction Intensity, Exponentiated Weibull distribution.

MOTS-CLÉS : *A définir par la commande* `\motscles{...}`

1. Introduction

The implementation of maintenance strategies is crucial in industries that face the obligation to ensure maximum availability of their production equipment. A maintenance strategy is defined as the decision rule that establishes the sequence of actions to take depending on system status. Several maintenance policies have been proposed in the literature. They involve different types of preventive and corrective procedures and several levels of intervention (as good as new, imperfect or as bad as old).
In fact, several models and methodologies are available to deal with imperfect repair for repairable systems. Among the first studies dealing with the imperfect maintenance concept was the model of Brown and Proschan [1]. In this system, the state after repair is As Good As New (AGAN) with probability p and As Bad As Old (ABAO) with probability $1 - p$. Initial attempts at modeling imperfect repair defined two extremities of imperfect repair which are perfect repair (PR) and minimal repair (MR). These two extremities were effectively extended by Kijima and Sumita [2], who developed the generalized renewal theory in the context of imperfect repair. Moreover, very important class of models proposed by Kijima [3] discussed the concept of virtual age models and applied it to repairable systems. Since this pioneering work, many of imperfect repair modeling literature have been built upon Kijima's models. An interesting variation recently proposed by Gasmi et al. [4] considers three possible effects of maintenance. Doyen and Gaudoin [5][5] discussed the use of the virtual age in the case of a classical competing risk model. Malik [6] has assumed that maintenance acts depending on the period between last maintenances. Dorado et al. [7] have developed a very general model taking into account a large number of various maintenance effects. Wang and Pham [8] have supposed that the effect of maintenance is to reduce the virtual age of a fixed quantity.
Interesting model was proposed by Doyen and Gaudoin [5], they describe two new classes of imperfect repair models. In the first class, which is called ARA_m (Arithmetic Reduction of Age), the repair efficiency is expressed by a reduction in the systems of virtual age. In the second class which is ARI_m (Arithmetic Reduction of Intensity), the repair efficiency is characterized by the reduction of the intensity function of the failure process. These models are defined by their memory of order m, where m refers, at each time, to the maximum number of previous failure times involved in the calculation of the intensity function. These two models use the initial intensity type Power Law Process (PLP) to estimate the reliability parameters and the efficiency parameter.

Our paper is based on the work of Doyen and Gaudoin (2004). It focuses on the case of ARI_m model. We look for a simulation of a failure process of a parallel system subject to an imperfect repair under an ARI_m for different value of efficiency parameter based on the Exponentiated Weibull distribution.

This paper will be organized as follows. Section 2 gives a simple description of the Exponentiated Weibull distribution. The reduction of intensity models are presented ARI_m in Section 3. In Section 4, our proposed algorithm generates the simulated data of the failures process. Finally, Section 5 provides some final conclusions and directions for future work.

To test the efficiency of the model and compare the behavior of the different estimators, a work of simulation is necessary. For that purpose, statistical data must be generated by obeying a set of necessary conditions for the validation of this part of simulation. Then, we use the different techniques used to generate these data.

2. Exponentiated Weibull distribution

Consider a system consisting of η (number of components) components parallel, identical and independent components such as the failure time distribution of the i^{th} components governed by a Weibull distribution with shape parameter α and scale parameter θ.

$$F_W(t;\alpha,\theta) = 1 - \exp(-\alpha t^{\theta}), \;\; t > 0, \quad \alpha, \theta > 0 \qquad [1]$$

It is easy to see that the failure times of distribution of the whole system (parallel system) can be given by:

$$F(t;\alpha,\theta,\eta) = \prod_{i=1}^{\eta} F_W(t;\alpha,\theta) = [1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta} \qquad [2]$$

This equation represents the Exponentiated Weibull distribution (EWD) which was proposed by Mudholkar and Srivastava [9] and studied first by Mudholkar et al. [10] and further by Mudholkar and Hutson [11][15][17]. Ghnimi and Gasmi [12] have studied the goodness of fits of EWD and they compared it with different sub-models derived therefrom.

The cumulative distribution function (CDF), the reliability function, the probability density function (PDF) and the failure intensity function (failure rate) of the Exponentiated Weibull are respectively given by:

$$F(t;\alpha,\theta,\eta) = [1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta}, \;\; t > 0, \quad \alpha, \theta, \eta > 0, \qquad [3]$$

$$R(t;\alpha,\theta,\eta) = 1 - [1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta}, \qquad [4]$$

$$f(t;\alpha,\theta,\eta) = \eta\alpha\theta t^{\theta-1} \exp(-\alpha t^{\theta})[1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta-1}, \quad t > 0. \qquad [5]$$

$$\lambda(t;\alpha,\theta,\eta) = \frac{\eta\alpha\theta t^{\theta-1} \exp(-\alpha t^{\theta})[1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta-1}}{1 - [1 - \exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta}}. \qquad [6]$$

The $EWD(\alpha,\theta,\eta)$ generalizes the following distributions: (1) exponential distribution $ED(\alpha)$ by setting $\theta = 1, \eta = 1$, (2) Rayleigh distribution RD(α) by setting $\theta = 2, \eta = 1$, (3) generalized exponential distribution GED (α, η) by setting $\theta = 1$ and (4) Weibull distribution $WD(\alpha,\theta)$ by setting $\eta = 1$.

3. Arithmetic Reduction of Intensity models

Throughout this paper, the following assumptions are performed:

N_t denotes the number of observed failures up to time t, T_i corresponds to the failures time up to the i^{th}.

We also suppose that a repair action is taken after each failure (repair times are negligible). So, the intensity of failure at time t depends only on the present moment of the occurred failures numbers and the instants of these failures which can be written in this form:

$$\lambda_t = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} P(t < T_{n+1} \leq t + dt \backslash N_t = n, T_1 = t_1, ..., T_n = t_n) \qquad [7]$$

We note that before the first failure, the failure intensity which is called the initial intensity represents a deterministic, continuous and strictly increasing function of time t, it is noted

by $\lambda(t)$. Under this model, each repair reduces the intensity of the system.
The repair efficiency is measured by a parameter noted by ρ with $0 \leq \rho \leq 1$. We have the following cases:

– $0 < \rho < 1$: Imperfect repair.

– $\rho = 1$: Optimal repair (AGAN)

– $\rho = 0$: Minimal repair (ABAO).

The first idea of arithmetic reduction of intensity models was proposed by Chan and Shaw [13]. They considered that the effect of maintenance is to reduce the failure intensity by reducing the failure rate by a quantity that Depends on its value just before the failure.

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho\lambda_{T_i^-} \quad [8]$$

Where $\rho \in [0, 1]$ is the efficiency of the i^{th} maintenance which is considered constant. And $\lambda_{T_i^+}$ and $\lambda_{T_i^-}$ represents the value of the failure rate after and before the maintenance action.
The failure intensity of the Chan-Shaw model (CS) is of the following form:

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_t} [1-\rho]^j \lambda(T_{N_t - j}) \quad [9]$$

Doyen and Gaudoin [5] have generalized the model of Chan and Shaw considering that the effect of the i^{th} maintenance is to reduce not the intensity of failure but its increase since the last maintenance.

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho(\lambda_{T_i^-} - \lambda_{T_{i-1}^+}) \quad [10]$$

The failure intensity of the model is of the following form:

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho\lambda(T_{N_t}) \quad [11]$$

Doyen et Gaudoin [5] have also proposed a more general model known as the arithmetic reduction model of the (ARI_m) intensity.
The Arithmetic Reduction of Intensity model with memory m (ARI_m) is defined by the failure intensity:

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{min(m-1, N_t-1)} [1-\rho]^j \lambda(T_{N_t - j}) \quad [12]$$

Also, the ARI_m model has a minimal wear intensity function which is defined by the following expression:

$$\lambda_{min} = (1-\rho)^m \lambda_t \quad [13]$$

4. Data simulation under ARI models

From an initial time $T_0 = 0$ the system undergoes failure at successive times $T_1, T_2, ..., T_n$. The reliability function between two consecutive failure times can be expressed as follows:

$$\forall i \geq 1,\ \forall x > 0,\ R_i(x) = P(X_i > x; T_1, ..., T_{i-1}) = exp\left\{ - \int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+x} \lambda_t dt \right\} \quad [14]$$

In the rest of this paper we will use the following initial intensity function of the EW distribution:

$$\lambda(t) = \frac{\eta\alpha\theta t^{\theta-1}\exp(-\alpha t^{\theta})[1-\exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta-1}}{1-[1-\exp(-\alpha t^{\theta})]^{\eta}} \quad [15]$$

The EWD distribution doesn't have a closed form of reliability function under ARI models. Therefore we can not generate automatically the failure process using the method of the inversion of the function of distribution [14][16].
To generate the failure process, we proceed as follows:
For $i = 1$ we have:

$$R_1(T_1) = \exp\left\{-\int_0^{T_1}\lambda(t)dt\right\} \quad [16]$$

Thus, the first failure time can be determined as follows:

$$T_1 = \left(\frac{-\log(1-U^{\frac{1}{\eta}})}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad [17]$$

Where U is a uniformly distributed random variable on the interval [0,1].
For $i \geq 2$ we have:

$$R_i(x) = \exp\left\{-\int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+x}\lambda_t dt\right\}, \qquad \forall x > 0 \quad [18]$$

where

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho\sum_{j=0}^{min(m-1,N_t-1)}[1-\rho]^j\lambda(T_{N_t-j}) \quad [19]$$

Then

$$\begin{aligned} R_i(x) &= \exp\left\{-\int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+x}\lambda(t)dt - \rho x\sum_{j=0}^{min(m-1,i-2)}[1-\rho]^j\lambda(T_{i-1-j})\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+x}\lambda(t)dt\right\}\times\exp\left\{-\rho x\sum_{j=0}^{min(m-1,i-2)}[1-\rho]^j\lambda(T_{i-1-j})\right\} \end{aligned} \quad [20]$$

And since we have $\lambda(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\log(R(x))$, it is easy to obtain the following expression of reliability function:

$$\begin{aligned} R_i(x) &= \exp\left[\log\frac{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1}+x)^{\theta}\}]^{\eta}}{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1})^{\theta}\}]^{\eta}}\right] \\ &\quad\times\exp\left\{-\rho x\sum_{j=0}^{min(m-1,i-2)}[1-\rho]^j\lambda(T_{i-1-j})\right\} \end{aligned} \quad [21]$$

$$R_i(x) = \frac{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1}+x)^{\theta}\}]^{\eta}}{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1})^{\theta}\}]^{\eta}}$$

$$\times \exp\left\{-\rho x \sum_{j=0}^{min(m-1,i-2)} [1-\rho]^j \lambda(T_{i-1-j})\right\} \quad [22]$$

Hence, to generate the ith failure times T_i resulting from the imperfect repairs following the model ARI_m, we must solve the following nonlinear equation:

$$1-U-\frac{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1}+x)^\theta\}]^\eta}{1-[1-\exp\{-\alpha(T_{i-1})^\theta\}]^\eta}\times\exp\left\{-\rho x \sum_{j=0}^{min(m-1,i-2)} [1-\rho]^j \lambda(T_{i-1-j})\right\}=0 \quad [23]$$

One can notice in the above expression that the time to failure x to be determined is a function of the set of all failure times occurring before T_i.
So, we propose a simulation algorithm which gives the possibility to generate a failure time series resulting from an ARI_m imperfect repairs.
The steps of this algorithm are presented as follows:

1) Setting the four parameters α , θ , η and ρ.

2) Generating a random number U and calculating a first failure time T_1 .

3) Solving the equation (23) by using a nonlinear method (Newton Raphson method, Dichotomie method,...) in order to obtain the time to fail $x \implies T_2 = T_1 + x$

4) Repeating steps 2 and 3 in order to get $T_i = T_{i-1} + x \;\; i = 3, ..., n$

By setting the four parameters α , θ , η and ρ. as follows: $\alpha = 1$, $\theta = 3$, $\eta = 3$ and $\rho = 0.3$. or 0.8 and $m = 2$ in the simulation algorithm, we obtain simulation data to generate the failure times values $T_{i\in 1,2,....,10}$ illustrated in Table 1.

Table 1. *THE* 10 *FIRST SIMULATED FAILURES TIME UNDER* ARI_2.

Failure times	$\rho = 0.3$	$\rho = 0.8$
T_1	0.5671	0.5671
T_2	1.1559	1.2404
T_3	1.3740	1.3695
T_4	1.4758	1.6311
T_5	1.5871	1.7997
T_6	1.7472	1.8876
T_7	1.9140	2.1343
T_8	2.0365	2.2512
T_9	2.1344	2.6419
T_{10}	2.2297	2.6929

The data in table 1 forms the simulation of the 10 first failure times of a system composed of 3 $(\eta = 3)$ components installed in parallel.

Fig. 1 and Fig. 2 represent the failure intensity function for the ARI_2 model, minimal wear intensity and initial intensity of the simulated data by setting $\alpha = 1$, $\theta = 3$ and $\eta = 3$ for different values of ρ , where $\rho = 0.3$ for Fig. 1 and $\rho = 0.8$ for Fig. 2.
Fig. 1 shows that the imperfect repair according to ARI_2 is quite close to the minimal repair $\rho = 0.3$. Failure times are quite close and more frequent on a finite time span, whereas the decay of the failure intensity is minimum in comparison with imperfect re-

pair close to a perfect repair with an efficiency factor $\rho = 0.8$ which is clear in Fig. 2 in which the offset between two successive failure times can be observed.

The method of the inversion of the function of distribution is an efficient method to simulate random variables following respectively the exponential law and the law of Weibull for the multiplicative model. However, this method presents limits in the case of the simulation of the random variables of the law of the Weibull Exponentiated according to the imperfect repairs ARI models. In fact, the difficulty consists in realizing the inversion of the function of distribution in an explicit way. For this case, it is impossible to apply this method. So we have to use a numerical technique such as a Newton-Raphson method or a Dichotomie method [14].

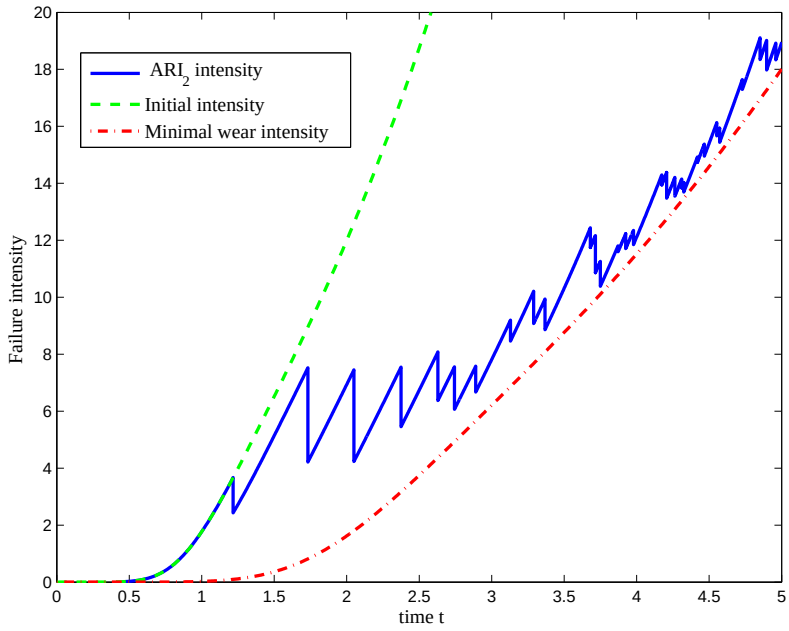


Figure 1. **The failure intensity function for the ARI_2 model, minimal wear intensity and initial intensity with $\alpha = 1, \theta = 3, \eta = 3$ and $\rho = 0.3$**

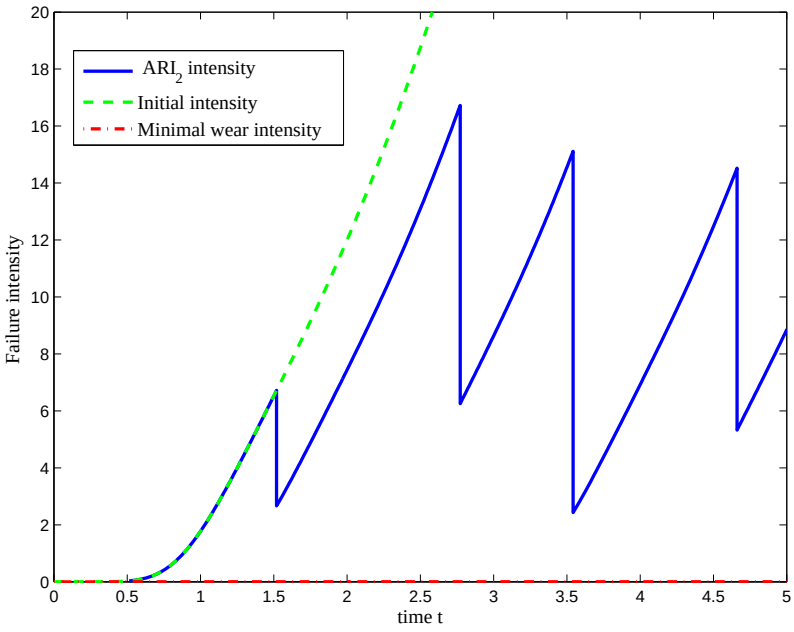


Figure 2. **The failure intensity function for the ARI_2 model, minimal wear intensity and initial intensity with $\alpha = 1, \theta = 3, \eta = 3$ and $\rho = 0.8$**

5. Conclusion

In this paper, we have generated a simulation failure data of a repairable parallel system with η components. The imperfect repair is studied according to the Arithmetic Reduction of Intensity models (ARI_m). As further researches show, we can use ARI_m models in order to estimate parameters for serial parallel system.

6. References

[1] M. BROWN , F. PROSHAN, "Imperfect Maintenance", *in J. Crowley and R.Johnson ,eds, Survival Analysis*, vol. 2, num. 179-188, 1982.

[2] M. KIJIMA , U. SUMITA , "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Nonnegative Markovian Increments", *Journal of Applied Probability*, vol. 23(1), num. 71-88, 1986.

[3] M. KIJIMA, "Some results for repairable systems with general repair", *Journal of Applied Probability*, vol. 26 (1),num. 89-102, 1989.

[4] S. GASMI, CE. LOVE, W. KAHLE, "A general repair, proportional hazards framework to model complex repairable systems", *IEEE Transaction on Reliability*, vol. 52,num. 26-32, 2003.

[5] L. DOYEN, O. GAUDOIN, "Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 84 (1),num. 45-56, 2004.

[6] M. MALIK, "Reliable preventive maintenance scheduling", *AIIE Transactions*, vol. 11 (3),num. 221- 228, 1979.

[7] C. DORADO, M. HOLLANDER, J. SETHURAMAN, "Nonparametric estimation for a general repair model", *The Annals of Statistics*, vol. 25 (3),num. 1140-1160, 1997.

[8] H. WANG, H. PHAM, "Optimal maintenance policies for several imperfect repair models", *Internatinal Journal of Systems Science*, vol. 27(6),num. 543-549, 1996.

[9] G. S. MUDHOLKAR, D. K. SRIVASTAVA, "Exponentiated Weibull family for analyzing bath-tub failure rate data", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 42 (2),num. 299-302, 1993.

[10] G. S. MUDHOLKAR, D. K. SRIVASTAVA, M. FRIEMER, "The exponentiated weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data", *Technometrics*, vol. 37 (4),num. 436-445, 1995.

[11] G. S. MUDHOLKAR, D. HUTSON, "The exponentiated weibull family: some properties and a flood data application", *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 25 (12),num. 3059-3083, 1996.

[12] S. GHNIMI, S. GASMI, "Parameter Estimations for Some Modifications of the Weibull Distribution", *Open Journal of Statistics*, vol. 4,num. 597-610, 2014.

[13] J. CHAN, L. SHAW, "Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 42 (4),num. 566-571, 1993.

[14] A M. SARHAN , M. ZAINDIN, "Modified Weibull distribution", *Applied Sciences*, vol. 11 ,num. 123-136, 2009.

[15] A.M SARHAN , J. APALOO , "Exponentiated modified Weibull extension distribution", *Elsevier- Reliability Engineering and System Safety*, vol. 112, num. 137-144, 2013.

[16] S. GASMI , M. BERZIG , "Parameters estimation of the modified Weibull distribution based on type I censored samples", *Applied Mathematical Sciences*, vol. 59 (5), num. 2899-2917, 2011.

[17] S. NADARAJAH , G M. CORDEIRO , E M. M. ORTEGA , "The exponentiatedWeibull distribution: a survey", *Springer, Stat Papers*, vol. 54, num. 839-877, 2013.

Almost Periodic Solution for Stepanov-Orlicz Almost Periodic Differential Equations

Fatiha BOULAHIA[1], Yousra DJABRI[2] and Fazia BEDOUHENE[3]

[1] Department of Mathematics, University A.Mira of Bejaia
Algeria
E-Mail: boulahia_faiha@yahoo.fr
[2,3] Department of Mathematics, University Mouloud Mammeri of Tizi-ouzou
Algeria
E-Mails: yousra_djabri@yahoo.com, fbedouhene@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail on s'intéresse à de nouvelles caractérisations des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques $S^{\phi}AP$ introduites par Hillmann dans [9]. Ces fonctions sont plus générales et compliquées que celles de Stepanov presque périodiques [1]. En utilisant leurs propriétés, nous établissons un théorème d'existence et d'unicité de solutions "mild" Bohr presque périodiques d'une classe d'équations d'évolution semi-linéaires,

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ \ t \in R \qquad [1]$$

où l'opérateur $A : D(A) \subset X \mapsto X$ est le générateur infinitésimal exponentiellement stable d'un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et $f : R \times X \mapsto X$ une fonction paramétrique Stepanov-Orlicz presque périodique sur un espace de Banach X.
Les résultats obtenus étendent ceux connus dans le cas des équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques (voir [1],[10],[13]).

ABSTRACT. This work is concerned with new characterizations of the Stepanov-Orlicz almost periodic functions $S^{\phi}AP$ introduced by Hillmann in [9]. These functions are more general and complicated than those of Stepanov almost periodic(see eg [1]). Using their properties, we establish a theorem of existence and uniqueness for Bohr almost periodic mild solutions to semi-linear evolution equations in Banach spaces

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ \ t \in R \qquad [2]$$

where the operator $A : D(A) \subset X \mapsto X$ is the infinitesimal generator of an exponentially stable C_0-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ and $f : R \times X \mapsto X$ is a Stepanov-Orlicz almost periodic parametric function on a Banach space X.
Our main results extend the known results in the case of Stepanov almost periodic functions.

MOTS-CLÉS : Fonctions Bohr et Stepanov presque périodiques, fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques, équations d'evolution semi linéaires.

KEYWORDS : Bohr and Stepanov almost periodicity, Stepanov-Orlicz almost periodicity, Semi-linear evolution equations.

1. Introduction

In the last several decades, the study of the existence of periodic solutions, almost periodic solutions, pseudo almost periodic, Stepanov almost periodic solutions, Stepanov pseudo almost periodic solutions are the most attractive topics in qualitative theories of differential equations because of their significance and applications in physics, mechanics and mathematical biology and has been of great interest for many authors (see [1, 14, 7, 8, 11]).

The direct impetus of this paper comes from two sources. The first one is a paper by Andres and Pennequin [2], in which the authors studied the nonexistence of purely Stepanov-almost periodic solutions of ordinary differential equations in uniformly convex Banach spaces. The second source is a paper by Diagana and Zitane [8] in which a new class of Stepanov-Musielak-Orlicz-pseudo-almost periodic functions was introduced and studied.

Motivated by the above works, and because Orlicz spaces are suitable for defining almost periodicity, we set two main objectives. First, we revisit the concept of Stepanov-Orlicz almost periodicity introduced by Hillmann [9], by giving two characterizations of such concept (via the Bochner transform and Danilov's definition [4]). Various properties of these new functions are investigated including some composition results. Second, in order to illustrate our main results, we provide some applications to a semilinear evolution equation.

2. Definition and Preliminaries

Let $(X, \|.\|)$ be a Banach space. We denote by $\mathcal{C}(R, X)$ the space of continuous functions from R into X and by $\mathcal{C}_b(R, X)$ its subspace of bounded functions. Throughout the rest of the paper we fix $p, \ 1 \leq p < \infty$. We denote by $L^p_{loc}(R, X)$ the space of all functions from R into X, which are locally p-integrable in Lebesgue sense.

Bohr and Stepanov almost periodicity [1] Let us start with the definition of Bohr almost periodicity : A continuous function $f : R \to X$ is said to be *almost periodic in the Bohr sense* if for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive number $l(\varepsilon)$ such that any interval of length $l(\varepsilon)$ contains at least an ε-number τ for which

$$\|f_\tau - f\|_\infty < \varepsilon. \qquad [3]$$

We denote by $AP(R, X)$ the space of all X-valued almost periodic functions.
A function $f \in \mathcal{C}_b(R \times X, X)$ is called Bohr almost periodic in $t \in X$ uniformly in

$y \in X$ if for each $\varepsilon > 0$ and any compact $K \subset X$ there exists $l(\varepsilon, K)$ such that every interval of length $l(\varepsilon)$ contains a number τ with the property that

$$\|f(.+\tau, y) - f(., y)\|_{\infty} < \varepsilon \ \ for \ \ each \ \ y \in K.$$

The collection of those functions is denoted by $AP_K(R \times X, X)$. If we replace the supremum norm in [3] by the Stepanov norm we obtain the concept of almost periodicity in the Stepanov sense, where the Stepanov norm of a function $f \in L^p_{loc}(R, X)$ is defined by

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t \in R} \left(\int_t^{t+1} \|f(s)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

The set of such functions is denoted by $S^pAP(R, X)$. By a result of Amerio and Prouse [1], the X-almost periodicity of f in the Stepanov sense is equivalent to the $L^p([0,1], X)$-almost periodicity of its Bochner transform f^b :

$$f \in S^pAP(X) \ \ if, \ and \ \ only \ \ if, \ \ f^b \in AP(L^p([0,1]; X)),$$

where the *Bochner transform* of a measurable functions $f : R \to X$ is defined as follows

$$f^b : \begin{cases} R \to X^{[0,1]} \\ t \mapsto f^b(t) = f(t + .). \end{cases}$$

We have $AP(R, X) \subset S^pAP(R, X)$. Equality holds under uniform continuity condition.

Orlicz spaces [3] : Let ϕ be an Orlicz function, i.e. a symmetric, convex and continuous function $\phi : R \to R^+$, satisfying $\phi(0) = 0$ and $\phi(u) > 0$ if $u \neq 0$.

We denote by $E^{\phi}_{loc}(R, X)$ (resp. $L^{\phi}_{loc}(R, X)$) the class (resp. the space) of all measurable functions such that for each compact $U \subset R$ and all $\alpha \geq 1$, (resp. there exists $\alpha_U \geq 1$),

$$\int_U \phi(\alpha \|f(s)\|) \, d\mu < \infty.$$

When $U = [0,1]$, we get the classical Orlicz class $E^{\phi}([0,1], X)$ (resp. the Orlicz space $L^{\phi}([0,1], X)$).

For $f \in L^{\phi}_{loc}(R, X)$, we define the following modular :

$$\rho_{S^{\phi}}(f) = \sup_{t \in R} \int_t^{t+1} \phi(\|f(s)\|) \, ds.$$

The associated modular space, called **Stepanov-Orlicz** space, is

$$S^{\phi}(R, X) = \left\{ f \in L^{\phi}_{loc}(R, X), \ \ \rho_{S^{\phi}}(\alpha f) < +\infty \ \ for \ \ some \ \ \alpha > 0 \right\}.$$

This space is naturally endowed with the Luxemburg norm :

$$\|f\|_{S^\phi} = \inf\left\{k>0; \rho_{S^\phi}\left(\frac{f}{k}\right)\leq 1\right\}.$$

Note that the space $\left(S^\phi(R,X), \|.\|_{S^\phi}\right)$ is a Banach space. An important property of functions in $E^\phi([0,\,1],X)$ or $E^\phi_{loc}(R,\,X)$ has been proposed by Kufner et al. [12, Theorem 3.15.5]. They show that any f in $E^\phi([0,\,1],X)$ is **ϕ-mean continuous**, namely, for every $\varepsilon>0$ there exists $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ such that

$$\|f_h - f\|_\phi < \varepsilon$$

for $h\in R$ with $|h|<\delta$. This property plays a significant role in the demonstration.

3. Main Result

Hillmann [9] has proposed a natural definition of Stepanov-Orlicz almost periodicity by considering such property in $L^\phi_{loc}(R,\,X)$. Unfortunately, with his definition, we need a Δ_2 type condition to get equivalence between various extensions of Stepanov-Orlicz almost periodicity (Bochner's criterion, polynomial approximations). This is due mainly to the fact that functions in $L^\phi_{loc}(R,\,X)$ are not necessarily ϕ-mean continuous. So, we say that a function $f\in E^\phi_{loc}(R,X)$ is *Stepanov-Orlicz almost periodic* if for each $\varepsilon>0$, the set

$$S^\phi T(f,\,\varepsilon) := \{\tau\in R,\, \|f_\tau - f\|_{S^\phi}<\varepsilon\}. \qquad [4]$$

is relatively dense on R. The space of such functions is denoted by $S^\phi AP(R,X)$. This space endowed with the Luxemburg norm is a Banach space. Thanks to the ϕ-mean continuity, we can show that $f^b\in\mathcal{C}\left(R,\,E^\phi([0,\,1];\,X)\right)$ for any $f\in S^\phi AP(R,\,X)$, and that

$$f\in S^\phi AP(R,X)\ \ if,\ and\ \ only\ \ if,\ \ f^b\in AP\left(R;\left(E^\phi([0,1];X),\|.\|_\phi\right)\right).$$

Clearly, our definition and that of Hillmann coincides under a Δ_2 type condition on ϕ. Now, we need to recall Danilov's definition of Stepanov almost periodicity. Let $\mathcal{S}_D(R,\,X)$ be the space of Lebesgue-measurable functions $f:R\longrightarrow X$ such that for any $\varepsilon,\,\delta>0$, there exists $l(\varepsilon,\,\delta)>0$ such that any interval of length $l(\varepsilon,\,\delta)$ contains at least a real number τ for which

$$\sup_{\xi\in R}\mu\left(\{t\in[\xi,\,\xi+1],\,\|f(t+\tau)-f(t)\|\geq\varepsilon\}\right)<\delta.$$

For $f\in S^\phi(R,\,X)$, we define the following quantity

$$\mathrm{A}_{S^{\phi}}(f)=\lim_{\delta\to 0^{+}}\inf\left\{k>0\ \sup_{A\subset R\overline{\mu}_{S}(A)\leq\delta}\sup_{t\in R}\int_{t}^{t+1}\phi\left(\frac{\|f(t)\,\chi_{A}(t)\|}{k}\right)dt\leq 1\right\}$$

In other words, $\mathrm{A}_{S^{\phi}}(f)=\lim_{\delta\to 0^{+}}\sup_{A\subset R\overline{\mu}_{S}(A)\leq\delta}\|f\chi_{A}\|_{S^{\phi}}$.

where $\chi_{A}(.)$ denotes the characteristic function of a subset $A\subset R$ and $\overline{\mu}_{S}$ the set function defined by :

$$\overline{\mu}_{S}(A)=\sup_{u\in R}\mu(A\cap[u,\,u+1]).$$

where μ denotes the Lebesgue measure on R and A a subset Lebesgue-measurable of R.

Let $M_{\phi}(R,\,X)$ be the class of the functions in $S^{\phi}(R,\,X)$ such that $\mathcal{A}_{S^{\phi}}(f)=0$. We prove that

$$S^{\phi}AP(R,\,X)=\mathcal{S}_{D}(R,\,X)\cap M_{\phi}(R,\,X).$$

Notice that the class $\mathcal{S}_{D}(R,X)$ enjoys a considerable compactness property. Indeed, if $f\in\mathcal{S}_{D}(R,X)$, then for all $\varepsilon>0$, there exist a measurable subset T_{ε} of R and a compact subset K_{ε} of X ; such that $\sup_{\xi\in R}\mu\left([\xi,\,\xi+1]\bigcap T_{\varepsilon}^{c}\right)<\varepsilon$ and $f(t)\in K_{\varepsilon};\forall t\in T_{\varepsilon}$. This property allows us to get the following superposition theorem.

Theorem : (**Superposition theorem in S^{ϕ}AP**)
Let $f\in S^{\phi}AP_{K}(R\times X,\,Y)$. Furthermore assume that f is Lipschitzian in $u\in X$ uniformly in $t\in R$, that is there exists $L>0$ such such that for all $u,v\in X$

$$\sup_{t\in R}\|f(t,u)-f(t,v)\|\leq L\|u-v\|$$

Then, for every $x\in S^{\phi}AP(R,\,X)$, we have $f(.,\,x(.))\in S^{\phi}AP(R,\,Y)$.

Now, we consider the semilinear differential equation,

$$u'(t)=Au(t)+f(t,u(t)),\ t\in R \qquad [5]$$

where $A:Dom(A)\subset X\to$ is a densely defined closed (possibly unbounded) linear operator, and $f:R\times X\to X$, is a measurable function.

We first list the following basic assumption :

(H1) The operator A is the infinitesimal generator of an exponentially stable C_{0}-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$, that is, there exist constants $M>0$, $\omega>0$ such that

$$\|T(t)\|\leq M\exp^{-\omega t},\ \ forall\ \ t\geq 0.$$

(H2) The function $f\in S^{\phi}AP_{K}(R\times X,\,X)$. Moreover, assume that f satisfy the Lipschitz condition.

Theorem Let the assumptions **(H1)**, **(H2)** be fulfilled, and assume furthermore that f is S^{ϕ}-bounded and $LM\frac{e^{\omega}}{1-e^{-\omega}} < 1$. Then the Equation [5] has a unique almost periodic mild solution.

4. Bibliographie

[1] L. Amerio and G. Prouse, « *Almost Periodic Functions and Functional Equations* », Van Nostrand, New York, 1971.

[2] J. Andres and D. Pennequin, « *On the non existence of purely Stepanov almost-periodic solutions of ordinary differential equations* », American Mathematical Society. 140 (08), 2012.

[3] S. Chen, « *Geometry of Orlicz spaces* », Dissertationes Math. No 356 1996.

[4] L.I. Danilov,« *Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps.* », Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1997.

[5] L.I. Danilov, « *On uniform approximation of functions wich are almost periodic by Stepanov* », Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 42(05), 1998.

[6] T. Diagana, G.M. N'Guérékata, « *Stepanov-Like Pseudo-Almost automorphic Functions and applications to some semilinear equations* », Appl. Anal. 86(6), 2007.

[7] T. Diagana, « *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonomous differential equa- tions* »., Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods 69(12), 2008).

[8] T. Diagana and M. Zitane, « *Stepanov-Like Pseudo-Almost Periodic Functions in Lebesgue Spaces with Variable Exponents $L^{p(x)}$* », Springer International Publishing Switzerland, 2014.

[9] T.R. Hillmann, « *Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions* », Real and Stochastic Analysis, Wiley, 1986.

[10] Hui-Sheng Ding, Wei Long, and Gaston M. N'Guérékata,« *Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with stepanov almost periodic coeffcients* »., J. Comput. Anal. Appl. 13(2) 2011.

[11] Z. Hu, « *Boundedness and Stepanov's almost periodicity of solutions* », Electron. J. Differential Equation, 35(7) 2005.

[12] A. Kufner, J. Oldvrichr and F. Svatopluk, « *Function spaces. From the Czech* », Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences. XV, 454 1977.

[13] Md. Maqbul and D. Bahuguna, « *Almost Periodic Solutions for Stepanov-Almost Periodic Differential Equations* », Differ Equ, Dyn, Syst, Foundation for Scientific Research and Technological Innovation 2013.

[14] A.A. Pankov, « *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations* »., Dordrecht etc.Kluwer Academic Publishers, 1990.

TAM TAM, Tunisie, Hammamet 10-17 Mai 2017

Le comportement asymptotique en norme L^{∞} de l'approximation par éléments d'un système d'inéquations quasi-variationnelles paraboliques modélisant la gestion d'un problème d'énergie électrique

Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine*, Mohamed Haiour**

* Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine

Département de mathématiques et informatique
Centre Universitaire de Tamanrasset

11034, Tamanrasset, Algérie
ALGERIE

kawlamine@gmail.com

** Mohamed Haiour

LANOS Laboratory, Department of Mathematics,

Faculty of Sciences, Badji Mokhtar University,

B.P 12 Annaba 23000,

ALGERIA

hiourm@yahoo.fr

RÉSUMÉ. On étudie un système d'inéquations quasi-variationnelles paraboliques modélisant la gestion d'un problème d'énergie électrique. En particulier nous combinons l'approche de sous-solution avec la notion de régularité discrète pour étudier l'approximation par éléments finis.

ABSTRACT. We study a system of parabolic quasi-variational inequalities related to management of energy production problems. Especially we combian the sub-solution approach with the discrete regularity for studying the finite element approximation.

MOTS-CLÉS : Inéquations quasi-variationnelles, méthode des éléments finis, équations de HJB .

KEYWORDS: Quasi-variational inequalities, finite element method, HJB equation.

1. Position du problème et résultats

Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique en norme L^{∞} d'un système d'inéquations quasi-variationnelles d'évolution lié à un problème de production de l'énergie électrique. Si le problème est défini sur l'intervalle de temps $[0,T]$, T tend vers ∞. Plus précisément, nous considérons le problème suivant: trouver u vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \max\limits_{1\le i\le J}(A^i u - f^i) = 0, \ dans Q_T := \Omega\times\,]0,T[, \\ u|_t = u_0, \qquad\qquad dans\,\Omega, \\ u = 0, \qquad\qquad sur \sum_T := \,]0,T[\times\Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où $A^i, 1\le i\le J$; est une famille d'opérateurs de second ordre de la forme

$$A^i = -\sum_{j,k=1}^{d} a^i_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{d} a^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a^i_0(x) \tag{2}$$

Le problème (1.1) peut être exprimé dans le système d'inéquations quasi-variationnelles parabolique coercif (IQVPs) suivant: trouver le vecteur $U=(u^1,\ldots,u^J)\in\left(L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\right)^J$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u^i, v-u^i) + a^i(u^i, v-u^i) \ge (f^i, v-u^i),\ v\in H^1_0(\Omega), \\ u^i \le Mu^i, v\le Mu^i,\ i=1,\ldots,J \\ u^i \ge 0 \end{cases} \tag{3}$$

où $a^i(.,.)$ est une famille de formes bilinéaires continues et non coercives associé aux opérateurs A^i définie par: pour tout $u,v\in H^1_0(\Omega)$

$$a^i(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{d} a^i_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{d} a^i_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a^i_0(x)v\Big)\,dx \tag{4}$$

où les coefficients $a^i_{jk}(.), a^i_j(.), a^i_0(.)\in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} a^i_{jk}(x) = a^i_{kj}(x) \\ et \\ a^i_0(x)\ge\beta>0 \end{cases} \tag{5}$$

et

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}^{i}(x)\xi_j\,\xi_k \geq \gamma|\xi|^2 \qquad (6)$$

$(.,.)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Dans ce système, Mu^i représente une fonction de coût et le prototype rencontré est

$$Mu^i = k + \inf_{\mu \neq i} u^{\mu} \qquad (7)$$

A titre d'indication, dans sa version elliptique (stationnaire), le système (3) modélise J stations thermiques pour la production d'énergie électrique où, u^i représente le coût de gestion de production d'énergie par la station i , et k le coût de passage d'un état de production i à un autre état $i+1.$

Ensuite, on considère un analogue discret de (1): On établit sur Ω une triangulation régulière et quasi-uniforme. On introduit V_h l'espace d'éléments finis conformes suivant:

$$V_h = \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)\, tel\, que v_h|_K \in P_1 \right\} \qquad (8)$$

Les fonctions de $\{\varphi_l\}, l = 1,..., m(h)$ seront les fonctions de base usuelles définies par:

$$\varphi_l(M_s) = \delta_{ls} \qquad (9)$$

où M_s est un sommet de la triangulation.

L'opérateur de restriction est défini par: pour $v \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$

$$r_h v(x) = \sum_{l=1}^{m(h)} v(M_l)\varphi_l(x) \qquad (10)$$

L'analogue discret complet de (1.1) est: trouver le vecteur $U_h^n = (u_h^{1,n},...,u_h^{J,n}) \in (V_h)^J$ tel que pour $n = 1,\ldots,N$

$$\begin{cases} (\dfrac{u_h^{i,n} - u_h^{i,n-1}}{\Delta t}, v_h - u_h^{i,n}) + a^i(u_h^{i,n}, v_h - u_h^{i,n}) \geq (f^{i,n}, v_h - u_h^{i,n}),\ v_h \in V_h, \\ u_h^{i,n} \leq Mu_h^{i,n}, v_h \leq Mu_h^{i,n},\ i = 1,\ldots,J \\ u_h^{i,0} = u_{0,h}^i \end{cases} \qquad (11)$$

avec $\Delta t = \frac{T}{N}; t_n = n\Delta t, \forall n = 1,\ldots,N$ le pas du temps, $f^{i,n} = f^i(t_n)$ et $u_{0,h}$ l'approximation apriori de u_0.

Sous les conditions de régularité de la solution continue, nous avons (cf. [5]) obtenu l'estimation quasi-optimale suivante: pour $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$\left\| U_h(T,.) - U^\infty \right\|_\infty \leq C\left(h^2 \left|\log h\right|^3 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^N \right) \tag{12}$$

et pour $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

$$\left\| U_h(T,.) - U^\infty \right\|_\infty \leq C\left(h^2 \left|\log h\right|^3 + \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)\rho(A^i)} \right)^N \right) \tag{13}$$

où $\rho(A^i)$ est le rayon spectral de $\rho(A^i)$ et U^∞ est la solution de système stationnaire associé.

Dans cet article, nous développons une nouvelle approche pour améliorer le résultat ci-dessus. Cette approche consiste à combiner à la fois l'algorithme constructif, le concept de sous-solution et le concept de régularité discrète.

Une brève description de cette méthode est la suivante: soit $\{u^{i,n}\}$ l'algorithme continu et $\{u_h^{i,n}\}$ son analogue discret. On construit:

- une suite de sous-solutions discrètes notée $\{\alpha_h^{i,n}\}_{n\geq 1}$ telles que

$$\begin{cases} \alpha_h^{i,n} \leq u_h^{i,n} \\ et \\ \left\| \alpha_h^{i,n} - u^{i,n} \right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 \end{cases} \tag{14}$$

- une suite de sous-solutions continue notée $\{\beta_{(h)}^{i,n}\}_{n\geq 1}$ telles que

$$\begin{cases} \beta_{(h)}^{i,n} \le u^{i,n} \\ et \\ \left\| \beta_{(h)}^{i,n} - u_h^{i,n} \right\|_\infty \le Ch^2 \left| \log h \right|^2 \end{cases} \quad (17)$$

Dans cette situation, nous établissons l'ordre de convergence de l'algorithme proposé suivant:

Théorème 1 : *Sous l' hypothèse du principe de maximum discret et notations précédentes, nous avons*

$$\left\| U^n - U_h^n \right\|_\infty \le Ch^2 \left| \log h \right|^2 \quad (18)$$

La combinaison de cette dernière estimation avec la convergence géométrique de l'algorithme proposé dans ses deux versions continue et discrète, permet de donné un résultat optimal de comportement asymptotique en norme uniforme comme suit:

Théorème 2 : *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous*

$$\left\| U_h(T,.) - U^\infty \right\|_\infty \le C \left(h^2 \left| \log h \right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta \Delta t} \right)^N \right) \quad (19)$$

Bibliographie

[1] A. BENSOUSSAN and J.L. LIONS, Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution.C.R.A.S. série A, 276. (1973).

[2] M. BOULBRACHENE, The noncoercive quasi-variational inequalities related to impulse control problems, Computers and Mathematics with Applications, 35, 101-108 (1998).

[3] M. BOULBRACHENE, On variational inequalities with vanishing zero term. Journal of Inequalities and Applications, 2013:438. doi:10.1186/1029-242X-2013-438 (2013).

[4] M. A. BENCHEIKH LE HOCINE, M. HAIOUR, Algorithmic approach for the aysmptotic behavior of a system of parabolic quasi variational inequalities , Applied Mathematics Sciences, 7, 909 – 921, 2013.

[5] S. BOULAARAS, M. A. BENCHEIKH LE HOCINE, M. HAIOUR, The finite element approximation in a system of parabolic quasi-variational inequalities related to management of energy production with mixed boundary condition, Computational Mathematics and Modeling, 25, 530-543, 2014.

[6] M. A. BENCHEIKH LE HOCINE, S. BOULAARAS, M. HAIOUR, An optimal $L^{\infty}-$ error estimate for an approximation of a parabolic variational inequality, Numerical Functional Analysis and Optimization, 37, 1-18, 2016.

[7] M. A. BENCHEIKH LE HOCINE, S. BOULAARAS, M. HAIOUR, On finite element approximation of system of parabolic quasi-variational inequalities related to stochastic control problems, Congent Mathematics, 3, 1251386, 2016.

Arima en pratique avec LaTeX

An existence result for a quasilinear problem in a limit case

Boussad Hamour

Laboratoire EDP non linéaires et Histoire des mathématiques
Ecole Normale Supérieure
Boîte Postale 92, Vieux Kouba
ALGERIE
hamour@ens-kouba.dz

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous étudions le problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ -\text{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, $A(x)$ est une matrice coercive à coefficients $L^\infty(\Omega)$, $H(x,s,\xi)$ est une fonction de Carathédory qui satisfait pour un certain $\gamma > 0$

$$-c_0\,A(x)\,\xi\xi \le H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \le \gamma\,A(x)\,\xi\xi \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

f appartient à $L^1(\log L^1)(\Omega)$ et $a_0 \ge 0$ à $L^q(\Omega)$, $q > 1$. Pour f et a_0 suffisamment petits, nous démontrons qu'il existe au moins une solution u de ce problème qui est telle que $e^{\delta_0|u|} - 1$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ pour un certain $\delta_0 \ge \gamma$ et qui satisfait une estimation a priori.

ABSTRACT. In this work we consider the problem

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ -\text{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^2$, $A(x)$ is a coercive matrix with coefficients in $L^\infty(\Omega)$, $H(x,s,\xi)$ is a Carathéodory function which satisfies for some $\gamma > 0$

$$-c_0\,A(x)\,\xi\xi \le H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \le \gamma\,A(x)\,\xi\xi \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

f belongs to $L^1(\log L^1)(\Omega)$ and $a_0 \ge 0$ to $L^q(\Omega)$, $q > 1$. For f and a_0 sufficiently small, we prove the existence of at least one solution u of this problem which is such that $e^{\delta_0|u|} - 1$ belongs to $H_0^1(\Omega)$ for some $\delta_0 \ge \gamma$ and which satisfies an a priori estimate.

MOTS-CLÉS : Existence, quasi linéaire, cas limite.

KEYWORDS : Existence, quasilinear, limit case.

2 **A R I M A** – Volume 1 – 2003

An existence result for a quasilinear problem in a limit case

1. Introduction

In this work, we consider the quasilinear problem

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ -\text{div}\,(A(x)Du) = H(x,u,Du) + f(x) + a_0(x)\,u \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^2$, where A is a coercive matrix with bounded measurable coefficients, where $H(x,s,\xi)$ is a Carathéodory function which has quadratic growth in ξ, and more precisely which satisfies for some $\gamma > 0$ and $c_0 \geq 0$

$$-c_0\,A(x)\,\xi\xi \leq H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \leq \gamma\,A(x)\,\xi\xi, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

where $f \in L^1(\log L^1)(\Omega)$, $f \neq 0$, and where $a_0 \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, with

$$a_0 \geq 0, \quad a_0 \neq 0. \tag{3}$$

When f and a_0 are sufficiently small (and more precisely when f and a_0 satisfy the two smallness conditions (16) and (17), we prove in the present paper that problem (1) has a least one solution, which is moreover such that

$$e^{\delta_0|u|} - 1 \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

with

$$\left\| \frac{e^{\delta_0|u|} - 1}{\delta_0} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Z_{\delta_0}, \tag{5}$$

where $\delta_0 \geq \gamma$ and Z_{δ_0} are two constants which depend only on the data of the problem. The main originality of our result is the fact that we assume that a_0 satisfies (3), namely that a_0 is a nonnegative function.

2. Preliminary result

In this section we recall some definitions and classical properties about rearrangements and then we introduce the Zygmund-spaces.

Let Ω be an open bounded of $\mathbb{R}^2$ and let $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ be a measurable function, we define the distribution function μ_ϕ by

$$\mu_\phi(t) = \text{meas}\{x \in \Omega : |\phi(x)| > t\}\,(t \geq 0)$$

and the decreasing rearrangement of ϕ by

$$\phi^*(s) = \sup\{t > 0 \ : \ \mu_\phi(t) > s\} \, (s \in (0, |\Omega|))$$

We recall only the following Hardy-Littlewood inequality

$$\int_\Omega |g(x)h(x)|dx \leq \int_0^{|\Omega|} g^*(s)h^*(s)ds, \tag{6}$$

for any g and h real measurable functions defined in Ω.

The Zygmund-space $L^p(\log L)^q$, $p > 0$ and $q \in \mathbb{R}$, consists of all measurable functions $\phi \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ such that the following quantity is finite.

$$\|\phi\|_{L^p(\log L)^q} = \left(\int_0^{|\Omega|} \left(\left(\log \frac{|\Omega|}{s} \right)^q \phi^*(s) \right)^p ds \right)^{1/p}, \tag{7}$$

Finally, we recall the following Theorem (see [1])

Theorem 2.1 *If u is a real function in $W_0^{1,N}(\Omega)$, then*

$$u^*(s) \leq \frac{|Du|_N}{N\omega_N^{1/N}} \left(\log \frac{|\Omega|}{s} \right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \forall s \in (0, |\Omega|), \tag{8}$$

where w_N is the the measure of unit sphere of $\mathbb{R}^N$ such that

$$w_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1 + N/2)}.$$

3. Main result

In this work we consider the following quasilinear problem

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ -\text{div}\,(A(x)Du) = H(x, u, Du) + a_0(x)\, u + f(x) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{9}$$

where the set Ω satisfies (note that no regularity is assumed on the boundary of Ω)

$$\Omega \quad \text{is a bounded open subset of } \mathbb{R}^2, \tag{10}$$

where the matrix A is a coercive matrix with bounded measurable coefficients, i.e.

$$\begin{cases} A \in (L^\infty(\Omega))^{2\times 2}, \\ \\ \exists \alpha > 0, \quad A(x)\,\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{11}$$

where the function $H(x, s, \xi)$ is a Carathéodory function with quadratic growth in ξ, and more precisely satisfies

$$\begin{cases} H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ is a Carathéodory function such that} \\ \\ -c_0\, A(x)\,\xi\xi \leq H(x, s, \xi)\,\text{sign}(s) \leq \gamma\, A(x)\,\xi\xi, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \\ \\ \text{where } \gamma > 0 \text{ and } c_0 \geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

function defined by where the coefficient a_0 satisfies

$$a_0 \in L^q(\Omega) \quad \text{for some} \quad q > 1, \quad a_0 \geq 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{13}$$

and finally where

$$f \in L^1(\log L^1)(\Omega), \quad f \neq 0. \tag{14}$$

Since Ω is bounded, we equip the space $H_0^1(\Omega)$ with the norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|Du\|_{L^2(\Omega)^N}. \tag{15}$$

We finally assume that f and a_0 are sufficiently small, and more precisely that

$$4\pi\alpha - C(q')\|a_0\|_q - \gamma\|f\|_{L^1(\log L)} > 0, \tag{16}$$

$$\|f\|_{L^1(\Omega)}^{1/2}\|f\|_{L^1(\log L)}^{1/2} \leq \frac{\theta}{1+\theta}\frac{(4\pi\alpha - C(q')\|a_0\|_q - \gamma\|f\|_{L^1(\log L)})^{(1+\theta)/\theta}}{((1+\theta)GC(\theta, q')^{1+\theta/2}\|a_0\|_q)^{1/\theta}}, \tag{17}$$

where the constant G is given in ([6]).

Observe that in place of (16) we could as well have assumed that

$$4\pi\alpha - C(q')\|a_0\|_q - \gamma\|f\|_{L^1(\log L)} \geq 0,$$

but that when equality takes places in the latest inequality, inequality (17) implies that $f = 0$, and then $u = 0$ is a solution of (9), so that the result of Theorem 3.1 becomes trivial.

Our main result is the following Theorem.

Theorem 3.1 *Assume that* (10), (11), (12), (13) and (14) *hold true. Assume moreover that the two smallness conditions* (16) *and* (17) *hold true.*

Then there exist a constant δ_0 with $\delta_0 \geq \gamma$, and a constant Z_{δ_0}, such that there exists at least one solution u of (9) *which further satisfies*

$$(e^{\delta_0|u|} - 1) \in H_0^1(\Omega), \tag{18}$$

with

$$\|e^{\delta_0|u|} Du\|_{L^2(\Omega)^N} = \left\| \frac{e^{\delta_0|u|} - 1}{\delta_0} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Z_{\delta_0}. \tag{19}$$

Our proof of Theorem 3.1 is based on an equivalence result which will be stated and proved in Section 3. This equivalence Theorem will allows us to replace proving Theorem 3.1 by proving Theorem 4.1 which is equivalent to Theorem 3.1.

4. An equivalence result

The main results of this Section is Theorem 4.1.

Theorem 4.1 *Assume that* (10), (11), (12), (13) and (14) *hold true. Assume moreover that the two smallness conditions* (16) *and* (17) *hold true.*

Then there exist a constant δ_0 with $\delta_0 \geq \gamma$, and a constant Z_{δ_0}, such that there exists at least one solution w of

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega), \\ -\mathrm{div}(A(x)Dw) + K_{\delta_0}(x, w, Dw)\,\mathrm{sign}(w) \; = \\ = (1 + \delta_0|w|)\, f(x) + a_0(x)\, w + a_0(x)\, g_{\delta_0}(w)\,\mathrm{sign}(w) \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{20}$$

which satisfies

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Z_{\delta_0}. \tag{21}$$

where

$$w = \frac{1}{\delta}\left(e^{\delta|u|} - 1\right)\mathrm{sign}(u),$$

$$\begin{cases} K_\delta(x, t, \zeta) = \\ = \dfrac{\delta}{1 + \delta|t|}\, A(x)\zeta\zeta - (1 + \delta|t|)H(x, \dfrac{1}{\delta}\log(1 + \delta|t|)\,\mathrm{sign}(t), \dfrac{\zeta}{1 + \delta|t|})\,\mathrm{sign}(t), \\ \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{22}$$

and

$$g_\delta(t) = -|t| + \frac{1}{\delta}(1+\delta|t|)\log(1+\delta|t|), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

This result is essentially obtained by applying Schauder's fixed point theorem.
But there are some difficulties to do it directly, since the term with quadratic growth $K_{\delta_0}(x,w,Dw)\,\mathrm{sign}(w)$ only belongs to $L^1(\Omega)$ in general. We therefore begin by defining an approximate problem which consists to replace $K_{\delta_0}(x,w,Dw)$ by its truncation at height k, namely $T_k(K_{\delta_0}(x,w,Dw))$ and we prove this Theorem when f and a_0 satisfy the two smallness conditions (16) and (17), this approximate problem has at least one solution w_k which satisfies the a priori estimate

$$\|w_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Z_{\delta_0}.$$

This result, which is proved and is obtained by applying Schauder's fixed point theorem in a classical way. We then pass to the limit as k tends to infinity.

5. Bibliography

[1] A. Alvino, *Un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, 44 (1977), 105.112.

[2] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire 5 (1988), 347-364.

[3] V. Ferone, F. Murat, *Quasilinear problems having quadratic growth in the gradient : an existence result when the source term is small*, in *Equations aux dérivées partielles et applications, Articles dédiés à Jacques-Louis Lions*, (1988), Gauthiers-Villars, Paris, 497-515.

[4] V. Ferone, F. Murat, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient : an existence result when the source terms are small*, Nonlinear Anal. 42 (2000), 1309-1326.

[5] V. Ferone, F. Murat, *Nonlinear elliptic equations in the gradient and source terms in Lorentz spaces*, J. Diff. Eq. 256 (2014), 577-608.

[6] B. Hamour, F. Murat, *Quasilinear problems involving a perturbation with quadratic growth in the gradient and a noncoercive zeroth order term*, Rend. Lincei Mat. Appl. 27 (2016), 195-233

[7] P. Souplet, *A priori estimates and bifurcation of solutions for an elliptic equation with semi-definite critical growth in the gradient*, Nonlinear Anal. 121 (2015), 412-423.

Application Of GARCH Models In Energy Markets: Oil Price

Fatima Zohra Bouseba and Halim Zeghdoudi

LaPS laboratory
Badji-Mokhtar University BP12
Box 12 Annaba 23000
Algeria
fatmazohrabouseba@hotmail.fr

RÉSUMÉ.

Ce papier met l'accent sur le pro t de Generalized Auto Regressive conditionnelle Hétéroscédasticité (GARCH) modèles et leurs applications à la valeur à risque. Plus précisément, nous donnons un vaste aperçu bibliographique des développements de ARCH-GARCH. À cette n, ce travail ajouter un autre intérêt de modèles GARCH dont il a fait une demande concerne à la volatilité des taux de prix du pétrole. L'étude porte sur la la période 01 Janvier 2009 au 31 Décembre 2014, un total de 2192 observations donné.

ABSTRACT.

This paper focuses on the pro t of Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) models and their applications to the Value-At-Risk. More precisely, we give an extensive bibliographic overview of the developments of the ARCH-GARCH. To this end, this work add another interest of GARCH models which it made an application relates to exchange rate volatility of oil price. The study relates to the period 01 January 2009 to 31 December 2014, a total of 2192 observations given.

MOTS-CLÉS : Model GARCH, Volatilité, prix d'énergie.

KEYWORDS: GARCH models, Volatility, energy prices.

1. Introduction

The recent volatility in oil prices presents an excellent opportunity for traders to make a pro t if they are able to predict the right direction. Volatility is measured as the expected change in the price of an instrument in either direction. For example, if oil volatility is 15% and current oil prices are US $100, it means that within the next year traders expect oil prices to change by 15% (either reach $85 or $115). If the current volatility is more than the historical volatility, traders expect higher volatility in prices going forward. If the current volatility is lower than the long-term average, traders expect lower volatility in prices going forward.

High price volatility is a long-standing characterstic of world oil markets and, more recently, of natural gas and electricity markets. However, there is no widely accepted answer to what the best models and measures of price volatility are because of the complexity of distribution of energy prices where this problem motivated several researchers.

Moreover, GARCH models include a study of e ciency of crude oil markets, an investigation of the e ect of resource price uncertainty on rates of economic growth studies of the links between related products, testing the theory of storage and the leverage e ect analysis of the e ects of regulatory changes and the introduction of futures trading, and forecasting of energy prices. GARCH models specify conditional variance as a function of both past value of squared residuals and past values of the variance. Adrangi et al.(2001b) use GARCH to analyze the nature of non-linearity in energy prices. By the non linearity the authors mean second and higher order dependence between the energy prices. Adrangi et al. (2001a) use bivariate GARCH to investigate the dynamics of crude oil and diesel prices. Bivariate GARCH is also employed by Ng and Pirrong (1996) to study the behavior of re ned petroleum spot and futures prices.

In addition, Adrangi et al.(2001b) examine the non-linearity in the energy price data. The authors evaluate two alternative approaches to modeling such non-linearities.They conduct tests of chaotic structures and reject them in favor of GARCH-type processes. Speci cally, they study deseasonalized daily returns on crude oil, heating oil and unleaded gasoline futures contracts traded at NYMEX over a period of ten years. Adrangi et al.(2001b) nd that the non-linear dynamics of energy price changes can be modeled by GARCH(1,1).

The goal of this paper is the add another pro t of GARCH models which we made an application relates to exchange rate volatility of oil price.

2. Summary of Existing Literature on Energy GARCH

There is an extensive literature on modeling conditional heteroskedasticity of energy prices.These models range from the basic ARCH to complex models of SWARCH,FIGARCH,and stable GARCH. the majority of the reviewed energy GARCH models are of low order the most common being GARCH(1,1).Many of the applications favor modi cations of GARCH,Which allow for the asymmetric e ects,i.e.,asymetric GARCH and EGARCH.Several authors nd that GARCH-M models have best tting properties.Some researchers employ the bivariate GARCH to study the links beteween closely related markets.More complex studies involve models based on fractional integration,switching regimes, and stable distributions of energy returns.

Most of the studies use daily or monthly spot and/or futures data on crude oil. GARCH modeling of price changes of petrochemicals is commonly carried out within the framework of error coorection models. There

are only single cases of studies of natural gas and coal. The only research indirectly related to electricity, deals with share prices of electricity companies.In our research,we use a range of energy commodities,including two crude oil series, two natural gas series, a serie of electricity prices,and a series of Gas oil prices.

Application

The main results of this paper is the following modeling and application, when we used software EViews. We will apply to the data of the rate of exchange of the oil prices.

The data represent the rate of daily exchange of the oil prices (S_t) . The study relates to the period 01 January 2009 to 31 December 2014, a total of 2192 observations given.

The rst step of this application is study the stationary of the series. To this end, we used the unit root test of Dickey-Fuller (ADF) and Philips Péron test (PP).

3. Results

3.1. Unit Root tests and Descriptive Analysis

In this section, we summarized unit root tests and descriptive analysis results of prix lnprixD lnprix Dprix

Test	ADE	PP
Prix	-1.758414	-2.065765
Lnprix	-2.178748	-2.981970
Dlnprix	-40.25772	-40.23678
Dprix	-47.08854	-47.12848

Table 1(unit root test with α=1%)

Unit root test con rm the stationarity of the series Dln prix and Dprix. Now, we use only the series Dprix

	Mean	Median	Std.Dev	Skewness	Kurtosis	Jarque-B
Prix	0.095152	0.063664	1.851917	0.005052	2.93828	0.357179

Table 2

Skewness of oil price is 0.005052, so it is positive and the mean is larger than median, and there are right skewed distribution - most values are concentrated on left of the mean, with extreme values to the right. Kurtosis is 2.938286 is less than 3 - Platykurtic distribution, atter than a normal distribution with a wider peak. The probability for extreme values is less than for a normal distribution, and the values are wider spread around the mean. Jarque-Bera is 0.357179.

Models	Adju	SEE	BIC	RMSE	MAE	MAPE
GARCH(1,1)	1	$1{,}20^{E}$-15	-65,68464	$1{,}20^{E}$-15	8.40^{E}-16	$5{,}48^{E}$-14
GARCH(1,2)	1	$1{,}38^{E}$-15	-65,43098	$1{,}37^{E}$-15	$9{,}71^{E}$-16	$6{,}30^{E}$-14
GARCH(2,1)	1	1.85^{E}-15	-64.92211	$1{,}84^{E}$-15	$1{,}17^{E}$-15	$7{,}55^{E}$-14
GARCH(2,2)	1	4.28^{E}-15	-63.24255	4.27^{E}-15	$2{,}73^{E}$-15	$1{,}77^{E}$-13
GARCH(1,3)	1	4.90^{E}-15	-53.69498	4.89^{E}-15	$3{,}35^{E}$13	$2{,}31^{E}$-11

4. Conclusion

Models of time-varying conditional heteroskedasticity of energy returns represent an improvement over the models assuming the constancy of the error term variance.

Such models are applied to a wide range of economic problems including tests of market e ciency,interrelations beteween energy markets,regulatory issues,and forecasting.Our research has implications for energy risk management.

We have tested the ability of models of conditional heteroskedasticity to explain the presence of heavy tails and asymmetry of energy returns,Our sample includes a broader set of energy prices as compared to the existing literature.In addition to the crude oil series,we use the series for natural gas,electricity,and gas oil prices.

Our conclusion is that normal GARCH models explain some of the non-normality of the distribution of energy prices.When they do, the error term still exhibits skewness and leptokurtosis.At higher con dence levels,normal GARCH based estimates of energy VAR perform marginally better than the ones commonly used by energy companies.To account for non-Gaussian distribution of energy returns and changing volatility , we use the stable GARCH.

In addition, the nonlinear GARCH-class models, which are capable of capturing long-memory and/or asymmetric volatility, exhibit greater forecasting accuracy than the linear ones, especially in volatility forecasting over longer time horizons, such as ve or twenty days.

5. Bibliographie et biographie

5.1 Bibliographie

Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity," Journal of Econometrics, 31, 307-327, (1986).

Brockhaus, O. and Long, D. "Volatility swaps made simple", RISK, January, 92-96(2000).

Brooks, C. GARCH Modelling in nance : A review of the software options, Economic Journal : 107(443) 1271-1276 (1997).

Brooks, C. and S. P. Burke. Forecasting exchange rate volatility using conditional variance models selected by information criteria. Economics Letters 61: 273-278 (1998).

Demeter , K., Derman, E., Kamal, M. and Zou, J. A guide to volatility and variance swaps, The Journal of Derivatives, Summer, 9-32 (1999).

Engle, R."Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom In ation", Econometrica, 50, 987-1008 (1982).

Engle, R. F., D. M. Lilien and R. P. Robins, `Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model', Econometrica, 55, 391-407, (1987).

Engle,R. Je rey,R. Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange prices with the autoregressive conditional duration model.Journal of Empirical Finance,4(3),pp.187-212(1997).

Heston, S."A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies, 6, 327-343 (1993).

Hopper, G. P. What determines the exchange rate: Economics factors or market sentiment. Business Review: 17-29. Federal Reserve Bank of Philadelphia (1997).

Javaheri A. "The Volatility Process" Ph.D. Thesis in progress, Ecole des Mines de Paris (2002).
West Kenneth,and Dongchul Cho.The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility."Journal of Econometrics,69(2),pp.367-391(1995).
Tuckman Bruce. Fixed income securities : tools for today's markets. New York John Wiley and Sons, (1996).
Zeghdoudi, H. Ezzebsa, A.Remita, M. Nedjar,S. Around ARCH/GARCH models and their application to exchange rate volatility. Inernational Journal of Statistics and Economics, Vol 11 N 2 , 44-60 (2013).
Zeghdoudi, H. Lallouche, A.Remita, M,R. On Volatility Swaps for stock market Forecast : Application Example CAC 40 French Index. Journal of Probability and Statistics, Article ID 854578, 6 pages (2014).
Zakoian, J.-M, "Threshold Arch Models", CREST.DP, (1991).
Zakoian, J.-M, "Threshold Heteroscedastic Models" , Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 931--955, (1994).

Méthode de Galerkin Discontinue

Cas de l'analyse isogéométrique

A. Gdhami[1], R. Duvigneau[2], M. Moakher[1]

[1] Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur, ENIT, Tunis, Tunisie (asmagdhami@yahoo.fr)
[2] Université Côte d'Azur, INRIA, CNRS, Sophia-Antipolis, France

RÉSUMÉ. L'objectif de l'Analyse IsoGéométrique est de traiter la conception et l'analyse avec exactement les mêmes modèles géométriques. Pour cela, les polynômes de Lagrange classiquement utilisés pour l'interpolation sont remplacés par des fonctions B-Splines. Dans ce cadre, nous présentons dans ce travail une nouvelle méthode de type Galerkin Discontinue (GD), appliquée à la résolution numérique des équations hyperboliques. La méthode est basée sur le choix d'une base locale de Bernstein et des formules de Gauss-Legendre pour approcher les différentes intégrales. Nous utilisons un schéma de Lax-Friedrichs pour calculer les flux numériques.

ABSTRACT. The objective of Isogeometric Analysis is to address the design and analysis with exactly the same geometric patterns. For this, the Lagrange polynomials usually used in interpolation are replaced by B-Splines functions. In this context, we present in this work a new Discontinuous Galerkin (DG) method applied to the numerical solution of hyperbolic equations. The method is based on the choice of a local Bernstein basis and Gauss-Legendre formulas to approximate the different integrals. We use a Lax-Friedrichs scheme to calculate the numerical flux.

MOTS-CLÉS : Galerkin Discontinu, Analyse IsoGéométrique

KEYWORDS : Discontinuous Galerkin, isogeometric Analysis

1. Les fonctions B-splines

1.1. Définition

On se donne une suite de points $\xi_0 \leq \xi_1 \leq ... \leq \xi_m$ de la droite réelle, appelés noeuds (knots). Le vecteur $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ s'appelle le vecteur des noeuds. La ième fonction de base B-spline de degré p $N_{i,p}$ est alors définie par récurrence :
Pour $p = 0$:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \qquad \text{pour} \quad i = 1, ..., k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

Pour $p \geq 1$:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{2}$$

1.2. Quelques propriétés

Les fonctions de base des B-splines $N_{i,p}$ satisfont les propriétés suivantes :

– $N_{i,p}$ est un polynome de degré p à support compact $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$.

– La positivité des fonctions B-splines : $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_m]$

– Partition de l'unité : $\forall \xi \in [\xi_{p+1}, \xi_{m-p}[$, $\sum_{i=1}^{m-p-1} N_{i,p}(\xi) = 1$.

– Soit ξ_i un noeud de multiplicité r, alors, $N_{i,p}(\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^{p-r}$ en ξ_i .

– La dérivée d'une fonction de base B-spline est donnée par :

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi).$$

2. Courbes et surfaces B-splines

2.1. Définition

Une courbe B-splines de degré p est la courbe paramétrée définie par :

$$X_p(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) P_i$$

Pour construire une courbe B-spline de degré p à partir de n points de contrôle P_i, il faut donc se donner $m+1$ noeuds où $m = n + p + 1$, permettant de définir les fonctions de bases $N_{i,p}(\xi)$.

Une surface B-spline de degrés (p, q) associée aux paramètres ξ et η et aux points de contrôle P_{ij} est la surface paramétrée définie par produit tensoriel :

$$S_{p,q}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{ij}.$$

2.2. Insertion de noeud

Ajouter un noeud consiste à se donner un nouveau noeud $\widehat{\xi}$ et à calculer un nouveau polygone de contrôle qui donne la même courbe B-spline de degré p.

Propriété 2.1 *Soit $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$ un vecteur de noeuds et P un polygone de contrôle et soit $\xi \longmapsto X_p(\xi)$ la courbe B-spline de degré p correspondante. Soit $\widehat{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}[$ un noeud supplémentaire.*
Les nouveaux $n+1$ points de contrôle ($\overline{P}_1$,...,$\overline{P}_{n+1}$) sont formés à partir des points de contrôle d'origine et sont donnés par :

$$\overline{P}_i = \alpha_i P_i + (1-\alpha_i) P_{i-1}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\widehat{\xi}-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i} & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \leq n+p+2 \end{cases} \quad (3)$$

3. Galerkin Discontinue dans le contexte isogéométrique

La méthode GD [1] fait le lien entre la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis. En effet, un problème de départ (problème fort) est mis sous forme variationnelle (problème faible) comme pour la méthode des éléments finis. Cependant aucune continuité n'est imposée à la solution ni aux fonctions tests à l'interface entre les éléments du domaine de calcul discrétisé. En raison de cette discontinuité, les flux physiques sont approchés par des flux numériques aux interfaces comme pour la méthode des volumes finis.

L'analyse isogéométrique [2] consiste à utiliser une base issue de la CAO pour représenter exactement le domaine de calcul, et également la solution du problème selon une formulation variationnelle.

3.1. Construction de fonction de base

On souhaite mettre en oeuvre une méthode de Galerkin Discontinue dans le cadre isogéométrique, c'est à dire s'appuyant sur un domaine de calcul défini à partir d'une représentation B-Spline [3]. Pour cela, il faut d'abord définir un ensemble d'éléments, qui sont les supports d'une représentation polynomiale avec des discontinuités à chaque interface entre éléments. Etant donné une surface B-Spline définissant le domaine de calcul, on utilise l'insertions des noeuds p fois, pour chacun des noeuds intérieurs existants. Ce faisant, le domaine de calcul est divisé en une série de patches de Bézier, sans modification de la géométrie. Un patch de Bézier est un cas particulier de patch B-Spline, pour lequel le nombre n des fonctions (et points de contrôle) est égal à $p+1$.

On considère finalement comme éléments l'ensemble des patches de Bézier créés par le process d'insertion. Chaque élément Ω_j est donc défini par $(p+1)\times(p+1)$ fonctions de base, $(\varphi_j^{i,k}(x,y))_{i,k=1,...,p+1}$, qui peuvent être identifiés avec les polynômes de Bernstein de degré p dans le domaine paramétrique :

$$\varphi_j^{i,k}(x,y) = \begin{cases} \varphi_j^i(x(\xi)) \otimes \varphi_j^k(y(\eta)) = B_j^{i,p}(\xi) \otimes B_j^{k,p}(\eta) & \text{si} \quad (x,y) \in \Omega_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

avec, $B_j^{i,p}$ le ième polynome de Bernstein de degré p, définis sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$B^{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \qquad \forall \quad t \in [0,1] \qquad k = 0, ..., n$$

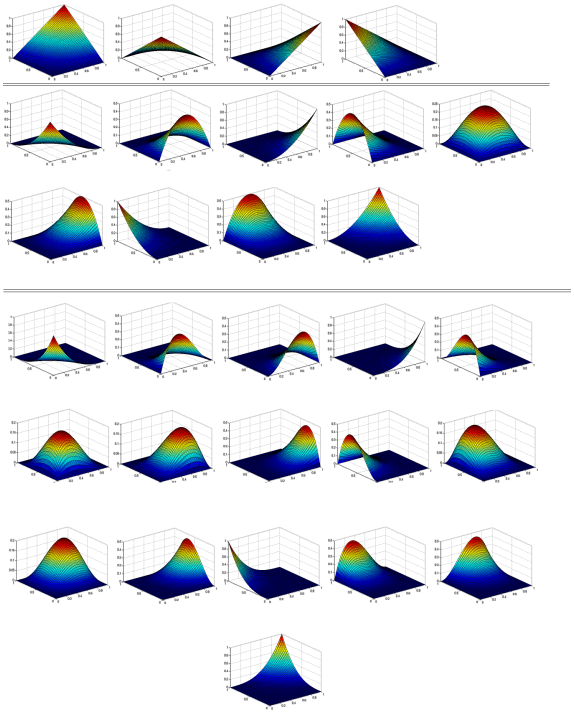


Figure 1. *Les fonctions de base 2D de degré* 1, 2 *et* 3.

3.2. Méthode numérique

On considère comme problème modèle une équation d'advection pure 2D :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,t) + \nabla \cdot (\vec{c} u(x,y,t)) & = 0 & \forall (x,y,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,y,0) & = u_0(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \end{cases} \tag{5}$$

où $\vec{c} = (c_x, c_y)$ est un vecteur vitesse imposé.
Nous cherchons une solution approchée u_h dans l'espace d'approximation global V_h de dimension finie composé des fonctions continues polynômiales par morceaux de degré au plus p sur chaque élément Ω_k, défini par :

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega), v_h \mid_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_p(\Omega_k)\}$$

En adoptant une formulation variationnelle et la formule de Green, nous avons :

$$\int_{\Omega_k} \partial_t u(x,y,t) v(x,y) d\Omega_k = \int_{\Omega_k} u(x,y,t)) \, \vec{c} \cdot \nabla v(x,y) d\Omega_k - \int_{\partial\Omega_k} u(x,y,t) v(x,y) \, \vec{c} \cdot \vec{n} \, d\Gamma_k \tag{6}$$

En discrétisant le problème sur la base de Bézier associée a l'élément, le problème s'écrit :

$$\sum_{i,j=1}^{p+1} \partial_t u_{i,j}^k(t)(\int_{\Omega_k} N_{i,j}^k(x,y)N_{q,l}^k(x,y)d\Omega_k) = \sum_{i,j=1}^{p+1} u_{i,j}^k(\int_{\Omega_k} N_{i,j}^k(x,y)\,\vec{c}\cdot\nabla N_{q,l}^k(x,y)d\Omega_k) - \int_{\partial\Omega_k} N_{q,l}^k(x,y)(\vec{c}u)^\star\cdot\vec{n}\,d\Gamma_k$$

On remarque que le problème local prend la forme d'un système linéaire de taille $(p+1)^2 \times (p+1)^2$, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$M^k\partial_t u^k = R^k.u^k + F^k \quad \forall t \in [0,T] \quad \forall k \tag{7}$$

Etant donné la double définition de la solution aux interfaces, un flux numérique local de Lax-Friedrichs est utilisé pour le calcul du terme F^k. L'intégration temporelle est réalisée par la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 et 4. La stabilité impose une condition de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{1}{2p+1}$$

ou h est la taille caractéristique de l'élément.

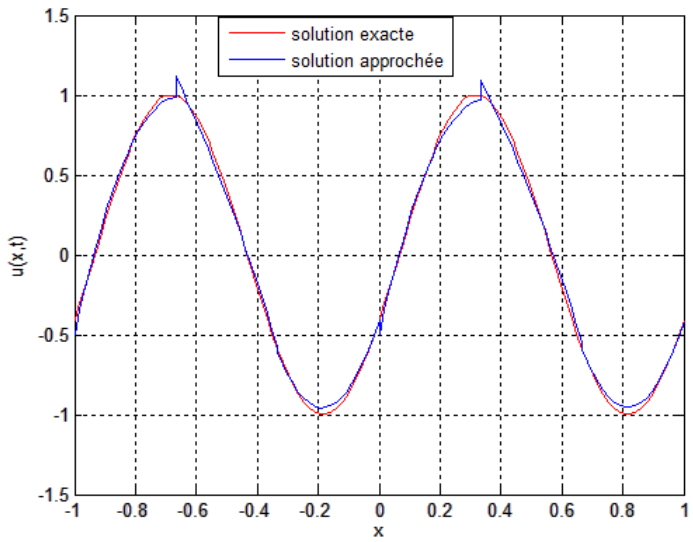


Figure 2. *Solution obtenue avec une base quadratique et six éléments.*

3.3. Résultats

On présente des résultats pour un problème unidimensionnel, les développements pour le cas 2D étant encore en cours :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u &= 0 & \forall (x,t) \in [-1,1]\times[0,T] \\ u(-1,t) &= u_{ex}(-1,t) & \forall t \in [0,T] \\ u(1,t) &= u_{ex}(1,t) & \forall t \in [0,T] \\ u_0(x) &= u_{ex}(x,0) = \sin(2\pi x) & \forall x \in [-1,1] \end{cases} \tag{8}$$

on compare les solutions obtenues numériquement aux solutions exactes, pour des fonctions de base de degrees 0, 1, 2, 3 et 4. La figure 2 représente la solution obtenue en utilisant seulement six éléments et une base quadratique, et la figure 3 l'évolution de l'erreur logarithmique en norme L^2. On constate un taux de convergence optimal, la méthode étant d'ordre $p+1$ pour la norme L^2.

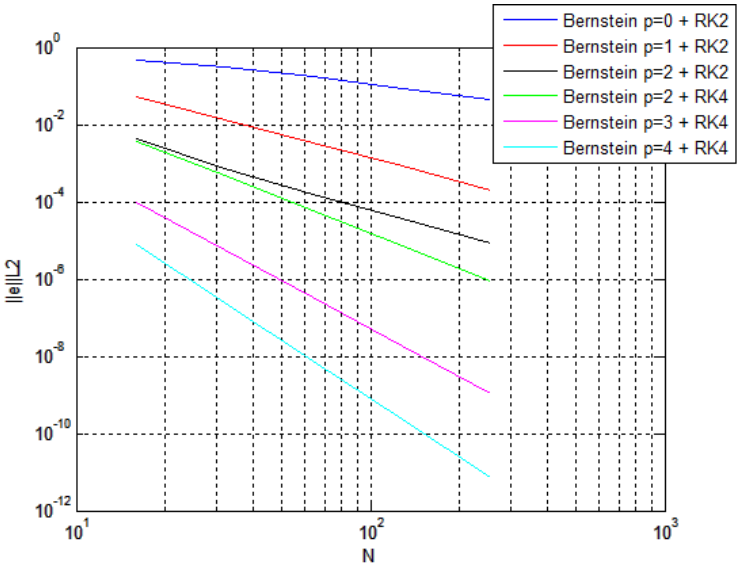


Figure 3. *Convergences en maillage avec la méthode GD dans le contexte isogéométrique.*

4. Bibliographie

[1] *J. S. Hesthaven, T. Warburton*. Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications, Springer, 2008.

[2] *J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs*. Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.

[3] *C. Michoski, J. Chan, L. Engvall, J.A. Evans*. Foundations of the blended isogeometric discontinuous Galerkin (BIDG) method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering : 658-681, 2016.

Rubrique

On Almost Automorphic Solutions of Differential-Difference Equations

Chikh BOUZAR[1] and Fatima Zahra TCHOUAR[2]

Laboratory of Mathematical Analysis and Applications,
University of Oran 1 Ahmed Ben Bella
Oran
Algeria
[1] ch.bouzar@gmail.com
[2] fatima.tchouar@gmail.com

RÉSUMÉ. Nous sommes intéressés par l'étude des solutions presque automorphes des équations aux différences différentielles à coefficients constants dans le cadre des distributions presque automorphes.

ABSTRACT. We are interested by almost automorphic solutions of difference differential equations with constant coefficients in the setting of almost automorphic distributions.

MOTS-CLÉS : Fonctions presque automorphes, Distributions presque périodiques, distributions presque automorphes, Équations aux différences différentielles

KEYWORDS : Almost automorphic functions, Almost periodic distributions, Almost automorphic distributions. Difference differential equations.

1. Introduction

We consider linear difference-differential equations

$$L_\omega f = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_{ij} \frac{d^i}{dx^i} f(. + \omega_j) = g, \tag{1}$$

where $(a_{ij})_{i\leq p,\ j\leq q}$ are constant complex coefficients and $\omega = (\omega_j)_{j\leq q} \subset \mathbb{R}^q$.

The case of the second member g an almost automorphic function was first studied by Bochner in the paper [1], where he introduced the definition of almost automorphic functions which are a generalization of almost periodic functions.

The aim of our work is to extend such a study of these equations to the context of almost automorphic Sobolev-Schwartz distributions. So, we first introduce almost automorphic Sobolev-Schwartz distributions and we study their properties. Finally, we tackle equations (1) when g is an almost automorphic Sobolev-Schwartz distributions.

2. Preliminaries

We denote by $\mathcal{CB}$ the space of continuous and bounded complex valued functions on $\mathbb{R}$ endowed with the norm of uniform convergence on $\mathbb{R}$, $\|.\|_\infty$.

Definition 1 *A complex-valued function f defined and continuous on $\mathbb{R}$ is called almost automorphic, if for any sequence $(s_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, one can extract a subsequence $(s_{m_k})_k$ such that*

$$g(x) := \lim_{k\to+\infty} f(x + s_{m_k}) \quad \textit{is well-defined for every } x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

and

$$\lim_{k\to+\infty} g(x - s_{m_k}) = f(x) \ \textit{ for every } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

We denote by $\mathcal{C}_{aa}$ denotes the space of almost automorphic functions on $\mathbb{R}$.

Remark 2 *The function g in the above definition is not necessarily continuous but it is measurable and bounded, so locally integrable*.

Remark 3 *We have that $\mathcal{C}_{ap} \subsetneq \mathcal{C}_{aa}$, where $\mathcal{C}_{ap}$ denotes the space of Bohr almost periodic functions, see [4].*

Recall some properties of almost automorphic functions, see [4].

Proposition 4 *1) $\mathcal{C}_{aa}$ is a Banach subalgebra of $\mathcal{CB}$.*

2) Let $f \in \mathcal{C}_{aa}$, if $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, then $f = 0$.

3) Let $f \in \mathcal{C}_{aa}$ and $\omega \in \mathbb{R}$, then $\tau_\omega f \in \mathcal{C}_{aa}$, where $\tau_\omega f(.) = f(. + \omega)$.

4) If $f \in \mathcal{C}_{aa}$ and $g \in L^1$, then the convolution $f * g \in \mathcal{C}_{aa}$.

The following characterization of almost automorphic functions is given in [1]

Proposition 5 *A continuous function f is almost automorphic if and only if for any sequence of real numbers $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, one can extract a subsequence $(s_{m_k})_k$ such that*

$$\lim_{l\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} f(x+s_{m_k}-s_{m_l}) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

See [6] for the following result.

Proposition 6 *A primitive of an almost automorphic function is almost automorphic if and only if it is bounded.*

3. Almost automorphic distributions

Let $\mathcal{E}$ be the space of infinitely differentiable functions defined on $\mathbb{R}$. For $p\in[1,+\infty]$, recall the space

$$\mathcal{D}_{L^p} := \left\{\varphi\in\mathcal{E}:\ \forall i\in\mathbb{Z}_+,\ \varphi^{(i)}\in L^p\right\}.$$

The space $\dot{\mathcal{B}}$ is the closure in $\mathcal{D}_{L^\infty}$ of the space $\mathcal{D}$ of smooth functions with compact support, it consists of functions from $\mathcal{D}_{L^\infty}$ which vanish at infinity with all their derivatives, for more details, see [3]. Denote by $\mathcal{D}'_{L^p}$ is the topological dual space of $\mathcal{D}_{L^q}$, where $1<p\leq+\infty$. The space $\mathcal{D}'_{L^1}$ is the topological dual of $\dot{\mathcal{B}}$. A distribution from the space $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ is called a bounded distribution.

We define the space of regular almost automorphic functions on $\mathbb{R}$, denoted by $\mathcal{B}_{aa}$, as

$$\mathcal{B}_{aa} := \left\{\varphi\in\mathcal{E}:\ \forall i\in\mathbb{Z}_+,\ \varphi^{(i)}\in\mathcal{C}_{aa}\right\}.$$

Some properties of $\mathcal{B}_{aa}$ are given in the following proposition.

Proposition 7 *1) $\mathcal{B}_{aa}=\mathcal{C}_{aa}\cap\mathcal{D}_{L^\infty}$.*

2) $\mathcal{B}_{aa}$ is a Fréchet subalgebra of $\mathcal{D}_{L^\infty}$.

3) $\mathcal{B}_{aa}*L^1\subset\mathcal{B}_{aa}$.

We give the main result of this section.

Theorem 8 *Let $T\in\mathcal{D}'_{L^\infty}$, the following statements are equivalent :*

1) $T*\varphi\in\mathcal{C}_{aa},\ \forall\varphi\in\mathcal{D}$.

2) $\exists\,(f_i)_{i\leq k}\subset\mathcal{C}_{aa},\ T=\sum_{i=0}^{k} f_i^{(i)},\ k\in\mathbb{Z}_+$.

3) For every sequence $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, there is a subsequence $(s_{m_k})_k$ such that

$$S := \lim_{k\to+\infty}\tau_{s_{m_k}}T \text{ exists in } \mathcal{D}',$$

and

$$\lim_{k\to+\infty}\tau_{-s_{m_k}}S = T \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Definition 9 *A distribution $T\in\mathcal{D}'_{L^\infty}$ is said to be almost automorphic if it satisfies any (hence every) condition of the above theorem. We denote by $\mathcal{B}'_{aa}$ the space of almost automorphic distributions on $\mathbb{R}$.*

Example 10 *A classical almost automorphic function is an almost automorphic distribution.*

Example 11 *The space of Schwartz almost periodic distributions is denoted by $\mathcal{B}'_{ap}$, see [3], we have $\mathcal{B}'_{ap} \subsetneq \mathcal{B}'_{aa}$.*

Denote by $\tau_h T$, $h \in \mathbb{R}$, the translate of a distribution $T \in \mathcal{D}'$ A distribution $T \in \mathcal{D}'$ is said vanishing at infinity if $\lim_{h\to+\infty} \tau_h T = 0$ in $\mathcal{D}'$. Denote by $\mathcal{B}'_{+,0}$ the space of such distributions.

Some properties of $\mathcal{B}'_{aa}$ are given in the following proposition.

Proposition 12 *1) If $T \in \mathcal{B}'_{aa}$, then $T^{(i)} \in \mathcal{B}'_{aa}$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$.*

2) If $T \in \mathcal{B}'_{aa} \cap \mathcal{B}'_{+,0}$, then $T = 0$.

3) If $T \in \mathcal{B}'_{aa}$, then $\tau_h T \in \mathcal{B}'_{aa}$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

4) $\mathcal{B}'_{aa} * \mathcal{D}'_{L^1} \subset \mathcal{B}'_{aa}$.

5) $\mathcal{B}_{aa} \times \mathcal{B}'_{aa} \subset \mathcal{B}'_{aa}$.

The following proposition is an extension to almost automorphic distributions of the classical result of Bohl-Bohr.

Proposition 13 *A primitive of an almost automorphic distribution is almost automorphic if and only if it is bounded*.

Now, we provide a generalization of the proposition 5.

Proposition 14 *Let $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, then $T \in \mathcal{B}'_{aa}$ if and only if for every sequence $(s_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, there is a subsequence $(s_{m_k})_k$ such that*

$$\lim_{l\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \tau_{-s_{m_l}} \tau_{s_{m_k}} T = T \text{ in } \mathcal{D}'. \tag{4}$$

4. Almost automorphic solutions of difference-differential equations

Let $p \in \mathbb{Z}_+$, we denote by $\mathcal{C}^p_{ub}$ the space of functions φ of class $\mathcal{C}^p$, such that for $i \leq p$, $\varphi^{(i)}$ is bounded and uniformly continuous.

Our first result is a generalisation of the result of Bochner [1].

Theorem 15 *If every solution $f \in \mathcal{C}^p_{ub}$ of the homogeneous equation*

$$L_\omega f = 0, \tag{5}$$

is an almost automorphic function, then any solution $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ of the inhomogeneous equation

$$L_\omega T = S, \tag{6}$$

where $S \in \mathcal{B}'_{aa}$, is an almost automorphic distribution.

A case of equations (1) is systems of linear ordinary differential equations

$$U' = AU + S \tag{7}$$

where $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ is a square-matrix of complex numbers, $S = (S_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathcal{D}')^p$ and $U = (U_i)_{1\leq i\leq p}$ is the unknown vector distribution.

Theorem 16 *If $S_i,\ 1 \leq i \leq p$ are almost automorphic distributions and the matrix A has no eigenvalues with real part zero, then the equation (7)admits a unique bounded distribution $U \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ which is, in fact, an almost automorphic distribution.*

5. Bibliographie

Bochner S., A new approch to almost periodicity. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 48, p. $2039 - 2043$, (1962) .

Bouzar C., Tchouar F. Z., Almost automorphic distributions. ArXiv : 1606.05287 V.1.

Schwartz L., Théorie des distributions. Hermann, 2ième Edition, (1966) .

Veech W. A., Almost automorphic functions on groups. Amer. J. Math., Vol. 87, p. $719 - 751$, (1965).

Zaidman S., existence of asymptotically almost periodic and almost automorphic solutions for some classes of abstract differential equations. Ann. sc. math. Québec, Vol.13, p.$79 - 88$, (1989) .

Zaki M., Almost automorphic integrals of almost automorphic functions. Canad. Math. Bull., Vol. 15, p. $433 - 436$, (1972) .

Variable-exponent Kirchhoff model for image restoration and thin-structures detection using the topological gradient method

Hamdi Houichet* — Anis Theljani* — Badreddine Rjaibi* — Maher Moakher*

* Université de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis,
Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur
B.P. 37, 1002 Tunis, Tunisia.
hamdi.houichet@gmail.com (H. Houichet), thaljanianis@gmail.com (A. Theljani),
badreddine.rjaibi@lamsin.rnu.tn (B. Rjaibi), maher.moakher@enit.rnu.tn (M. Moakher).

ABSTRACT. In this work, we propose a multiscale approach for a nonstandard higher-order based on the $p(\cdot)$-Kirchhoff operator. First, we consider a topological gradient approach for $p(\cdot) \equiv 2$ in order to detect thin structures. Then, we consider a nonlinear $p(\cdot)$-Kirchhoff equation where the variable exponent $1 < p(\cdot) \leq 2$ is chosen adaptively based on the map furnished by the topological gradient in order to preserve important features of the image. Finally, we present some numerical results to illustrate the effectiveness of our approach.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on propose une approche multiéchelle pour des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, basée sur le modèle $p(\cdot)$-Kirchhoff pour résoudre les problèmes de détection des contours et la restoration des images. On considère le gradient topologique pour l'opérateur de bilaplace (i.e. $p(\cdot) \equiv 2$) afin de détecter les contours et les préserver. Ensuite, on présente une stratégie adaptative pour le choix du $p(\cdot)$. Ce choix est basé sur les structures fines détectées par le gradient topologique. On présente quelques résultats numériques pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

KEYWORDS : $p(\cdot)$-Kirchhoff model, image denoising, biharmonic operator, topological gradient, speckle noise, nonlinear PDE.

MOTS-CLÉS : modèle de $p(\cdot)$-Kirchhoff, debruitage d'image, opérateur biharmonique, gradient topologique, bruit multiplicatif, EDP non-linéaire.

1. Introduction

Image restoration is a fundamental task in image processing that arises in widely diverse fields (geophysics, optics, medical imaging, etc). In this work, we are interested in the restoration of images highly corrupted with multiplicative noise. It is a challenging task in various fields and particularly in ultrasound medical imaging. The reason is that ultrasound images are strongly influenced by the quality of data usually corrupted with Rayleigh-distributed multiplicative noise so-called speckle noise [9, 10, 11] which usually affects image analysis methods by making important features hard to detect. We aim to reconstruct an image $u : \Omega \to \mathbb{R}$ from an observed one $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ which is degraded and contaminated by noise. The degradation model that we consider is the following:

$$f = u + \sqrt{u}\eta, \tag{1}$$

where $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ is a positive function and follows the Rayleigh-distribution. The reconstruction problem based on model (1) is an ill-posed inverse problem and thus regularization techniques are needed to overcome ill-posedness. Generally, the regularization technique turns the reconstruction problem based on model (1) into a well-posed optimization one where the energy to be minimized is the sum of a regularization term (mostly a semi-norm of a functional space fixed a priori) and a data fitting term. The main issue is how to choose the "best" regularization term which can selectively smooth a noisy image without losing significant features such as points and filaments. In this paper, we chose to minimize the following energy:

$$E_{p(x)}(u) := \int_\Omega \tfrac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega \frac{(f-u)^2}{u}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

where $p(\cdot)$ is a measurable positive continuous function satisfying $p(x) \in]1, 2]$. The first part of the energy $E_{p(\cdot)}(\cdot)$ is the regularization term, the second one is the data fitting term and $\lambda > 0$ is weighting parameter. The smoothness of the solution is driven by the variable exponent $p(\cdot)$ which will be chosen adaptively in order to slow diffusion near thin-structures in order to sharpen and highlight them, and enhance diffusion in homogeneous regions. The restoration task is carried out in two steps: In an initial step, we use the topological gradient method for the biharmonic cost function (i.e. for $p(x) \equiv 2$), to detect important features. In a second step, we use the information furnished by the topological gradient (calculated for $p(x) \equiv 2$) in order to vary the exponent $p(\cdot)$ in the restoration process by considering a $p(\cdot)$-biharmonic model for $1 < p(x) \leq 2$.

This paper is organized as follows. In Section 2, we recall some basic notations and useful results of the generalized Lebesgue/Sobolev spaces. Then, we prove by standard variational techniques the existence of a minimizer of the energy (2). Section 3 is devoted to computing of the topological gradient for $p(\cdot) \equiv 2$. In section 4, we present the adaptive

algorithm and the numerical scheme used to solve our problem. Then, we treat some numerical examples to test its efficiency and robustness.

2. Mathematical formulation of the problem

Preliminaries and general notations

For a bounded Lipschitz open set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with sufficiently smooth boundary, we assume that the variable-exponent function $p(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ satisfies the following condition:

$$1 < p^- := \inf_{x\in\overline{\Omega}} \leq p(x) \leq p^+ := \sup_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \leq 2.$$

We denote by $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{2,p(x)}(\Omega)$ the variable-exponent generalized Lebesgue and Sobolev spaces, respectively. We denote by $|\cdot|_{p(x)}$ the norm of $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ and by $\|\cdot\|_{2,p(x)}$ the norm of $W^{2,p(x)}(\Omega)$ where

$$|u|_{p(x)} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leq 1\right\}, \quad \text{and} \quad \|u\|_{2,p(x)} = \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha u|_{p(x)}.$$

Both $(L^{p(\cdot)}(\Omega), |\cdot|_{p(\cdot)})$ and $(W^{2,p(\cdot)}(\Omega), ||\cdot||_{p(\cdot)})$ are separable and reflexive Banach spaces [6]. We introduce our working space which is defined as follows:

$$\mathcal{H}^{p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W^{2,p(\cdot)}(\Omega),$$

which is also a separable and reflexive Banach space [12] for the norm $||\cdot|| = |\Delta\cdot|_{p(x)}$.

Existence and uniqueness of solution

In the following proposition, we establish the well-posedness of the minimization problem (2).

Proposition 1. *Let $f \in W^{2,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ with $\inf_\Omega f > 0$, then, the energy* (2) *admits a unique minimizer u in $\mathcal{H}^{p(\cdot)}(\Omega)$ satisfying*

$$\inf_\Omega f \leq u \leq \sup_\Omega f.$$

Proof. The existence and uniqueness follow from the classical compactness, the semi-continuity and the strict convexity arguments of the energy $E_{p(\cdot)}(\cdot)$. □

It is also standard that the minimizer of $E_{p(\cdot)}(\cdot)$ is the unique weak solution of the problem:

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(x)} u + D_u\Phi(u, f) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

where $\Delta^2_{p(x)}u := \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$ is the $p(\cdot)$-biharmonic operator and $D_s\Phi(s,t) = \frac{s^2-t^2}{s^2}$ is the first derivative of $\Phi(s,t) = \frac{(t-s)^2}{s}$ with respect to $s \in \mathbb{R}^+_*$.

3. The topological gradient method

As mentioned in the introduction, we consider the topological gradient for the $p(\cdot)$-biharmonic operator only for the particular case $p(x) \equiv 2$. In what follows, we recall the basic idea of the topological gradient method. The starting point of this method is to insert a small crack $\sigma_\varepsilon := \{x_0 + \varepsilon\sigma(n)\}$ in the domain Ω, where $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\sigma(n)$ is a straight crack, and n is a unit vector normal to the crack and to minimize the energy norm outside the important features:

$$j(\Omega \setminus \sigma_\varepsilon) := J_2(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} |\Delta u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x,$$

where u_ε is the unique solution of the following problem defined on the *perturbed domain* $\Omega_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \Omega \setminus \overline{\sigma}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon + D_u\Phi(u_\varepsilon, f) = 0, & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon = 0, & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{4}$$

where $\Delta^2 := \Delta\Delta$ is the bilaplace operator and $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \sigma_\varepsilon$.

Measuring the impact of such a modification of the domain on this cost function, the topological sensitivity method provides an asymptotic expansion of $j(\Omega_\varepsilon) - j(\Omega)$ as ε goes to zero. Generally, this asymptotic expansion can be written as follows [1, 2, 3, 8]:

$$J_2(u_\varepsilon) - J_2(u_0) = \rho^2 G(x_0, n) + o(\rho^2),$$

where the topological gradient is

$$G(x_0, n) = -\frac{2\pi}{3}\Delta u(x_0)(n,n)\Delta v(x_0)(n,n), \tag{5}$$

and v is the solution of the following adjoint problem: *Find* $v \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ *such that*

$$\begin{cases} \Delta^2 v + D_u\Phi^2(u, f)v = -\Delta^2 u, & \text{in } \Omega, \\ v = \Delta v = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Therefore, the topological gradient (5) can be written as [4]:

$$G(x_0,\theta) = -\frac{2\pi}{3}P\Big(\partial_{xx}u_0(x_0), \partial_{yy}u_0(x_0), \partial_{xy}u_0(x_0), \theta\Big)P\Big(\partial_{xx}v_0(x_0), \partial_{yy}v_0(x_0), \partial_{xy}v_0(x_0), \theta\Big),$$

where $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ is the π-periodic function with respect to θ given by:

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos(2\theta) + \gamma \sin(2\theta).$$

4. Implementation

The smoothness of solution of the minimization problem (2) is driven by the variable exponent $p(x)$. The selection of $p(\cdot)$ is performed with the help of the topological gradient which has been used as an efficient edge- and thin structure-detector. This particularity makes it well suited to control and locally select the exponent using the following algorithm:

Algorithm 1 MAIN ALGORITHM

Given f and λ.

1) For $p(\cdot) \equiv 2$, compute u and v which solve equations (4) and (6), respectively.

2) Compute the topological gradient $G(x_0, n)$ for each point $x_0 \in \Omega$.

3) Update $p(\cdot)$ to obtain a new exponent $p_a(\cdot)$ and solve (3) for $p(\cdot) \equiv p_a(\cdot)$.

In order to update to exponent $p(\cdot)$, we use the following formula:

$$p_a(x) = 1 + \exp(-\kappa |G(x, n)|), \ \forall x \in \Omega,$$

where $\kappa > 0$ is a constant. In homogeneous regions, we have $G(x, n) \approx 0$ leading to a new exponent $p_a(x)$ close to 2. Then, the model behaves like the biharmonic equation leading to strong diffusion and hence noise is damped. Near thin-structures, $G(x, n) \approx 0$ is very important and therefore $p_a(x)$ will be close to 1 which slows down diffusion. However, for such a choice of $p_a(\cdot)$, equation (2) is strongly nonlinear. For that, we introduce an artificial time variable t and for any fixed number T, we transform our problem to the following time-dependent one:

$$\begin{cases} u_t = -\nabla E_{p(\cdot)}(u), & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u(., t = 0) = f, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

After that, we consider *the splitting convexity* method (see [5, 7]) to solve problem (7). The basic idea of this method is to split the functional $E_{p(\cdot)}$ into a convex part treated implicitly, and a concave one treated explicitly. In our case, we split the energy $E_{p(\cdot)}$ as follows:

$$E_{p(\cdot)} = E_{1,2} - E_{2,p},$$

where

$$\begin{cases} E_{1,2} = \dfrac{c_1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 \,\mathrm{d}x + \dfrac{c_2}{2}\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x, \\ E_{2,p} = -\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)} \,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \Phi(u,f)\,\mathrm{d}x + \dfrac{c_1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \,\mathrm{d}x + \dfrac{c_2}{2}\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

and c_1 and c_2 are two positive constants. Let τ be the time-step, and write $t_k = k\tau$, $u^k(x) = u(x, t_k)$, with $k = 1, 2, \ldots, [T/\tau] - 1$, then, at each time step, we solve:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + c_1\Delta^2 u^{k+1} + c_2 u^{k+1} = \Delta^2_{p(x)} u^k + c_1\Delta^2 u^k + c_2 u^k + \lambda D_u\Phi(u^k, f).$$

5. Numerical experiments

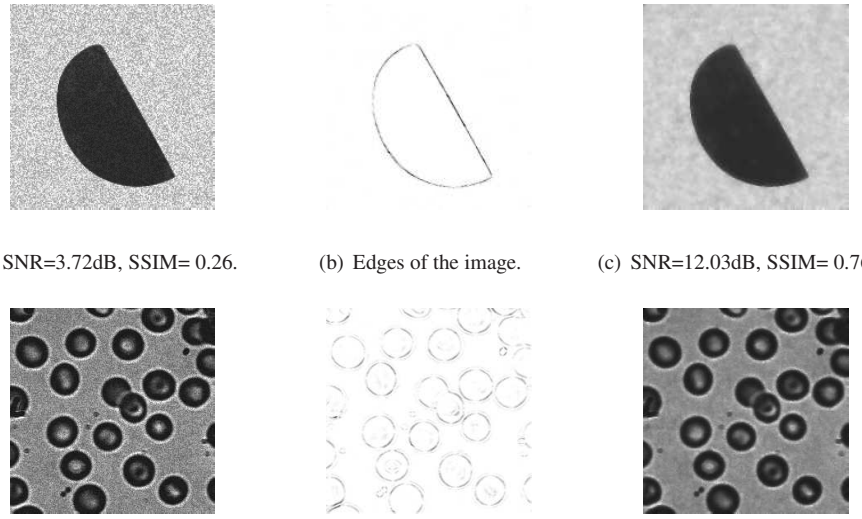
In the following, we present some numerical results to illustrate the performance of the proposed approach for the speckle noise removal and thin-structures detection. In Figure 1, we consider a synthetic and blood cells images which are corrupted by speckle noise with variance $\sigma^2 = 0.02$. The images illustrated below show the efficiency of the topological gradient method for the detection of edges and/or thin structure and the nonlinear $p(\cdot)$-Kirchhoff model for the denoising task. The main difference between the noisy image (see Figures 1(a) and 1(d)) and restored one (see Figures 1(c) and 1(f)) is compared quantitatively by using the SNR and SSIM indicators.

6. Conclusion

In this paper, we have presented a new approach to restore images corrupted by speckle multiplicative noise. The proposed approach combines the advantages of the topological gradient method for thin-structures detection and the anisotropic diffusion model based on the $p(\cdot)$-Kirchhoff operator for the denoising. The numerical experiments show the good quality in the recovering of the thin structures as well as the image denoising.

7. References

[1] S. AMSTUTZ, A. A. NOVOTNY, N. VAN GOETHEM, "Topological sensitivity analysis for elliptic differential operators of order $2m$", *Journal of Differential Equations*, vol. 256, num. 4, pp. 1735–1770, 2014.



(a) SNR=3.72dB, SSIM= 0.26. (b) Edges of the image. (c) SNR=12.03dB, SSIM= 0.76.

(d) SNR=17.13dB, SSIM= 0.59. (e) Thin structures of the image. (f) SNR=21.02dB, SSIM= 0.8

Figure 1. *From left to right and top to bottom: Noisy image, detected important features and restored image.*

[2] G. AUBERT, A. DROGOUL, "Topological gradient for a fourth order operator used in image analysis", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 21, num. 24, pp. 1120–1149, 2015.

[3] D. AUROUX, M. MASMOUDI, "Image processing by topological asymptotic expansion", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 33, num. 2, pp. 122–134, 2009.

[4] A. DROGOUL, "Numerical analysis of the topological gradient method for fourth order models and applications to the detection of fine structures in imaging", *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 7, num. 4, pp. 2700–2731, 2014.

[5] D. J. EYRE, "An unconditionally stable one-step scheme for gradient systems", Preprint, University of Utah, Salt Lake City, 1998.

[6] X. FAN , D. ZHAO, "On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 263, pp. 424–446, 2001.

[7] K. GLASNER, S. ORIZAGA, "Improving the accuracy of convexity splitting methods for gradient flow equations", *Journal of Computational Physics*, vol. 315, num. 15, pp. 52–64, 2016.

[8] L. JAAFAR BELAID, M. JAOUA, M. MASMOUDI, L. SIALA, "Application of the topological gradient to image restoration and edge detection", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 32, num. 11, pp. 891-899, 2008.

[9] Z. JIN , X. YANG, "A variational model to remove the multiplicative noise in ultrasound images", *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 39, num. 1, pp. 62–74, 2011.

[10] K. KRISSIAN , R. KIKINIS , C-F. WESTIN , K. G. VOSBURGH, "Speckle-constrained filtering of ultrasound images", *in: 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, vol. 2, pp. 547–552, 2005.

[11] T. LOUPAS, "Digital image processing for noise reduction in medical ultrasonics", *Ph.D. thesis*, University of Edinburgh, UK, 1988.

[12] A. ZANG, Y. FU, "Interpolation inequalities for derivatives in variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces", *Nonlinear Anal.*, vol. 69, pp. 3629–3636, 2008.

Rubrique

Asymptotic expansion of transmission eigenvalue problem in a domain with thin layer

Boujlida Hanen [1]

[1] Higher School of Sciences and Technology of Hammam Sousse, Sousse University,
Street Lamine Abassi, Hammam Sousse 4011
Laborator: LAMMDA, LR16ES13.
boujlida.hanen12@gmail.com

RÉSUMÉ. Dans cette communication, on considère le problème des valeurs propres de transmission dans un domaine régulier entouré par une couche mince d'epaisseur ϵ, où les deux mileux ont des indices de réfraction différentes. Puis, on étudie le développement asymptotique des valeurs propres de transmission. Plus précisèment, on construit formellement un développement asymptotique de la première valeur propre de transmission lorsque $\epsilon \to 0$. Ensuite, on justifie l'écriture formelle de la première valeur propre de transmission, en utilisant le théorème d'Osborn.

ABSTRACT. In this paper, we consider the transmission eigenvalue problem for an impenetrable medium surrounded by a thin layer of inhomogeneous material of different refractive index. We derive an asymptotic expansion for the first transmission eigenvalue with respect to the thickness of the thin layer. In addition, we prove a convergence result of the asymptotic expansion for the first transmission eigenvalue. We shall use the Osborn theorem.

MOTS-CLÉS : valeur propre de transmission, couche mince, problème inverse...

KEYWORDS : transmission eigenvalues, thin layers, inverse scattering...

1. Introduction

In the recent years, the interior transmission eigenvalue problem has become an important area of research in inverse scattering theory. For a connection of the interior transmission problem with the scattering problem we refer the reader to $[6, 7, 8, 12...]$, where Paivarinta and Sylvester $[12]$ published the first results related to the existence and discreteness of transmission eigenvalue.

In this paper we consider the transmission eigenvalue problem for an impenetrable medium coated by a thin layer of inhomogeneous material of different refractive index, in particular, we will focus on the study of the asymptotic expansion eigenvalues as $\epsilon \to 0$, where ϵ the thickness of the thin layer. Our asymptotic analysis is based on an iterative approach. Many authors are interested in the asymptotic analysis of the transmission eigenvalue problem. A worth mentioning work elaborated by Haddar and all $[6, 7, 8]$ treated the same problem with a Dirichlet obstacle coated by a thin layer of non-absorbing media. Then, the main goal of this work, inspired by the ideas of $[6]$, is to derive rigorous asymptotic expansion for the first transmission eigenvalue in terms of the thickness of the thin layer ϵ. In addition, We deduce the convergence of the zero-order term in the expansion by using the Osborn theorem $[11]$.

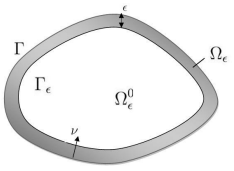
The outline of the paper is as follows. In the next section, we formulate the transmission eigenvalue problem. In section 3, we derive the formal asymptotic expansion for transmission eigenvalues and provide explicit formulas for the terms up to order 2. Finally, we justify the asymptotic expansion formally for the first transmission eigenvalue.

2. Formulation of the problem

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with smooth boundary Γ. For any $s \in \Gamma$, let $\nu(s)$ be the unit inward normal at s. We denote by

$$\Omega_\epsilon^0 = \{x \in \Omega, d(x, \Gamma) > \epsilon\}$$

where Γ_ϵ its boundary. The simply domain Ω_ϵ^0 represents here the impenetrable object and Ω_ϵ represents the thin layer (as shown in the following figure).



We will be interested by the following transmission problem :

$$\begin{cases} \Delta w_\epsilon + k_\epsilon^2 n_\epsilon(x) w_\epsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Delta v_\epsilon + k_\epsilon^2 v_\epsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ w_\epsilon = v_\epsilon & \text{on} \quad \Gamma, \\ \dfrac{\partial w_\epsilon}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} & \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

where n_ϵ is defined by

$$n_\epsilon(x) = \begin{cases} n_0 & \text{in } \Omega_\epsilon^0, \\ n_1 & \text{in } \Omega_\epsilon. \end{cases}$$

Definition 2.1 *A number k_ϵ^2 is called a transmission eigenvalue if there exists a non-trivial solution (w_ϵ, v_ϵ) solving (1).*

3. Formal asymptotic expansion

In this section, we derive formally the asymptotic expansion for the transmission eigenvalues and the associated eigenfunctions. Then, we insert the following ansatz :

$$k_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \lambda_j, \tag{2}$$

$$\hat{w}_\epsilon(s,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \hat{w}_j(s,\xi), \tag{3}$$

$$w_\epsilon^-(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j w_j^-(x), \tag{4}$$

$$v_\epsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j v_j(x), \tag{5}$$

for $\xi = \frac{\eta}{\epsilon}$. The functions $\hat{w}_j$ are defined on $[0, L] \times [0, 1]$. Using the expression for the Laplace operator in the local coordinates

$$\Delta = \frac{1}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\kappa}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

we obtain that $\hat{w}_\epsilon$ satisfy

$$\frac{1}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial w_\epsilon}{\partial s} + \frac{\kappa}{(1+\epsilon\xi\kappa)} \frac{\partial w_\epsilon}{\partial \xi} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 w_\epsilon}{\partial \xi^2} + k_\epsilon^2 n_1 w_\epsilon = 0 \; in \; [0, L] \times [0, 1] \tag{6}$$

together with the boundary conditions

$$\hat{w}_\epsilon(s,0) = v_\epsilon(s,0), \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \hat{w}_\epsilon}{\partial \xi}(s,0) = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \eta}(s,0). \tag{7}$$

By equating the terms of same order in ϵ, the function $\hat{w}_j$ for $j \in \mathbb{N}$, solves

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{w}_j = -\displaystyle\sum_{l=1}^{5} A_j \hat{w}_{j-l} & \text{in} \quad [0, L] \times [0, 1], \\ \hat{w}_j(s,0) = v_j(s,0) & s \in [0, L], \\ \dfrac{\partial \hat{w}_j}{\partial \xi}(s,0) = \dfrac{\partial v_{j-1}}{\partial \eta}(s,0) & s \in [0, L], \end{cases} \tag{8}$$

with the convention that $\hat{w}_j = v_j = 0$ for $j \leq 0$. The functions (w_j^-, v_j^-) satisfies

$$\begin{cases} \Delta w_j^- + \lambda_0 n_0 w_j^- = -\displaystyle\sum_{l=1}^{j} \lambda_l n_0 w_{j-l}^- & \text{in} \quad \Omega, \\ \Delta v_j^- + \lambda_0 v_j^- = -\displaystyle\sum_{l=1}^{j} \lambda_l v_{j-l}^- & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

The resolution is then iterative. Let us make the first terms explicit. Now we provide explicit formulas for the terms until to order 2 for transmission eigenvalues.
Order 0**.** We have $\hat{w}_0(s,\xi) = v_0^-|_\Gamma$ and the functions (w_0^-, v_0^-) solves the following system

$$\begin{cases} \Delta w_0^- + \lambda_0 n_0 w_0^- = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Delta v_0^- + \lambda_0 v_0^- = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ w_0^- - v_0^- = 0 & \text{on} \quad \Gamma, \\ \dfrac{\partial w_0^-}{\partial \eta} - \dfrac{\partial v_0^-}{\partial \eta} = 0 & \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{10}$$

where λ_0 is the transmission eigenvalue associated eigenfunctions (w_0^-, v_0^-).
Order 1**.** We iterate the process once more, we obtain

$$\hat{w}_1(s,\xi) = \frac{\partial v_0^-}{\partial \eta}|_\Gamma \xi + v_1^-|_\Gamma.$$

We deduce that (w_1^-, v_1^-) solves

$$\begin{cases} \Delta w_1^- + \lambda_0 n_0 w_1^- = -\lambda_1 n_0 w_0^- & \text{in} \quad \Omega, \\ \Delta v_1^- + \lambda_0 v_1^- = -\lambda_1 v_0^- & \text{in} \quad \Omega, \\ w_1^- - v_1^- = 0 & \text{on} \quad \Gamma, \\ \dfrac{\partial w_1^-}{\partial \eta} - \dfrac{\partial v_1^-}{\partial \eta} = \lambda_0(n_0 - n_1) w_0^- & \text{on} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{11}$$

where λ_1 is defined as follows

$$\lambda_1 = \lambda_0(n_0 - n_1) \left[\int_\Omega n_0 |w_0^-|^2 - |v_0^-|^2 \right]^{-1} \|w_0^-\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{12}$$

The asymptotic expansion obtained above is formal. Next, we are interested in justifying the asymptotic expansion.

4. Convergence analysis

The aim of this section is to justify the asymptotic expansion formally obtained in section (3). Furthermore, we will treat only the convergence analysis for the first transmission eigenvalue that we denote by $\lambda_\epsilon^1 = (k_\epsilon^1)^2$. More precisely, we justify the following expansion :

$$\lambda_\epsilon^1 = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + O(\epsilon^2)$$

where λ_0 is the first transmission eigenvalue in Ω, λ_1 is given by (12).

Theorem 4.1 *Let λ_ϵ^1 be the first real interior transmission eigenvalue, then for sufficiently small $\epsilon > 0$,*

$$\lambda_\epsilon^1 = \lambda_0 + O(\epsilon).$$

The proof of this theorem is inspired by the Osborn theorem $[11]$.

Acknowledgments

The research of H.B is supported by Sousse University (LAMMDA laboratory). The author thanks Professors Moez Khenissi and Houssem Haddar for their supervision and their support.

5. Bibliographie

[1] H. AMMARI, S. MOSKOW, « Asymptotic expansions for eigenvalues in the presence of small inhomogeneities. », *Math. Meth. Appl. Sci*, vol. 26, 67-75 2003.

[2] H. AMMARI, S. MOSKOW AND M. VOGELIUS, « Boundary integral formulae for the reconstruction of electric and electromgentic inhomogeneties of small volume. », *ESAIM Control Optim. Calc. Var*, vol. 9, 4966 2003.

[3] S. AGMOND, « Lectures on Elleptic Boundary Value Problems. », *D. van Nostrand, Princeton, N.J.1965*.

[4] A. BENDALI, K. LEMBRABET, « The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation . »,*SIAM J. Math. Anal.*, vol. 56 $1664 - 1693$.

[5] F. CAKONI, S. MOSKOW, « Asymptotic expansions for transmission eigenvalues for media with small inhomogeneities. », *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 42 n^{o} 1,2010, $145 - 162$.

[6] F. CAKONI, H. HADDAR, N.CHAULET,, « Asymptotic analysis of transmission eigenvalue problem for a Dirichlet obstacle coated by a thin layer of a non-absorbing media. », *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 80 n^{o} (2015), 1063-1098.

[7] F. CAKONI, D. GINITIDES, H. HADDAR,, « The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. SIAM J. Math. Anal. 42, $527 - 578$.. », *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 42 n^{o} $527 - 578$.

[8] F. CAKONI, A. COSSONNIÈRE, H. HADDAR, « Transmission eigenvalues for inhomogeneous media containing obstacles. », *Inverse Problem and Imaging.* vol. 6, n^{o} 3, 2012 $373 - 398$.

[9] F. CAKONI, A. COLTON, H. HADDAR, « The interior transmission problem regions with cavities. », *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 42 n^{o} 1,2010, $145 - 162$.

[10] A. HENROT,, « Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators. », *Boston : Birkhäuser.*,

[11] S. MOSKOW, « Nonlinear eigenvalue approximation for compact operators. », .

[12] L. PAIVARINTA, J. SYLVESTER, « Transmission eigenvalues. », *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 40, $738 - 753$.

[13] M. REED AND B. SIMON, « Functional Analysis. », *Academic Press, 1980*.

Bio-mechanical system to study some predictions on the healing of wound cell sheet

Boutheina Yahyaoui [1] — Mekki Ayadi [2] — Abderahmane Habbal [3]

[1] Tunis El Manar University, National Engineering School of Tunis
ENIT-LAMSIN BP 37, 1002 Tunis, LR 95–ES–20
Tunisia
boutheinayahyaoui@hotmail.fr
[2] LAMMDA, Higher School of Sciences and Technology of Hammam Sousse
Street Lamine Abassi, Hammam Sousse 4011
Tunisia
mekki.ayadi@enis.rnu.tn
[3] INRIA, 2004 route des lucioles-BP 93
06902 Sophia Antipolis Nice cedex
France
Abderrahmane.HABBAL@unice.fr

RÉSUMÉ. La contraction des feuillets cellulaires blessés due à des forces de traction exercées dans les lignes épithéliales, ce qui réduit efficacement la taille de la blessure et aide sa guérison. Dans ce travail, nous présentons un nouveau modèle simplifié basé sur les travaux de Maini et ses collègues [1] en 1998. Un modèle mécano-biologique décrit ce phénomène biologique de cicatrisation et la permanence de profil de déplacement de tissu cellulaire contracté. Pour le modèle mathématique, nous proposons une étude des modèles de réaction-diffusion de type Fisher-KPP couplés au équations de la mécanique des milieux continus, pour la simulation de migration de feuillets cellulaires, en se basant sur la méthode des différences finies en espace et le schéma de Crank-Nicolson en temps avec un solveur Newton du termes non linéaires.

ABSTRACT. Wound contraction due to traction forces applied on the epithelial lines, which reduce the wound size and help its healing. In this work, we present a new model based on the work of Maini et all [1] published in 1998. A mechano-biological model describe the wounded cell sheet contraction and the permanence of contracted tissue displacement profile. For the mathematical model, we propose a numerical solution of the nonlinear reaction-diffusion equations coupled to mechanic model. We use finite difference method in space and Crank-Nicolson scheme in time with a Newton solver of the nonlinear term.

MOTS-CLÉS : Contraction cellulaire, cellules MDCK, mécanobiologie, simulation 2D, dynamique cellulaire

KEYWORDS : Wound contraction, MDCK cells, mechanobiology, simulation 2D, wound edge dynamics

1. Introduction

Modeling cell dynamics is very important issue at the intersection of three major science fields, biology for the part of experimental measurement and filtering data, mechanical for modeling the tissue movement, mathematical and numerical modeling to quantify biological and mechanical quantities previously mentioned. A large explosion of research related to cell dynamics and its important role for the resolution of a complex biological problems. We can take as example the interested publishement of J. D. Murray describing the relationship between biology and mathematics [2, 3]. He proposed a vision of a mathematician to study reaction-diffusion models that describe the problem of interaction between biological, chemical and mechanical phenomena. Mathematical Biology allows to pass from cell dynamic analysis to a mechano-biological system governed by reaction-diffusion equations, coupled to mechanics equations with a viscoelastic behavior, and to well explain the phenomena of haptotaxis and haptokinesis among other characteristics of cell movement ([4],[5],[6], [7]), where Gaffney et *all* in [4] showed the importance of corneal epithelial sheets for specialized healing, and defined a biochemical model that focuses on the epidermal growth factor (EGF).

Many researches have the honor to work for the resolution of many biological phenomena such as the wounded cell-sheet closure. These include for example Sherratt et *all* [8] where they offered mono-dimensional and another two-dimensional model which include only mechano-biological interaction to describe cellular dynamics during embryonic dermal wounds healing. In [9], Goto used mechano-chemical model, which is a simplified version of the full model $(1.1) - (1.3)$ mentioned below, for establishment of a somite to better understand the role played by the mechanical aspects of the cells and the extracellular matrix (ECM) in the somitogenesis.

In order to build a powerful mechano-biological model for describing biological problems difficult to solve, we refer the interested readers to this articles [10, 11, 12, 13]. The authors of these papers considered that the cell-sheet healing is largely a mechanical process where the chemical effect simply acts to increase the overall behavior. In [10] Lee et *all* have a biophysical description of the collective epithelial cells migration, they proposed a model that captures quantitatively cellular dynamics for wound healing and reproduced a complex cellular flow, where, results suggest that healing requires a mechanical process modified by the cell signaling, they stressed the important role of cellular exploration using a Maxwell viscoelastic model for healing of MDCK cell sheets and they carried out numerical tests in 1D and 2D. In [11], Vedula et *all* showed that the geometrical propretie of the environment regulate the cell migration by cell interaction, in fact, using micro fabrication technique an epithelial cell-sheet can migrate into bands whose width varies from one to many cell diameters, they identified the collective migration patterns in response geometric constraints and observed the reduction of the strips width during each migration. In [12], Saez and his colleagues studied the behavior of epithelial cells MDCK type on micro-fabricated supports designed to calculate the both interaction cell-cell and support-cell, covered by a dense network of flexible micro-pillars whose deviation allows us to measure the traction forces which occur during cell healing, the authors also showed experimentally using a deep study that the traction forces must be strong enough on the edge and becomes smaller by bringing the wound sheet center. In [13] Alexander J. Kabla realized a flexible framework for cell motility to study the requirement for the cell-coordination, he founded that cell motility and mechanical interaction are sufficient to produce a variety of commonly observed behavior "in vitro" and

"in vivo", also he noted that the migration cell-sheet and sensitivity cells are examples of behavior emerging spontaneously from simple assumption, which could explain why the collective effect is omnipresent in nature.

The layout of the paper is as follows. In section 2, the mathematical model, boundary conditions and initial conditions will be presented. Next, we are interested to perform some numerical simulations with two academic geometries to understand the wound geometry effect. Finally, the paper is closed with a comparison between the calculated variation of fronts and those experimental ones, using an experimental observation on MDCK cell monolayer.

2. A mathematical Setting

In this section, we are interested to define the mathematical model, namely a biomechanical system, who describe the wounded cell sheet healing. Olsen, Maini and Sheratt [1] presented a complete coupled model whose basic variables are cell density n, the ECM density ρ and the displacement of cell tissue u, see the following equations :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div[n\frac{\partial u}{\partial t} + \chi(\rho)n\nabla\rho - D(\rho)\nabla n] = rn(1-n), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div[\rho\frac{\partial u}{\partial t}] = \varepsilon n(1-\rho), \tag{1.2}$$

$$div(\sigma) = \rho s u, \tag{1.3}$$

where

• $div(n\frac{\partial u}{\partial t})$ represents the passive convection, while, $div(\chi(\rho)n\nabla\rho)$ represents the haptotaxis phenomenon, $(-div(D(\rho)\nabla n)$ represents the haptokinesis phenomenon and $rn(1-n)$ represents the cell proliferation,

• $div(\rho\frac{\partial u}{\partial t})$ represents the passive convection, while, $\varepsilon n(1-\rho)$ represents the collagen biosynthesis and the degradation for cell fibroblasts,

• $\sigma = \sigma_{ECM} + \sigma_{cell}$ with $\sigma_{ECM} = \mu_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mu_2\frac{\partial \Theta}{\partial t}I + \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon(u) + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta I)$ represents the viscous and elastic forces, while, $\sigma_{cell} = cnI$ represents the traction forces ; $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ is the strain tensor and $\Theta = tr(\varepsilon)$ is the dilatation of the matrix material.

In what follows, only the biological and mechanical effects are considered, the chemical effect is neglected. Hence, the full coupled model $(1.1) - (1.3)$ reduces to the Fisher-KPP equation coupled with mechanical process. We denote by Ω a rectangular domain, by Γ_D its vertical sides and by Γ_N its horizontal ones (See Fig.1).

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + div[n\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla n] = rn(1-n), \quad r,\ D \geq 0, \\ div[\frac{\partial u}{\partial t}] = 0, \\ div(\sigma) = su, \\ \text{where } \sigma = \mu_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{E}{1+\nu}(\epsilon(u) + \frac{\nu}{1-2\nu}tr(\epsilon)I) + cnI \end{cases}$$

• ***Initial Conditions*** :

The model is initialized at the onset of the migration phase. At this stage, cell sheet are still not move in the wound nor in the neighborhood, that is, $u(x,0) = 0$ for $x \in \Omega$. For initial density, we choose n who present a cell-sheet initially injured (Heaviside function).

$$\begin{cases} n = 0 & \text{in the wound} \\ n = 1 & \text{in the neighborhood of the wound} \end{cases}$$

• ***Boundary Conditions*** :
• **Cell density** :
⋆ **Inhomogeneous Dirichlet Condition** : "$n = 1$ on vertical sides (Γ_D)".
⋆ **Homogeneous Neumann Condition** : "$\frac{\partial n}{\partial \nu} = 0$ on horizental sides (Γ_N)" where $\frac{\partial n}{\partial \nu}$ is the normal derivative of n.
• **Cell displacement** : Homogeneous Dirichlet Condition $u = 0$ in $\Gamma_D \cup \Gamma_N$.

The boundary condition above are relevant when the image is only a part of a large scraped observation area. The Neumann condition amounts to assume that the cell density flow is normal to the leading edge on the horizontal sides where the domain cutoff was performed, which means that no cells fill the wound from either top or bettom sides. Displacement boundary effects on the results are disregarder by taking Ω sufficiently large. Under this premise, it is reasonable to prescribe no displacement at the boundary.

The bio-mechanical model is solved using a finite difference method in space and a cranck Nicholson scheme in time, the Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ being approximated by a centered five points finite difference scheme. The chosen scheme above offers an order error of consistency equal to two $O(h^2 + k^2)$.

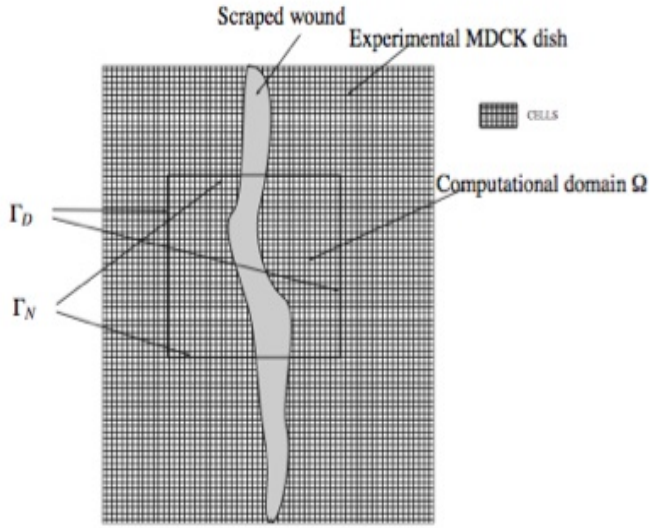


Figure 1. *A neighborhood of the wound.*

3. Numerical implementation of the mechano-biological model

3.1. Parameter intervals

We set the confidence interval of biological and mechanical parameters in the following table 1 :

Parameter	Description	Value	Observations
D	Diffusion coefficient	$[1.0e-08,\ 1.0e-02]\ \ cm^2/day$	estimated numerically
r	Proliferation rate	$[1.0e-06\ ,\ 1.0e+01]\ \ day^{-1}$	estimated numerically
E	Young's modulus	$10\ N/cm^2$	-
ν	Poisson's coefficient	0.3	-
μ	Shear viscosity	$0\ N/cm^2$	-
s	Tethering factor	$[1.0e-05\ ,\ 1.0e+05]N/cm\ g$	estimated numerically
c	Traction coefficient	$[1.0e-05\ ,\ 1.0e+02]N/g$	estimated numerically

Tableau 1. *List of parameters necessary to coupled model*

3.2. The contraction process in time

Figure 2 shows the rectangular wound contraction over time : cell densities move to different values between 0 and 1 in the wound to 1 in the neighborhood which shows the healing (Final distribution (t=30 days) cell densities equal to 1). Dashed-line presents the evolution of cell density from the wound center towards its neighborhood for various instants (t=0 (initial distribution), t=1/2, t=5/2, t=15/2, t=30(final distribution)).

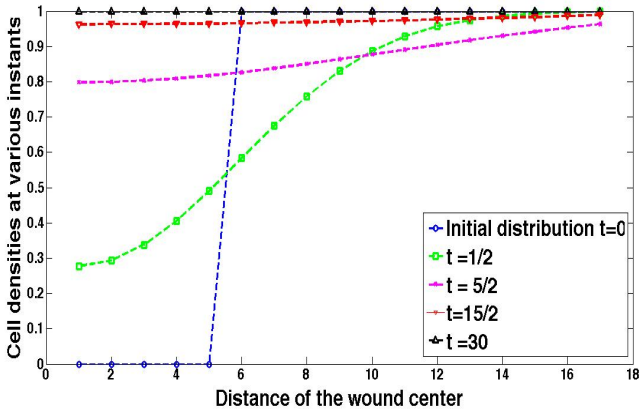


Figure 2. *Contraction of a rectangular wound in 30 days : cell densities at various instants.*

3.3. Wound geometries

We choose two different wound geometries of the same size but different shapes (circular wound and rectangular) : The rectangular wound is supposed to occupy the region $\Omega_w\ =]-0.1, 0.1[\times]-0.2, 0.2[$, whereas, the computational domain is $\Omega\ =\ ]-0.5, 0.5[\times]-0.5, 0.5[$. And the circular one whose surface is the same as the rectangular one (radius R=0.16, Area = $\pi * R^2\ =\ 0.08$). The evolution of the density over time is shown in Fig 3 for a rectangular wound, Fig 4 for a circular one, which show that we have a healing of the injury cell sheet. To understand the wound geometry effect, we can compare the contraction progress of the wound. From Fig 5 it may be noted that the circular injury heals faster than the rectangular one.

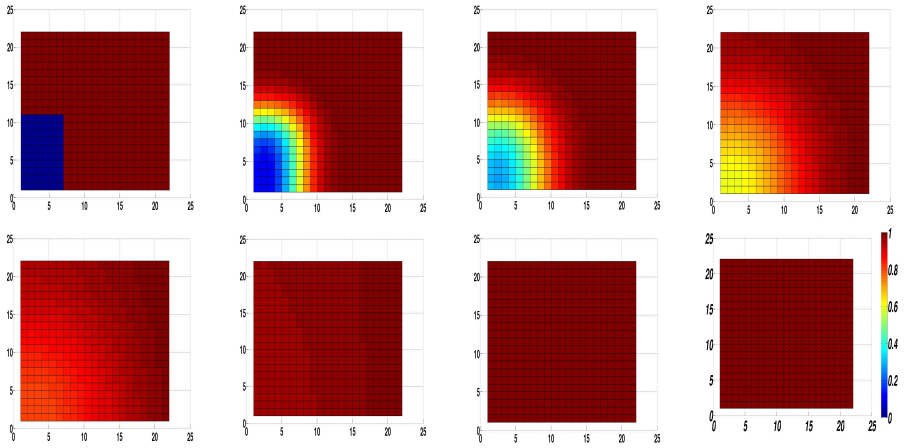


Figure 3. *Density distribution for the rectangular geometrie over time during 30 days at (a) t =0, (b) t = 1/4, (c) t= 1/2, (d) t= 1.25, (e) t =2.5, (f) t=7.5, (g) t=15 and (h) t=T=30.*

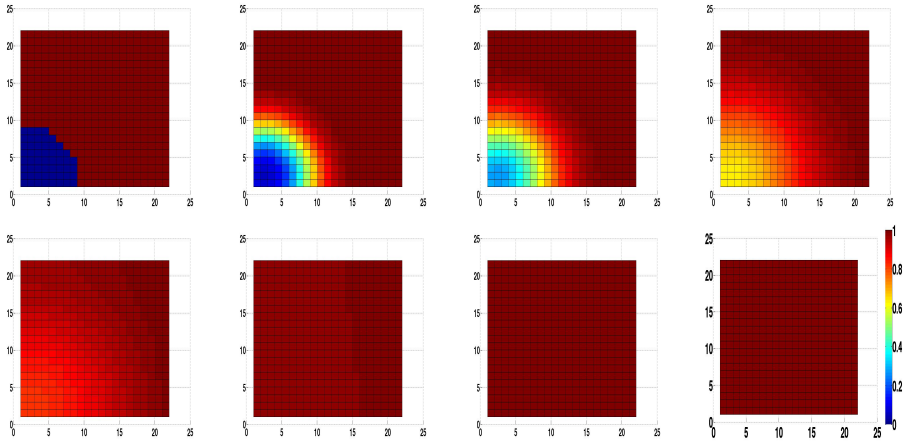


Figure 4. *Density distribution for the circular geometrie over time during 30 days at (aa) t =0, (bb) t = 1/4, (cc) t= 1/2, (dd) t= 1.25, (ee) t =2.5, (ff) t=7.5, (gg) t=15 and (hh) t=T=30.*

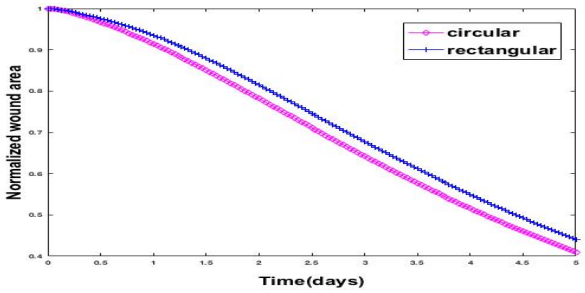


Figure 5. *Evolution of the wound area with two geometries.*

4. Mechano-biological model and biological sequence

In this section we are interested to implement numerically the healing evolution of an injury cell-sheet MDCK type, using the bio-mechanical model. In order to study the validity of our model, we performed experimental observations on the MDCK cell monolayer with inhibited condition migration. The obtained videoscopies allow to obtain the variations of area with good accuracy (see Fig.6). We were interested in comparing the calculated variations of fronts (Fig.7) to those experimental fronts (Fig.6), after a step of calibration parameters. In the both figures 6 and 7, the first two images in the first time (t = 0) are the same.

4.1. Experimental results

Figure 6. *Experimental healing of wounded cell-sheet over time at t = 0, t = 30, t= 50, t = 100, t= 130, t =166*

4.2. Numerical results

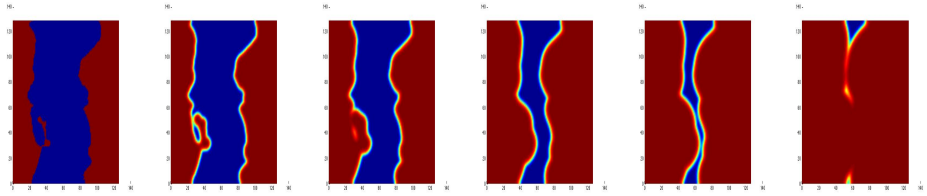


Figure 7. *Numerical healing of wounded cell-sheet over time at t =0, t=30, t = 50, t=100, t= 130, t =166*

5. Conclusion and perspectives

In order to model wound cell sheet healing, a coupled model, considering the biological and mechanical effects, was considered in this paper. The obtained results are better then those obtained with the Fisher-KPP equation. The latter only takes into account the biological effect. In order to better model the would healing of cell-shett, we are interested in confronting numerical results, obtained with our coupled model, with the experience. This confrontation leads to identify the parameters of diffusion and proliferation as well as the coefficients of traction and recall forces.

6. Bibliographie

[1] OLSEN L., MAINI P.K., SHERRATT J.A., « Spatially Varying Equilibria of Mechanical Models : Application to Dermal Wound Contraction », *Mathematical Bisciences*,vol. 147, n° 113, 1998.

[2] MURRAY J.D., « Mathematical Biology : I. An Introduction, Third Edition », *Springer,Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 17, 2001.

[3] MURRAY J.D. , « Mathematical Biology : II. Spatial Models and Biomedical Applications », *Springer,Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 18, 2011.

[4] GAFFNEY EAMONN A., MAINI PHILIP K., SHERRATT JONATHAN A., DALE PAUL D., « Wound healing in the corneal epithelium : Biological mechanisms and mathematical models », *J. Theor. Med.*, vol. 1, n° 13,1997.

[5] MAINI P.K., OLSEN L., SHERRATT J.A., « Mathematical models for cell-matrix interactions during dermal wound healing », *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, vol. 12, n° 9, 2002.

[6] PAGE KAREN M., MAINI PHILIP K., MONK NICHOLAS A.M., « Complex pattern formation in reactionÐdiffusion systems with spatially varying parameters », *Physica D*, vol. 202, n° 95, 2005.

[7] PERELSON A. S., MAINI P. K., MURRAY J. D., HYMAN J. M. , OSTER G. F.G. F., « Nonlinear pattern selection in a mechanical model for morphogenesis », *Journal of Mathematical biology. Springer Veriag*, vol. 24, n° 525, 1986.

[8] SHERRATT J. A., « Actin aggregation and embryonic epidermal wound healing », *Journal of Mathematical biology. Springer Veriag*, vol. 31, n° 703, 1993.

[9] GOTO Y., « A 2-dimensional mechanical model of the formation of a somite », *International journal of numerical analysis and modeling*, vol. 10, n° 1, 2013.

[10] LEE P., WOLGEMUTH C. W., « Crawling Cells Can Close Wounds without Purse Strings or Signaling », *PLoS Computational Biology*, vol. 7, 2011.

[11] VEDULA S. R. K., LEONG M. C., LAI T. L. , HERSEN P., KABLA A. J., LIM C.T., LADOUX B., « Emerging modes of collective cell migration induced by geometrical constraints », *PNAS*, vol. 109, 2012.

[12] SAEZ A., ANON E., GHIBAUDO M., O DU ROURE, MEGLIO J-M DI., HERSEN P., SILBERZAN P., BUGUIN A., LADOUX B., « Traction forces exerted by epithelial cell sheets », *J. Phys. : Condens. Matter*, vol. 22, n° 9, 2010.

[13] KABLA A. J., « Collective cell migration : leadership, invasion and segregation », *J. R. Soc. Interface*, vol. 9, 2012.

TAM TAM 2017

Une note sur les modèles INAR à changement de régimes Markovien

MS-INAR Models

Ouzzani Fares et Bentarzi Mohamed

Département de Recherche Opérationnelle
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Alger, Algérie
ouzzani-fares@hotmail.fr
mohamedbentarzi@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Cette communication traite quelques propriétés probabilistes et statistiques des modèles Autorégressifs à valeurs entières et à changement de régimes Markovien, qui se montrent adéquats les séries chronologiques à valeurs discrètes exhibant des changement soudains de comportement. Une étude de simulation intensive y est réalisée afin d'appuyer une méthode d'estimation, basée sur la maximisation de la vraisemblance.

MOTS-CLÉS : Séries chronologiques, Processus à valeurs entières, Changement de régimes Markovien, Modèles Autorégressifs.

1. Introduction

Nous rencontrons souvent des phénomènes chronologiques à valeurs entières dans notre vie, et ceci dans plusieurs domaines. Nous citons à titre d'exemples l'épidémiologie (le nombre d'infections par une certaine maladie comme la Campylobacteriosis, étudiée par Ferland et al en 2006), la sociologie (le nombre de personnes en chômage à court-terme étudié par Monteiro et al en 2010), la finance (quelques transactions financières à valeurs entières, la variation des nombres d'incidents financiers survenus, ...), et bien d'autres. Par conséquent l'idée de les modéliser en utilisant des outils mathématiquement connus pour des problèmes à valeurs réelles s'avère inappropriée, du moment que ceci ne reflète pas la nature discrète des séries sous étude.

Ce majeur inconvénient a donc motivé plusieurs chercheurs à proposer davantage de modèles de séries chronologiques qui prennent en considération la discrétion des données, tout en traitant les faits-stylisés rencontrés dans les phénomènes à valeurs réelles. Nous citons parmi leurs travaux le modèle INAR qui est une version analogue de l'Autorégressif (introduit par Al-Osh et Al-Zaid en 1987, et par Jin-Guan et Yuan en 1991), le modèle INGARCH qui traite l'hétérosédasticité fréquemment rencontrée (particulièrement en finance), introduit par Ferland et al en 2006, et le mélange de modèles INARCH qui se montrent adéquats pour la multimodalité (introduit par Zhu et al en 2010).

Cependant, plusieurs phénomènes présentent un (ou des) changement(s) brusque(s) dans leurs comportements, et ceci est fréquent en finance. Par conséquent un modèle qui capture cette caractéristique n'est rien d'autre qu'indispensable. Ainsi plusieurs chercheurs ont mis en oeuvre des techniques pour y remédier. Nous citons en particulier Hamilton (1989) qui a introduit une nouvelle approche basée sur les chaines de Markov cachées dans l'analyse des séries temporelles à valeurs réelles, et depuis son innovation, plusieurs chercheurs s'y intéressent. Malheureusement, peu d'attention y a été consacrée dans le cadre des séries chronologiques à valeurs entières, malgré l'augmentation du nombre de phénomènes qui présentent ces changements brusques de comportement, et ceci nous a donné une bonne motivation d'étudier un des modèles de séries chronologiques à valeurs entières, à savoir le modèle Autorégressif à valeurs entières (INAR) dans le cas où une chaine de Markov contrôle son comportement.

Ce travail porte donc sur l'étude probabiliste et statistique de ce modèle qu'on appellera par la suite "Markov Switching Integer Valued Autoregressive" et qu'on notera MS-INAR. Cette communication s'organise comme suit. Dans la seconde section nous présenterons une définition du modèle ainsi que les notations et les hypothèses principales, et la troisième section sera non seulement dédiée au problème d'estimation des paramètres de ce modèle, en adoptant la méthode de Taylor (2002), mais aussi à une étude de simulation intensive.

2. Définition du modèle

Dans la litérature des modèles à chaines de Markov cachée, (Hidden Markov Models ou HMM), le principe des changements de régimes repose sur le fait que la loi du processus en question dépend d'une chaine de Markov $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ à espace d'état discret, possédant K états distincts. Cette chaine est considérée homogène, ergodique et n'est pas influencée par le passé du processus, et ceci nous permet donc d'établir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \eta_{t-1} & \longrightarrow & \eta_t & \longrightarrow & \eta_{t+1} & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & Y_{t-1} & \longrightarrow & Y_t & \longrightarrow & Y_{t+1} & \longrightarrow \end{array}$$

Cette schématisation stipule qu'à un instant $t \in \mathbb{Z}$, connaissant l'état de la chaine de Markov à l'instant $t-1$, $(\eta_{t-1} = l)$, le processus sous étude, $Y_t \,|\eta_{t-1} = l$ n'est rien d'autre qu'un mélange de modèles avec comme probabilités d'appartenances $\alpha = (p_{l,1}, ..., p_{l,K})'$, où $p_{i,j} = P(\eta_t = j \,|\eta_{t-1} = i)$. Cette vision nous laisse définir notre modèle comme suit.

Définition : On dit qu'un processus aléatoire $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suit un modèle autorégressif à valeurs entières et à changement de $K-$régimes Markovien, d'ordres $p_1, ..., p_K$, et noté $MS - INAR(K, p_{1,}..., p_K)$, si sa forme s'étale comme suit :

$$\begin{cases} (Y_t \,|\eta_{t-1} = l) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}(\eta_t = k \,|\eta_{t-1} = l)\, X_{k,t} \\ \\ X_{k,t} = \sum_{i=1}^{p_k} \varphi_i^{(k)} \circ Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} \end{cases} \qquad l = 1, ..., K,\ t \in \mathbb{Z}, \qquad (2.1)$$

où

• "$\circ$" désigne l'opérateur d'amincissement binomial, introduit par Steutel et Van Harn, et défini tel que : $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Z_i$, avec $\{Z_i, i \in \mathbb{N}\}$ une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une Bernoulli à probabilité de succès $\alpha \in [0, 1]$,

• $\mathbf{1}(.)$, désigne la fonction de indicatrice, définie par

$$\mathbf{1}(x = y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

• Le processus $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ désigne une chaine de Markov à temps discret et à espace d'états fini $E_\eta = \{1, 2, ..., K\}$,considérée homogène et ergodique (afin de garantir l'existence d'une solution stationnaire notée $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)'$, indépendante de la distribution initiale), et de matrice de transitions $\mathbb{P}$,

• $\left\{\varepsilon_t^{(k)}, t \in \mathbb{Z}\right\}$ est un processus d'inovation à valeurs entières positives de moyenne $\mu_{\varepsilon,k}$ et de variance $\sigma^2_{\varepsilon,k}$, et est indépendant du passé du processus sous étude, de ses survivants via l'opération d'amincissement, et de la chaine de Markov décrite ci-dessous, $\forall k \in E_\eta$,

• Les paramètres $\varphi_i^{(k)} \in [0, 1]$, $\forall i = 1, ..., p_k$, $k \in E_\eta$,.
Il est aussi à noter que Y_t est indépendant des survivants $\beta \circ Y_{t-i}$. $\forall i = 1, ..., p$, $t \in \mathbb{Z}$.

3. Estimation des paramètres et Simulation

L'estimation des paramètres d'un modèle $MS-INAR\left(K,p_1,...,p_K\right)$ peut se faire par plusieurs façons, ainsi nous abordons dans cette section une méthode proposée par Taylor (2002), qui semble être une adaptation de celle proposée par Hamilton (1989) pour le modèle $MS-AR$ à valeurs réelles, puis nous effectuons une étude de simulation afin d'appuyer cette méthode.

3.1. Méthode d'estimation

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode d'estimation des paramètres d'un $MS-INAR\left(K,1,...,1\right)$ en particulier, et en supposant des innovations de loi de Poisson avec une moyenne $\mu_{\varepsilon,k}$, tout en adoptant le principe de maximisation de la fonction de vraisemblance. Dans ce qui suit, nous allons noter par $\underline{\beta}=\left(\varphi_1^{(1)},...,\varphi_1^{(K)},vec\left(\mathbb{P}\right)'\right)'$ le vecteur qui contient tous les paramètres du modèle ainsi que les probabilités de transition. Ayant noté les observations du processus par $\left(y_1,...,y_N\right)'$, la fonction de vraisemblance à un instant t donné, conditionnée par la connaissance de l'état de la chaine de Markov s'étale comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_t|\eta_t=k} &= P\left(Y_t=y_t\left|\eta_t=k,\underline{\beta}\right.\right)\\ &= \sum_{z=0}^{\min(y_t,y_{t-1})}\left[\binom{y_{t-1}}{z}\left(\varphi_1^{(k)}\right)^z\left(1-\varphi_1^{(k)}\right)^{1-z}\right]\left[\frac{\mu_{\varepsilon,k}^{y_t-z}}{(y_t-z)!}\exp\left(-\mu_{\varepsilon,k}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ainsi, la fonction de vraisemblance instantanée non conditionnée par l'état de la chaine de Markov sera donnée par :

$$\mathcal{L}_{Y_t}=\sum_{k=1}^{K}\mathcal{L}_{Y_t|\eta_t=k}\,P\left(\eta_t=k\right)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\mathcal{L}_{Y_t|\eta_t=k} \tag{3.1.2}$$

avec les probabilités $\alpha_1,...,\alpha_K$ qui sont obtenues en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}\left(\alpha_1,...,\alpha_K\right)=\left(\alpha_1,...,\alpha_K\right)\mathbb{P}\\ \sum_{k=1}^{K}\alpha_k=1.\end{cases} \tag{3.1.3}$$

Au final, il suffit de maximiser par rapport au vecteur des paramètres, $\underline{\beta}$, la fonction log-vraisemblance donnée par :

$$\log\left(\mathcal{L};\underline{\beta}\right)=\sum_{t=1}^{N}\log\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\mathcal{L}_{Y_t|\eta_t=k}\right). \tag{3.1.4}$$

3.2. Etude de Simulation

Dans ce paragraphe nous exposons les résultats de simulation effectuée sur un modèle $MS-INAR\left(2,1,1\right)$, en adoptant cette méthode d'estimation. En effet, nous avons traité plusieurs tailles (N=500, 750, 1000, 1250 et 1500), tel que pour chaque taille nous avons

généré 1000 séries indépendantes, afin de visualiser empiriquement quelques propriétés des estimateurs. Le modèle simulé a été choisi de telle sorte que touts ses composantes sont stationnaires du second ordre. Les tableaux **Table 01, Table 02,** et **Table 03** motrent les résultats moyens des estimations obtenues, ainsi que leurs écart-types empiriques.

$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\widehat{\mathbb{P}}$	$\widehat{\sigma_{\mathbb{P}}}$
$N = 250$	$\begin{pmatrix} 0.8569 & 0.2252 \\ 0.1431 & 0.7748 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1438 & 0.1517 \\ 0.1438 & 0.1517 \end{pmatrix}$
$N = 500$	$\begin{pmatrix} 0.8788 & 0.2109 \\ 0.1212 & 0.7891 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0856 & 0.0950 \\ 0.0856 & 0.0950 \end{pmatrix}$
$N = 750$	$\begin{pmatrix} 0.8877 & 0.2041 \\ 0.1123 & 0.7959 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0554 & 0.0797 \\ 0.0554 & 0.0797 \end{pmatrix}$
$N = 1000$	$\begin{pmatrix} 0.8892 & 0.2046 \\ 0.1108 & 0.7954 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0438 & 0.0601 \\ 0.0438 & 0.0601 \end{pmatrix}$
$N = 1250$	$\begin{pmatrix} 0.8897 & 0.2042 \\ 0.1103 & 0.7958 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0391 & 0.0534 \\ 0.0391 & 0.0534 \end{pmatrix}$
$N = 1500$	$\begin{pmatrix} 0.8939 & 0.2015 \\ 0.1061 & 0.7985 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0335 & 0.0454 \\ 0.0335 & 0.0454 \end{pmatrix}$

Table 01 : Estimation des probabilités de transition

$\left(\varphi^{(1)} = 0.3\right)$			$\left(\varphi^{(2)} = 0.7\right)$		
	$\widehat{\varphi^{(1)}}$	$\widehat{\sigma_{\varphi^{(1)}}}$		$\widehat{\varphi^{(2)}}$	$\widehat{\sigma_{\varphi^{(2)}}}$
$N = 250$	0.2802	0.1299	$N = 250$	0.6947	0.1465
$N = 500$	0.2883	0.0866	$N = 500$	0.7022	0.0832
$N = 750$	0.2874	0.0728	$N = 750$	0.7002	0.0684
$N = 1000$	0.2888	0.0549	$N = 1000$	0.7003	0.0547
$N = 1250$	0.2921	0.0491	$N = 1250$	0.6992	0.0495
$N = 1500$	0.2937	0.0443	$N = 1500$	0.7034	0.0413

Table 02 : Estimation des paramètres $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$

$(\mu_{\varepsilon,1} = 0.5)$			$(\mu_{\varepsilon,2} = 1)$		
	$\widehat{\mu_{\varepsilon,1}}$	$\widehat{\sigma_{\mu_{\varepsilon,1}}}$		$\widehat{\mu_{\varepsilon,2}}$	$\widehat{\sigma_{\mu_{\varepsilon,2}}}$
$N = 250$	0.4783	0.1473	$N = 250$	1.0132	0.3280
$N = 500$	0.4899	0.0933	$N = 500$	1.0001	0.2088
$N = 750$	0.4940	0.0676	$N = 750$	0.9955	0.1625
$N = 1000$	0.4948	0.0548	$N = 1000$	0.9965	0.1268
$N = 1250$	0.4943	0.0455	$N = 1250$	0.9986	0.1151
$N = 1500$	0.5011	0.0426	$N = 1500$	0.9933	0.0994

Table 03 : Estimation des paramètres $\mu_{\varepsilon,1}$ et $\mu_{\varepsilon,2}$

On voit clairement que écart-types décroient lorsque la taille de la série augmente, et ceci nous donne une idée sur la convergence de cette méthode d'estimation. Cependant, il est préférable de signaler le fait que la complexité des calculs dépend fortement de la moyenne du processus, à cause de la convolution entre la loi de Poisson et la loi Binomiale, calculée à chaque instant lors d'évaluation de la fonction de vraisemblance, et ceci nous encourage à explorer davantage de méthodes d'estimation pour ce modèle.

4. Bibliographie

Al-Osh, M. A., & Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR (1)) process. *Journal of Time Series Analysis,* 8(3), 261-275.

Ferland, R., Latour, A., & Oraichi, D. (2006). Integer-Valued GARCH Process. *Journal of Time Series Analysis*, 27(6), 923-942.

Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 357-384.

Jin-Guan, D., & Yuan, L. (1991). The integer-valued autoregressive (INAR (p)) model. *Journal of time series analysis*, 12(2), 129-142.

Monteiro, M., Scotto, M. G., & Pereira, I. (2010). Integer-valued autoregressive processes with periodic structure. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(6), 1529-1541.

Silva, M. E. D., & Oliveira, V. L. (2004). Difference equations for the higher-order moments and cumulants of the INAR (1) model. *Journal of Time Series Analysis*, 25(3), 317-333.

Taylor, N. (2002). Autoregressive hidden Markov switching models of count data. *Preprint, Cardiff Business School, Cardiff University*.

Identification d'un arc de frontière

pour l'équation de Laplace dans une bande perturbée

Chorfi Lahcène* et Khélifa Imène**

* Département de Mathématiques
Université Badji Mokhtar
Annaba, Algérie.
l_chorfi@hotmail.com

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère l'identification d'une portion de frontière $\gamma \subset \Gamma$ d'une bande (localement perturbée) Ω, de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, à partir des données de Cauchy d'une fonction harmonique u dans Ω sur Γ_0. On montre que l'arc γ est déterminé de manière unique par les donnés mesurées. Le problème inverse est formulé sous forme d'un système non linéaire d'équations intégrales.

ABSTRACT. We consider the inverse problem to recover a curve $\gamma \subset \Gamma$ which is the geometric perturbation of a strip Ω from a pair of Cauchy data of a harmonic function u in Ω on the remaining part Γ_0, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$. We prove an uniqueness result and we formulate the inverse problem as a non linear system of integral equations.

MOTS-CLÉS : Problème aux limites inverse, Equations intégrales

KEYWORDS : Inverse boundary value problem, Integral equations

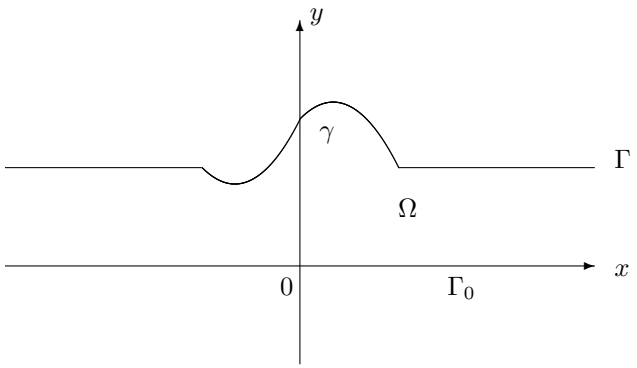
1. Position de problème

On considère le domaine $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x, y)/\ 0 < y < 1 - h(x);\ x \in \mathrm{R}\}$$

avec $h \in C^2(\mathrm{R})$ tel que supp $h \subset [-a, a]$, $h(x) \leq b < 1$. Ω est une bande localement perturbée, on note Ω_0 la bande non perturbée ($h = 0$). On peut écrire la frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \bigcup \Gamma$ avec $\Gamma = \Gamma' \cup \gamma$ (voir figure). Considérons le problème aux limites suivant : étant donné $f \in H^{3/2}(\mathrm{R})$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{dans } \Omega; \\ u = f & \text{sur } \Gamma_0; \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \qquad [1]$$



Domaine Ω

On est concerné par le problème inverse suivant : étant donné $f := u|_{y=0}$ et $g := -\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$, déterminer la courbe $\gamma : y = 1 - h(x)$, $-a \leq x \leq a$.
On rencontre ce problème en ingénierie (détecter une surface de corrosion), en acoustique sous-marine (prospection de fond marin),... Citons quelques articles sur les problèmes inverses pour le Laplacien en domaine borné : ([3, 1, 4]). Notre problème présente des difficultés supplémentaires liées au caractère non borné du domaine et, à notre connaissance, n'a pas été considéré dans la littératue . Dans ce travail nous allons généraliser la méthode du potentiel utilisée dans les travaux précurseurs de Kress et Rundel [3, 2].

Notre article est organisé comme suit. Dans la section 2, on étudie le problème directe. Dans la section 3 on montre un résultat d'unicité pour le problème inverse : les données de Cauchy (f, g) déterminent de manière unique l'arc γ. Dans la section 4, nous obtenons un système d'équations intégrales non linéaires équivalent au problème inverse.

2. Existence et unicité

Théorème 2.1 *Supposons $f \in H^{\frac{3}{2}}(\mathrm{R})$. Alors il existe un relèvement $u_f \in H^2(\Omega)$ tel que $u_f(x, 0) = f(x)$.*

Preuve. On utilise la transformation de Fourier partielle par rapport à x. On note

$$\mathcal{F}v = \hat{v} \Leftrightarrow \hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) e^{-ix\xi} dx,$$

la transformée de Fourier d'une fonction $v \in L^2$. On pose $u_f(x,y) = v_0(x,y)\varphi(y)$ où $v_0(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|}\hat{f}(\xi))$ et φ une fonction de troncature de classe C^2 qui vaut 1 si $0 < y < b/2$ et 0 si $b < y < 1$.

Théorème 2.2 *Si $f \in H^{\frac{3}{2}}$ Le problème (1) possède une solution unique tel que $u - u_f$ appartient à $H_0^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}$*

Preuve. 1) On pose $u = v + u_f$ et $F = -\Delta u_f \in L^2(\Omega)$. Alors v satisfait le problème avec la condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \triangle v = F & \text{dans } \Omega; \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0; \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \qquad [2]$$

2) La forme bilinéaire $a(v,w) = \int_\Omega \nabla u \nabla w dx dy$, $v, w \in H_0^1(\Omega)$, est coercive puisque Ω est borné dans la direction des y.

2.1. Solution du problème non perturbé i.e. dans la bande Ω_0

On utilise la transformation de Fourier partielle par rapport à x. On obtient la solution

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi, y)\hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \qquad [3]$$

avec le symbôle $a(\xi, y) = \frac{\sinh(\xi(1-y))}{\sinh \xi}$.

Proposition 2.3 *Si $f \in H^1$ alors l'intégrale de Fourier (3) définit une solution appartenant à $H^1(\Omega_0)$, de plus, $\forall x \in \Omega, |\nabla u(x)| \leq C\|f\|_{H^1}$.*

Preuve. On utilise les propriétés du symbôle

$$a(\xi, y) \simeq 1 - y, \text{ si } \xi \to 0 \quad \text{et} \quad a(\xi, y) \simeq e^{-y|\xi|} \text{ si } |\xi| \to +\infty.$$

2.2. Fonction de Green de la bande

C'est la fonction localement intégrable $G((x,y),(\xi,\eta))$ qui satisfait au sens des distributions l'équation $\Delta G = \delta(x - \xi, y - \eta)$ dans Ω_0 avec la condition de Dirichlet $G|_{y=0} = G|_{y=1} = 0$. Elle est donnée par l'expression ([6])

$$G((x,y),(\xi,\eta)) = \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{\cosh \pi(x-\xi) - \cos \pi(y+\eta)}{\cosh \pi(x-\xi) - \cos \pi(y-\eta)} \right]$$

$G((x,y),(\xi,\eta))$ admet le comportement asymptôtique suivant :

$$G((x,y),(\xi,\eta)) \simeq -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \text{ si } (x,y) \to (\xi,\eta) \text{ et}$$

$$G((x,y),(\xi,\eta)) = O(\frac{1}{|x|}) \text{ si } |x| \to +\infty.$$

2.3. Equation intégrale

Soit u une solution du problème (1) et u_0 la solution du problème non perturbé. Posons $v = u - u_0$, alors v est solution du problème

$$\begin{cases} \triangle v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ v = -u_0 & \text{sur } \gamma, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \gamma. \end{cases} \quad [4]$$

Appliquons la formule de Green au couple (v, G) dans le domaine $\Omega_{R,\epsilon} = \Omega_R \backslash B((\xi,\eta),\epsilon)$, $\Omega_R = \{(x,y) \in \Omega / |x| < R\}$, on obtient

$$\int_{C_{R,\epsilon}} (v\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial v}{\partial n})ds = 0.$$

Lorsque $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$, on obtient la représentation intégrale

$$v(\xi,\eta) = \int_\gamma (v\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial v}{\partial n})ds, \quad (\xi,\eta) \in \Omega.$$

Posons $\psi = \frac{\partial v}{\partial n}|_\gamma$ qui est inconnue, et $q = u_0|_\gamma$ connue via (3). Lorsque (ξ,η) tend vers un point $(t, 1-h(t))$ de γ, on obtient l'équation intégrale de première espèce

$$S\psi = -\frac{1}{2}q + K(q) \quad [5]$$

avec les opérateurs intégraux S (resp. K) de la théorie du potentiel simple couche (resp. double couche)

$$S\psi(M) = \int_\gamma G(M,M')\psi(M')ds(M'), \quad Kq(M) = \int_\gamma \frac{\partial G(M,M')}{\partial n(M')} q(M')ds(M')$$

La solvabilité de (5) découle de la théorie du potentiel développée dans le cadre des espaces de Sobolev $\tilde{H}^s(\gamma), s > 1/2$, (voir [5, 2, 7, 1]). Une fois l'équation (5) résolue, on a la solution

$$v(M) == \int_\gamma \left(q(M')\frac{\partial G}{\partial n}(M,M') - G(M,M')\psi(M') \right) ds(M'), \quad M \in \Omega. \quad [6]$$

3. Unicité de la solution du problème inverse

Théorème 3. Soit Ω_1 et Ω_2 deux bandes (perturbées) avec deux arcs de frontière γ_1 et γ_2 de classe C^2, respectivement. Notons par u_1 et u_2 les solutions du problème (1) avec les domaines Ω_1 et Ω_2, respectivement, et supposons que $u_1 = u_2$ et $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ sur Γ_0. Alors $\gamma_1 = \gamma_2$.

Preuve. Le théorème de Holmgren implique que $u_1 = u_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Supposons par l'absurde que $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Alors, sans nuire à la généralité, on peut supposer que l'ouvert $W = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$ est connexe et non vide. Alors d'après les conditions aux limites on

peut déduire que $u_2 = 0$ sur le bord de W. Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques implique que $u_2 = 0$ dans W et par analyticité il s'en suit que $u_2 = 0$ dans Ω_2. Or ceci contredit le fait que f n'est pas identiquement nulle.

4. Equation intégrale non-linéaire

Supposons que $\gamma : y = 1 - h(x)$ est inconnue, mais on connait $g(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. Pour obtenir une équation intégrale on prend la trace normale dans la formule (6). Alors on obtient

$$g(x) - g_0(x) = \mathcal{H}'q - \mathcal{H}\psi \qquad (\text{avec } g_0(x) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0) = -f'(x)) \qquad [7]$$

où

$$\mathcal{H}\psi(x) = \int_\gamma \psi(M')H(x, x', y')ds(M'); \qquad \text{avec } H(x, x', y') = -\frac{\partial G}{\partial y}|_{y=0}$$

$$\text{et } \mathcal{H}'q(x) = \int_\gamma q(M')\frac{\partial H}{\partial n(M')}(x, x', y')ds(M')$$

Le système (5)-(7) est linéaire par rapport à ψ et non-linéaire par rapport à h. La résolution se fera par une méthode itérative (CG, Gauss-Newton) dans un travail future.

5. Bibliographie

[1] F. CAKONI, R. KRESS, « `integral equations for inverse problems in corrosion detection from partial cauchy data` », *Inverse Problems and Imaging*, vol. 1, n° 2, 2007.

[2] R. KRESS « Linear Integral Equations, chapter 18 », *Applied Mathematical Sciences*, n° 82 , Springer, NY, 2014.

[3] KRESS, R. and W. RUNDEL « Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem », *Inverse Problems*, n° 21, 2005.

[4] A. NACHAOUI « An improved implementation of an iterative method in boundary identification problems », *Numerical Algorithms*, n° 33, 2003.

[5] W. MCLEAN, « Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations », *Cambridge, Univ. Press, 2000*.

[6] MAX Y. MELNIKOV « Green's functions : Construction and Application », *Walter de Gruyter 2012*.

[7] L. MÖNCH « On the inverse acoustic scattering problem by an open arc : the sound-hard case », *Inverse Problems*, n° 13, 1997.

Rubrique

Estimations d'erreur du problème de Stokes avec condition de glissement de type Tresca

Mekki Ayadi[a], Hela Ayed[b,c,*], Leonardo Baffico[c], Taoufik Sassi[c]

[a] Ecole Supérieure des Sciences et Technologie de Hammam Sousse
Université de Sousse, Rue Lamine Abassi 4011 Hammam-Sousse, Tunisie
mekki.ayadi@enis.rnu.tn.

[b] Université Tunis El Manar
Laboratoire de Modélisation Mathématiques et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, B.P. 32, 1002 Tunis, Tunisie
helaayed@yahoo.com

[c] Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme CNRS UMR 6139
Université de Caen, UFR sciences Campus II
Bd Maréchal JUIN, 14032 Caen cedex, France
leonardo.baffico@unicaen.fr
taoufik.sassi@unicaen.fr

[*] Corresponding author

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on présente une formulation mixte à quatre champs du problème de Stokes posé dans un domaine borné avec des conditions aux limites de type Tresca. Le problème résultant est approximé par une méthode des éléments finis mixtes. Notre objetctif est d'établir une estimation d'erreur a priori optimale. L'estimation théorique est ensuite validée par un test numérique.

ABSTRACT. In this work, we present a four field mixed formulation for the Stokes problem in a bounded domain with Tresca-type boundary conditions. The resulting problem is approximated by a mixed finite elements. Our main goal is to establish an optimal a priori error estimate. The theoretical estimate is then validated by a numerical test.

MOTS-CLÉS : estimation d'erreur, problème de Stokes, frottement de Tresca, formulation variationnelle mixte, méthode des élements finis mixtes, condition d'Inf-Sup.

KEYWORDS : error estimate, Stokes problem, Tresca friction, mixed variational formulation, mixed finite element, Inf-Sup condition

1. Introduction

La résolution des équations de Navier-Stokes ou Stokes nécessite la précision des conditions aux limites qui traduisent son comportement sur une paroi solide. Ces conditions aux limites peuvent être de type non-glissement ou de type glissement :

– Les conditions aux limites de non-glissement caractérisent l'adhérence aux parois solides, cette condition est acceptée à l'échelle macroscopique, mais à l'échelle microscopique, un glissement peut avoir lieu dans certaines situations.

– Les conditions aux limites de glissement : il n'y a pas de pénétration de fluide dans la structure (la vitesse normale est nulle), cependant, la vitesse tangentielle n'est pas forcément nulle. Le glissement du fluide à la paroi du solide peut être sans ou avec frottement. Plusieurs lois de frottement existent telles que la loi de frottement de Navier, de Coulomb ou de Tresca.

Les problèmes de Navier-Stokes ou Stokes avec des conditions aux limites de type frottement, ont toujours fait l'objet de plusieurs travaux concernant l'analyse mathématique et l'approximation numérique en régime stationnaire ou instationnaire. Citons à titre d'exemples [2], [4], ou encore [6].

Dans ce travail, on s'intéresse à l'analyse numérique du problème de Stokes avec conditions aux limites de type Tresca. Notre objectif est d'établir une estimation d'erreur a priori optimale d'ordre h.

Une estimation d'erreur optimale d'ordre $h^{3/4}$ a été obtenue dans [1] en travaillant avec une formulation variationnelle mixte à trois champs.

2. Présentation du travail

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière régulière $\partial\Omega$ constitué par deux parties ouvertes et disjointes telles que

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Gamma}_D \;\text{ et }\; \Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

On considère le problème de Stokes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q & = & \mathbf{f} \;\text{ dans } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{w}) & = & 0 \;\text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

où ν est la viscosité du fluide, $\mathbf{w}$ est le champ de vitesse, q est la pression et $\mathbf{f}$ est la force extérieure agissant sur le fluide.

On impose sur Γ_D une condition de Dirichlet homogène

$$\mathbf{w} = \quad 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \tag{2}$$

tandis que sur Γ, une condition de frottement de type Tresca est fixée

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{w}.\mathbf{n} & = & 0 \;\text{ sur } \Gamma \\ \mid \sigma_t(\mathbf{w}) \mid \leq g, & & \sigma_t(\mathbf{w})\mathbf{w}.\mathbf{t} + g|\mathbf{w}.\mathbf{t}| = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{3}$$

où $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ sont respectivement la normale extérieure unitaire et la tangente à $\partial\Omega$: $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^t$ et $\mathbf{t} = (n_2, -n_1)^t$. On désigne par $\sigma_t(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}, q).\mathbf{t}$ la composante tangentielle du vecteur contrainte $\sigma(\mathbf{w}, q)$ qui est défini par $\sigma(\mathbf{w}, q) = (2\nu\varepsilon(\mathbf{w}) - q\delta)\mathbf{n}$, où $\varepsilon(\mathbf{w}) = \dfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{w})^t)$ et δ est le tenseur identité. On désigne par g le seuil de glissement, g est une fonction de Γ dans $\mathbb{R}_+$ et elle est supposée connue et indépendante de la contrainte normale du fluide $\sigma_n(\mathbf{w}, q) = \sigma(\mathbf{w}, q).\mathbf{n}$.

On commence, tout d'abord, par présenter une formulation variationnelle mixte à quatre champs du problème (1) − (2) − (3), couplant la vitesse $\mathbf{w}$ et trois multiplicateurs de Lagrange q, λ_n et λ_t : le premier multiplicateur de Lagrange q, qui s'identifie à la pression, est associé à la condition d'incompressibilité ($\mathrm{div}(\mathbf{w}) = 0$ dans Ω), le deuxième multiplicateur λ_n, est associé à la condition de non pénétration du fluide ($\mathbf{w}.\mathbf{n} = 0$ sur Γ) et λ_t est introduit pour régulariser le terme non différentiable de frottement de Tresca j, donné par $j(v_t) = \int_\Gamma g|v_t|\,\mathrm{d}\Gamma$, ce terme apparait dans la formulation variationnelle du problème fluide (du point de vue inéquation variationnelle). λ_n et λ_t s'identifient respectivement à $-\sigma_n(\mathbf{w}, q)$ et $-\sigma_t(\mathbf{w})$.

On prouve que cette formulation mixte vérifie la condition Inf-Sup. Ensuite, on approche le problème variationnel par une méthode d'éléments finis mixtes : $\mathbb{P}_1$-bulle pour la vitesse, $\mathbb{P}_1$ pour la pression et $\mathbb{P}_1$ pour les deux multiplicateurs λ_n et λ_t, pour démontrer par la suite l'existence d'une unique solution du problème discret. On finit par établir une estimation d'erreur a priori optimale d'ordre h, obtenue pour le champ de vitesse $\mathbf{w}$ dans $(H^2(\Omega))^2$ et la pression q dans $H^1(\Omega)$ et en supposant que le seuil de glissement g est dans $H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{(H^1(\Omega))^2} + \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^2} \leq Ch$$

où $(\mathbf{w}_h, q_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ est la solution du problème approchée.
on note $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur défini par $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n, \lambda_t)$, et par $H^{-1/2}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\Gamma)$.

2.1. Calcul des erreurs

Afin d'évaluer l'ordre des erreurs commises dans la simulation numérique du problème de Stokes avec la condition de Tresca, nous allons comparer le champ de vitesse $\mathbf{w}$, la pression q et les deux multiplicateurs de Lagranges λ_n et λ_t obtenus numériquement pour un maillage fin ($h = 1/256$), aux champs $\mathbf{w}_h, q_h, \lambda_{n,h}$ et $\lambda_{t,h}$ obtenus pour des différentes valeurs de $h \in \{1/8,\ 1/16,\ 1/32,\ 1/64,\ 1/128\}$ où h désigne la taille du maillage.

On résout le problème fluide dans un domaine carré $]0, 1[^2$. Pour les conditions aux limites utilisées dans la résolution numérique, on choisit un profil parabolique sur deux bords du carré.
On note

$$e^0_{\mathbf{w}} = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{(L^2(\Omega))^2}, \quad e^1_{\mathbf{w}} = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{(H^1(\Omega))^2},$$
$$e^0_q = \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad e^0_{\lambda_n} = \|\lambda_n - \lambda_{n,h}\|_{L^2(\Gamma)},$$
$$\text{et } e^0_{\lambda_t} = \|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{L^2(\Gamma)},$$

où $(\mathbf{w}, q, \lambda_n, \lambda_t)$ désigne la solution de référence du problème fluide, trouvée numériquement pour $h = 1/256$.

Sur la figure 1 sont représentées en échelle logarithmique les courbes décrivant les variations de $e^0_{\mathbf{w}}$, $e^1_{\mathbf{w}}$, e^0_q, $e^0_{\lambda_n}$ et $e^0_{\lambda_t}$ en fonction du pas de maillage h.

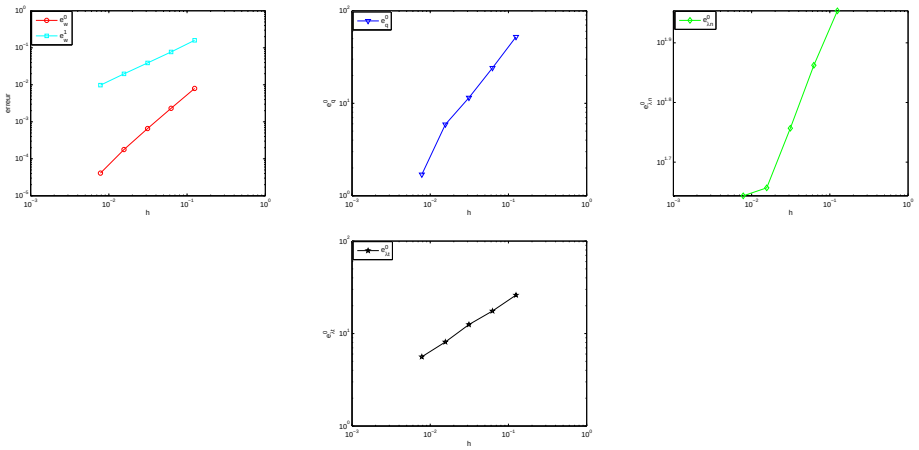


Figure 1. *Représentation en coordonnées logarithmiques des erreurs commises sur la solution de référence* $(\mathbf{w}, q, \lambda_n, \lambda_t)$.

En représentant graphiquement, en fonction du pas de maillage h, les valeurs numériques des erreurs, il est possible après interpolation linéaire de déterminer l'ordre de ces erreurs.
Pour l'erreur $e^0_{\mathbf{w}}$, la droite d'interpolation a pour équation :

$$\log(e^0_{\mathbf{w}}) = 1.93\ \log(h) - 0.43,$$

ce qui nous permet de conclure que l'ordre de l'erreur en norme L^2 est d'environ 2.
Pour l'erreur $e^1_{\mathbf{w}}$, la pente de la droite d'interpolation est 1.04, on conclut ainsi que l'erreur de la vitesse en norme H^1 est d'environ 1.
En ce qui concerne l'erreur de la pression e^0_q, l'ordre est approximativement $6/5$ (la pente de la droite d'interpolation est 1.19).

Pour les multiplicateurs λ_n et λ_t, l'ordre est respectivement d'environ $1/3$ (la pente de la droite est 0.27) et $2/3$ (la pente est 0.55).

Remarque 2.1 *Numériquement, les estimations d'erreur en norme $H^{-1/2}(\Gamma)$ pour les multiplicateurs λ_n et λ_t sont très difficle à calculer. L'erreur en norme $L^2(\Gamma)$ est donnée à titre indicatif.*
Théoriquement, il n'y a pas une estimation en norme $(L^2(\Gamma))^2$ pour $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n, \lambda_t)$.

3. Bibliographie

[1] M.AYADI, L.BAFFICO , M.K.GDOURA , T.SASSI « Error estimates for Stokes problem with Tresca conditions », *ESAIM M2AN* , 2014.

[2] H.FUJITA « A Mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak and slip boundary conditions », *Mathematical Fluid Mechanics and Modelling*, n° 888, 199-216, 1994.

[3] J.HASLINGER, J.STEBEL « Stokes problem with a solution dependent slip bound : Stability of solutions with respect to domains », *ZAMM · Z. Angew. Math. Mech.* , 2016.

[4] Y. LI AND K. LI « Pressure projection stabilized finite element method for Stokes problem with nonlinear slip boundary conditions », *J. Comput. Appl. Math*, vol. 235, 2011.

[5] N,SAITO« On the Stokes equation with the leak and slip boundary conditions of friction type : regularity of solutions », *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 40, n° 2, 2004. errata Publ. Res. Inst. Math. Sci. 48(2), 475-476, 2012.

[6] T.KASHIWABARA « On a finite element approximation of the Stokes problem under leak or slip boundary conditions of friction type. SIAM Journal on Numerical Analysis », *IAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 51, n° 4, 2013.

TAM TAM 2017

Estimation Efficace d'un Processus $INAR(1)$ Périodique: cas Paramétrique

Estimation Efficace

Sadoun Mohamed et Bentarzi Mohamed

Département Recherche Opérationnelle
Université U.S.T.H.B
Ville Alger
Pays Algérie
mo-hamedsadoun@outlook.fr

RÉSUMÉ. Ce travail ce focalise sur le problème de l'estimation efficace, dans un cadre paramétrique, pour les paramètres d'un modèle autorégressif à valeurs entières non-négatives du premier ordre $(INAR_S(1))$ à coefficients périodiques. Une certaine représentation de l'espérance conditionnelle des transitions des scores périodiques pour notre modèle, sera vérifiée et alors explorer pour établir la propriété de Normalité Asymptotique Local (LAN); la propriétés de Linéarité Asymptotique Local pour la suite centrale sera satisfaites. En utilisons ces résultats, nous construisons des estimateurs efficaces dans le sens de la Minimixité Asymptotique Local (LAM) dû à Hajek (1972) et perfectionné ensuite par Fabian et Hannan (1982) pour les paramètres du modèle; pour une fonction de masse non-spécifiée mais périodiquement paramétrée, où cette dernière satisfait seulement à certaines conditions générale. Les performances de ces estimateurs efficaces sont montrées via des étude de simulation.

ABSTRACT. In this work, we focus mainly on the efficient estimation problem of a first-order Integer-Valued Autoregressive $(INAR_S(1))$ Model with periodic coefficients. Some representation of the conditional expectation of periodic transitions scores for our model, will be checked and then explore to establish ownership of Local Asymptotic Normality (LAN); the Local Asymptotic Linearity propertiy by its central sequence is established under mild conditions. Using these results, we construct efficient estimators for the model parameters in the parametric case in the sens of the Local Asymptotic Minimax (LAM) due to Hajek (1972) and then perfected by Fabian and Hannan (1982). The consistency property of these efficient estimations are shown via intensive simulation studies.

MOTS-CLÉS : Processus à valeurs entières Périodiquement Corrélés, Estimation Adaptative et Efficace, Propriété (LAN), Propriété (LAM).

KEYWORDS : Periodically Correlated Integer-Valued Process, Adaptive and Efficient Estimation, (LAN) Properity, (LAM) Properity.

1. Introduction

Cette communication se focalise sur le problème de l'estimation efficace inscrit dans un cadre paramétrique, pour les paramètres d'un modèle autorégressif à valeurs entières non-négatives du premier ordre $(INAR_S(1))$ à coefficients périodiques, ce type de modèle est reconnu d'être adéquat dans la littérature de l'analyse des séries chronologiques, pour capturer et décrire l'effet de la périodicité exhiber par la structure d'autocovariance. Comme bien connu dans la littérature, l'estimation efficace est une procédure qui remonte depuis longtemps, Concernant la procédure d'estimation nous adoptons une méthode bien particulière ; qui considère notre modèle comme étant Asymptotiquement Localement Normale, c'est-à-dire, appartenant à la famille (LAN), à cet fin, nous allons construire un estimateur efficace sous cette condition. Les premiers travaux concernant l'estimation efficace, connus sous le nom d'estimation adaptative réalisés dans le domaine des séries chronologiques, remonte aux travaux de Beran (1976) ; Kreiss $(1987a, b)$. Dans le domaine des séries chronologiques à coefficients périodiques, nous pouvons Mentionner le travail de Bentarzi et Guerbyenne (2009), portant sur l'estimation adaptative dans les processus autorégressifs périodiques $PAR_S(p)$. La mise en place de ce papier est comme suit : La Section 2 discute et examine certains résultats préliminaires concernant le processus $PINAR_S(1)$, et introduit donc le modèle sous-jaçant à notre étude. La Section 3 établie la propriété de Normalité Asymptotique Locale (LAN), afin d'obtenir, par le théorème de convolution Hajek-Le Cam (1972), une borne inférieur à l'exactitude des estimateurs réguliers, nous permettons ainsi de construire un estimateur efficace, atteignant cette borne. un estimateur de mise à jour en une seule étape est proposé dans la Section 4, cette estimateur, en plus d'être efficace, il est aussi facilement calculable relativement à celui du maximum de vraisemblance. En finalité, la Section 5 est consacrée à l'étude de simulation intensive par la méthode de monté-carlo.

2. Modèle et Hypothèses

Tout au long de ce travail, nous étudierons le processus autorégressif à valeurs-entières non-négatives périodiquement corrélé, d'ordre un, avec une période S, conduit par une suite de variables aléatoires périodiquement non-corrélés de certaines distribution de probabilité. Ce modèle a été introduit pour modéliser les phénomènes à valeurs entières non-négatives qui évolue dans le temps de façon périodique, à savoir : des phénomènes présentant de fortes perturbations saisonnales. La distribution d'un processus $PINAR_S(1)$ est déterminée par deux paramètres : une distribution de probabilité de survie périodique de période S portée sur les variable survivante du modèle, ainsi qu'une distribution de probabilité sur des entiers non-négatifs mais périodiques de période S, appelée distribution d'immigrations périodique.

2.1. Modèle Autorégressif à Valeurs Entières Périodique PINAR(1)

Brièvement, le processus à valeurs-entière périodiquement corrélé, dans le sens de Gladyshev (1961), de période S (où S est un entier strictement positif ; $S \geq 2$) $\{X_t; t \in Z_+\}$, est dit satisfaisant à un modèle autorégressive à valeurs-entières de premier ordre avec une structure périodique $INAR_S(1)$ s'il est solution de l'équation aux différences stochastiques linéaires suivante :

$$X_t = \varphi_t \circ X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in Z_+, \qquad [1]$$

où le processus à valeurs entières non-négatives sou-jaçant $\{X_t, t \in Z_+\}$, est périodiquement corrélé, avec une période entière positive S $(S \geq 2)$ et le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in Z_+\}$, représente une suite de variables aléatoires à valeurs entières non-négatives non-corrélées, distribuées selon une certaine distribution discrète appartenant à une famille de distributions paramétriques de la forme $\left\{G_{\underline{\alpha}_t} | \underline{\alpha}_t \in A \subset R_+^q\right\}$, où $q \in Z_+^*$ représente la dimension de l'espace des paramètres du processus d'innovation $\{\varepsilon_t\}_{t\in Z_+}$, et où A est un ouvert, et un sous-ensemble convexe de R_+^q. Les paramètres $\underline{\alpha}_t$ et φ_t sont périodiques, en ce qui concerne t, avec une période S $(S \geq 2)$, où S représente le plus petit entier positif tel que $\varphi_{t+kS} = \varphi_t$ et $\underline{\alpha}_{t+kS} = \underline{\alpha}_t$, $k \in Z_+$. et où " $\circ$ " représente, comme d'habitude l'opérateur d'amincissement de *Steutel-Van Harn*, (*Steutel-Van Harn* 1979), qui est définit pour un processus stochastique X_{t-1} et toute suite de variables aléatoires à valeurs entières non-négatives de comptage indépendante $\{Y_{i,t}, i \in N, t \in Z\}$ où $P(Y_{i,t} = 1) = 1 - P(Y_{i,t} = 0) = \varphi_t \in \Theta \subset [0, 1)$ par

$$\varphi_t \circ X_{t-1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{t-1}} Y_{i,t}, & \textit{si } X_{t-1} > 0, \\ 0, & \textit{si } X_{t-1} \leq 0. \end{cases} \qquad [2]$$

2.2. Résultats Préliminaires

Nous allons considérés le modèle $PINAR_S(1)$ paramétrique, où nous utiliserons la décomposition temporelle de Gladyshev (1961) selon la période S pour nos paramètres périodiques, et où nous nous limiterons aux paramètres du régime périodiquement stationnaire, (voir Monteiro 2010),

$$\forall t \in Z_+, t = i + kS, i \in \{1, \ldots, S\}, \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_S)' \text{ avec } \prod_{i=1}^{S} \varphi_i < 1,$$

ce qui nous mène à désigner en premier lieu l'espace des paramètres du régime périodiquement stationnaire $\Theta = \left\{\underline{\varphi} \in (0, 1)^S : \prod_{i=1}^{S} \varphi_i < 1\right\}$. où "$'$" désigne la transposée d'un vecteur. Une distribution d'immigration périodique $G_{\underline{\alpha}_t}$ pour le modèle paramétrique $\{X_t\}_{t\in Z_+}$ est considérée : Soit $A \subset R_+^q$ où A est un ouvert, et un sous-ensemble convexe de R_+^q et $L_A = \left(G_{\underline{\alpha}_t}\right)_{\underline{\alpha}_t \in A}$ une famille de distributions de probabilités discrètes, dans l'ensemble de toutes les distributions de probabilités discrètes L, tel que $\underline{\alpha}_t \to G_{\underline{\alpha}_t}$ est assez lisse. Pour un formalisme de probabilité, nous considérons $P_{v,\varphi_t,G_t}^{(n)}$ qui désigne la loi de $(X_0, \ldots, X_n)$ sur l'espace mesurable $(Z_+^{n+1}; 2^{Z_+^{n+1}})$ avec $G_{\underline{\alpha}_t} \equiv G_t$ et les observations $(X_0, \ldots, X_n)$ génèrent la suite d'expériences statistiques suivante, où v désigne la distribution initiale du modèle :

$$\xi^{(n)}(v, L_A) = \left(Z_+^{n+1}; 2^{Z_+^{n+1}}; \left(P_{v,\varphi_t,G_t}^{(n)} | \varphi_t \in \Theta \subset [0, 1), \underline{\alpha}_t \in A\right)\right), n \in Z_+.$$

Soit $\underline{\Phi} = \left(\underline{\varphi}, \underline{\alpha}\right)' \in \Theta \times A^S$, et désignant par $H_g^{(n)}(\underline{\Phi})$ une suite d'hypothèses nulles sous laquelle $\left\{X_t^{(n)}, t \in Z_+\right\}$ est une suite de réalisations du processus satisfaisant à l'équation $[1]$, où g désigne la masse de la distributions d'innovation G où on a :
$\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_S)' \in \Theta$, and $\underline{\alpha} = \left(\underline{\alpha}_1', \underline{\alpha}_2', \ldots, \underline{\alpha}_S'\right)' \in A^S$ with $\underline{\alpha}_i = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,q})' \in A$, où $A^S \subset R_+^{qS}$ est un ouvert et un sous-ensemble convexe de R_+^{qS} et $H_g^{(n)}(\underline{\Phi}^{(n)})$ est une suite d'hypothèses alternatives sous laquelle la suite $\left\{X_t^{(n)}, t \in Z_+\right\}$ est une suite de réalisations du processus $PINAR_S(1)$ satisfaisant à l'équation $[1]$, où :

$\underline{\Phi}^{(n)} = \left(\underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\alpha}^{(n)}\right)^{'} \in \Theta \times A^S$, avec $\underline{\varphi}^{(n)} = \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_S^{(n)}\right)^{'} \in \Theta$, et

$\underline{\alpha}^{(n)} = \left(\underline{\alpha}_1^{(n)^{'}}, \underline{\alpha}_2^{(n)^{'}}, \ldots, \underline{\alpha}_S^{(n)^{'}}\right)^{'} = \left(\alpha_{1,1}^{(n)}, \ldots, \alpha_{1,q}^{(n)}, \ldots, \alpha_{S,1}^{(n)}, \ldots, \alpha_{S,q}^{(n)}\right)^{'} \in A^S$.

Ainsi la structure localisé du modèle est définie comme suit : $\underline{\Phi}^{(n)} = \underline{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{n}}(\underline{u}^{(n)})$,

$\underline{u}^{(n)} = \left(\underline{u}_1^{(n)}, \underline{u}_2^{(n)}\right)^{'} \in R^{(1+q)S}$, avec $\underline{\varphi}^{(n)} = \underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}}(\underline{u}_1^{(n)})$,

$\underline{u}_1^{(n)} = \left(u_{1_1}^{(n)} \ldots, u_{1_S}^{(n)}\right)^{'} \in R^S$, $\underline{\alpha}^{(n)} = \underline{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{n}}(\underline{u}_2^{(n)})$, $\underline{u}_2^{(n)} = \left(\underline{u}_{2_1}^{(n)}, \ldots, \underline{u}_{2_S}^{(n)}\right)^{'} \in R^{qS}$,

$\underline{u}_{2_i}^{(n)} = \left(u_{2_{i;1}}^{(n)} \ldots u_{2_{i;q}}^{(n)}\right)^{'} \in R^q$, $i = 1 \ldots S, j = 1 \ldots q$,

d'où on a $\forall t \in Z_+$ et $\forall j = 1, \ldots, q$, $\varphi_t^{(n)} = \varphi_t + \frac{u_{1_t}^{(n)}}{\sqrt{n}}$ et $\alpha_{t,j}^{(n)} = \alpha_{t,j} + \frac{u_{2_{t;j}}^{(n)}}{\sqrt{n}}$,

avec $\sup_n(\underline{u}^{(n)^{'}}\underline{u}^{(n)}) < \infty$, et alors on peut facilement réécrire l'hypothèse alternative sous la forme $H_g^{(n)}(\underline{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{n}}(\underline{u}^{(n)}))$

2.3. Hypothèses de Régularité

L'objectif est d'estimer les paramètres du modèle $\underline{\Phi}$ efficacement, a cet fin, nous prouvons la propriété LAN pour la suite d'expériences $\xi^{(n)}\left(\upsilon, L_A\right), n \in Z_+$, pour cela, nous posons une suite d'hypothèse dites de régularité $[(A.1), \ldots, (A.6)]$ pour assurer la différentiabilité en moyenne quadratique pour la famille L_A, de plus ces hypothèses sont de type Cramerien (du à Cramer) c-à-d : assurent la régularité du système.

3. Normalité Asymptotique Locale

Le cadre théorique consistant à approcher une succession d'éxperiences statistiques par une famille de lois gaussiennes, remonte à Wald (1943), mais doit son développement à Le Cam $(1960, 1986)$, est devenu la norme pour la résolution des problèmes d'efficacité pour les tests et les estimateurs, depuis, plusieurs chercheurs se sont intéressées aux conséquences de la propriété de Normalité Asymptotique Local pour divers modèles (voir : Bengabrit et Hallin, 1998 ; Bentarzi et Hallin, 1996 ; Koul et Schick, 1997 ; Kreiss, 1987, Drost et Van Den Akeer, 2006 et autres). Afin de prouver que $\xi^{(n)}\left(\upsilon, L_A\right)$ a la propriété (LAN), nous avons besoin de déterminer le comportement du rapport de vraisemblance localiser, et nous soulignons que la taille de l'échantillon n, est prise comme un multiple de la période S, c-à-d : $n = NS$; A cet fin, nous écrivons en premier lieu la vraisemblance du modèle $l_n(\underline{\Phi}|X_0, \ldots, X_n)$

$$l_n(\underline{\Phi}|, X_0, \ldots, X_{NS}) = \upsilon\{X_0\} \prod_{k=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{S} P^{\underline{\Phi}_i}_{(X_{(i-1)+kS}), X_{i+kS}} \qquad [3]$$

Puisque la vraisemblance est lisse en $(\underline{\Phi}_t)$,$\forall t$ fixé dans $\{1, \ldots, S\}$ il semble alors approprié de déterminer directement la propriété (LAN), en utilisant un développement de Taylor en probabilité au voisinage de $\underline{\Phi}_t$, pour le logarithme du rapport de vraisemblance localiser, définit par

$$\Lambda_g^{(n)}\left(\underline{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{u}^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{S} \log P^{\underline{\Phi}_i^{(n)}}_{(X_{(i-1)+kS}), X_{i+kS}} - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{S} \log P^{\underline{\Phi}_i}_{(X_{(i-1)+kS}), X_{i+kS}} \qquad [4]$$

Ainsi, le développement de Taylor pour le logarithme du rapport de vraisemblance localiser, et les théorèmes limites approprié suggère que $\left(\xi^{(n)}(\upsilon, L_A)\right)_{n\in Z_+}$ a la propriété (LAN).

Proposition 3.1 : *Sous les conditions de régularités* $[(A.1)-(A.5)]$ *et sous* $H_g^{(n)}(\underline{\Phi})$, *nous avons, pour* $n\to\infty$ *en* $P_{\upsilon,\underline{\Phi}}^{(n)}$ *probabilité.*

$$\Lambda_g^{(n)}\left(\underline{\Phi}+\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{u}^{(n)}\right)=\underline{u}^{(n)'}\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})-\frac{1}{2}\underline{u}^{(n)'}\underline{\Gamma}(\underline{\Phi})\underline{u}^{(n)}+0_P(1), \qquad [5]$$

$$L\left(\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})\,|P_{\upsilon,\underline{\Phi}}^{(n)}\right)\Rightarrow N(0,\underline{\Gamma}(\underline{\Phi})), \qquad [6]$$

avec $\Lambda_g^{(n)}\left(\underline{\Phi}+\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{u}^{(n)}\right)=\log\frac{dP^{(n)}_{\upsilon,\underline{\Phi}+\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{u}^{(n)}}}{dP^{(n)}_{\upsilon,\underline{\Phi}}}$,

où $\frac{dP^{(n)}_{\upsilon,\underline{\Phi}+\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{u}^{(n)}}}{dP^{(n)}_{\upsilon,\underline{\Phi}}}$ *représente la dérivée de Radon-Nickodym* et $\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})$ *désigne la suite centrale (le score) du modèle, de matrice* $Var-Cov\,\underline{\Gamma}(\underline{\Phi})$.

Comme conséquences de la proposition ci-dessus, on a :

Corollaire 3.2 : *Sous la propriété* $LAN\left(\underline{\Phi};\underline{\Gamma}(\underline{\Phi});\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})\right)$, *nous avons :*

– $P_{\upsilon,\underline{\Phi}^{(n)}}^{(n)}$ et $P_{\upsilon,\underline{\Phi}}^{(n)}$ *sont contigües.*

– $\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})$ *vérifie la propriété de linéarité asymptotique locale :*

$$\underline{\Delta}^{(n)}\left(\underline{\Phi}^{(n)}\right)-\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})=-\underline{\Gamma}(\underline{\Phi})\underline{u}^{(n)}+0_P(1). \qquad [7]$$

4. Existence et Construction des Estimateurs (LAM)

Cette section fournit un estimateur efficace basé sur la méthode de mise-à-jours en une seule étape ubiquitaire, ainsi le critère d'efficacité adopter, serai le critère de Minimixité Asymptotique Locale (LAM), (Hajek-Le Cam 1972) et améliorer par (Fabian et Hannan 1982). Notons que la condition suffisante pour qu'un estimateur soit (LAM) est donnée par Fabian et Hannan,1982 (Lemme 4.1, Théorème 6.3, page 467), engendrant ainsi le concept de la $\underline{\Phi}-$régularité, qui se définit de la sorte : La suite d'estimateurs $\{Z_n\}$ est dites $\underline{\Phi}-$régulière, sous la condition $LAN\left(\underline{\Phi};\Gamma(\underline{\Phi});\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})\right)$, si

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_n-\underline{\Phi})-\Gamma^{-1}(\underline{\Phi})\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\Phi})=0_P(1). \qquad [8]$$

Ainsi, Sous la condition (LAN), pour toute suite d'estimateur (Z_n), si (Z_n) est $\underline{\Phi}-$régulière, alors (Z_n) est (LAM). Puisque les estimateurs réguliers dépendent du paramètre inconnu $\underline{\Phi}$, donc afin d'obtenir la $\underline{\Phi}-$régularité, on suppose l'existence d'un estimateur préliminaire $\sqrt{n}-$consistant, et nous considérons une version discrète de ce dernier pour avoir un estimateur régulier en $\underline{\Phi}$. Une fois cet estimateur $\sqrt{n}-$consistant est obtenu, nous allons le mettre à jour, jusqu'à ce qui l'atteint la borne inférieur du théorème de convolution Hajek-Le Cam (1972).

Proposition 4.1 : *Soit* υ *une mesure de probabilité sur* Z_+ *avec un support finit, et* $L_A \subset L$ *satisfaisante aux hypothèses* $[(A.1)-(A.6)]$*, soit encore* $\left(\underline{\bar{\Phi}}_n\right)_{n\in N}$ *une suite d'estimateurs discrète et* $\sqrt{n}-$*consistante pour* $\underline{\Phi}$*, alors on a :*

$$\underline{\hat{\Phi}}_n = \underline{\bar{\Phi}}_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\underline{\Gamma}}_n^{-1}\left(\underline{\bar{\Phi}}_n\right)\underline{\Delta}^{(n)}\left(\underline{\bar{\Phi}}_n\right), \qquad [9]$$

est un estimateur efficace de $\underline{\Phi}$ *dans la suite d'expériences statistiques* $\xi^{(n)}(\upsilon, L_A)$*, de plus la matrice* $(q+1)S\times(q+1)S$ *;* $\bar{\underline{\Gamma}}_n = \left(\bar{\underline{\Gamma}}_{n,i,j}\right)_{i,j\in\{1,\ldots,S\}} = \bar{\underline{\Gamma}}_{n,i}\left(\underline{\Phi}_{n,i}\right)$ *si* $i=j$*,* $0_{(q+1)}$ *Sinon.*

5. Simulation

Pour améliorer l'interprétation et examiner la validité de nos résultats théoriques, une petite étude de simulation basée sur la méthode de Monte-Carlo et des applications empiriques sont présentés. Dans l'étude de simulation que nous proposons, le comportement de l'échantillon fini de l'estimateur efficace au sens (LAM) (localement asymptotiquement minimax), est examiné, ainsi que le comportement des estimateurs préliminaires $\sqrt{n}$-consistants, respectivement, de Yulle-Walker, YW, et des moindres carres conditionnelles, CLS , et cela pour le processus $PINAR_S(1)|S=4$.

6. Bibliographie

[1] M. BENTARZI, H. GUERBYENNE,, M. MERZOUGUI, « Adaptive Estimation of Causal Periodic Autoregressive Model. », *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, n° 38, 1592-1609, 2009.

[2] M. BENTARZI, L. DJEDDOU, « Adaptative Estimation of Periodic First-Order Threshold Autoregressive Model. », *Journal of Communication in statistics-simulation and computation*, n° 68, 47-63, 2012.

[3] R. BERAN, « Adaptive Estimation of Autoregressive process. », *Journal of Ann.Inst.Statist.Math*, n° 28, 77-89, 1976.

[4] C. DROST, R. VAN DEN AKKER, J.M. WERKER, « Local Asymptotic Normality and Efficient Estimation For $INAR(p)$ Models. », *Journal of Time Series Analysis*, vol. 29, n° 5, 783-801, 2006.

[5] V. FABIAN, J. HANNAN, « On Estimation and Adaptative Estimation for Locally Asymptotically Normal Families. », *Z.Wahrsh.Verw.gebiete*, n° 59, 459-478, 1982.

[6] E.G. GLADYSHEV, « Periodically and Almost PC Random Processes With Continous Time Parameter. », *Theory Probab Appl*, n° 34, 177-192, 1961.

[7] J. HAJEK, « Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation. », *Proceeding of Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, n° 1, 175-194, 1972.

[8] J.P. KREISS, « On Adaptative Estimation in Stationary $ARMA$ Model. », *The Annals of Statistics*, vol. 15, n° 1, 112-133, 1987.

[9] L. LE CAM, « Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. », *Journal of Bernoulli*, n° 3, 247-277, 1986.

[10] M. MONTEIRO, M.G. SCOTTO, I. PEREIRA, « integer-valued autoregressive process with periodic structure. », *Journal of Statistical Planning and Inference*, n° 140, 1529-1541, 2010.

Identification de paramètres et de positions de puits dans un milieux poreux

Thouraya Nouri Baranger[4], Hend Ben Ameur[1,2], Wafa Mansouri[1], et Nejla Tlatli[1,3]

[1] Université de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
LAMSIN-ENIT, B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunisia
wafa.mansouri@insa-lyon.fr
hbenameur@yahoo.ca
tlatli@topnet.tn
[2] Université de Carthage
Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques
[3] Université de Carthage
Institut National Agronomique de Tunisie
[4] Université de Lyon, CNRS
LMC2 - EA 7427- University Lyon 1
Thouraya.Baranger@univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous nous proposons de localiser les interfaces entre les zones géologiques, de déterminer les valeurs des transmissivités hydrauliques dans chaque zone et d'identifier les positions des puits. Ce qui fait que par la résolution d'un tel problème inverse nous fournissons des informations riches et importantes sur l'aquifère.

ABSTRACT. We are intersted on a complex inverse problem that consists to identify geological zones shapes, values of parameter in these zones and to locate a known number of wells in the considred demain.

MOTS-CLÉS : Problème Inverse, Gradient Topologique, Identifications des Puits, Paramétrisation adaptative.

KEYWORDS : Inverse Problem, Topological Gradient, Wells Location, Adaptive parameterization.

1 Introduction

Dans la plus part des cas d'étude en hydrogéologie, la connaissance des propriétés hydrogélogiques de l'aquifère est un problème majeur lors de l'élaboration d'un modèle [4]. Les paramètres tels que la transmissivité hydraulique, le coefficient d'emmagasinement, diffèrent d'une zone géologique à une autre. Dans ce travail nous étudions un problème inverse complexe où nous avons à localiser les interfaces entre les zones géologiques, à estimer les valeurs des transmissivités hydrauliques et à localiser les puits.

Nous considérons un milieu poreux hétérogène dans le sens qu'il contient plusieurs zones géologiques. Nous supposons que la transmissivité hydraulique est un paramètre qui reste constant dans chaque zone géologique.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le domaine de proféré :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{\mathcal{O}_\varepsilon}$$

où $\mathcal{O}_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\mathcal{O}$ sont les trous qui modélisent les puits et nous disposons d'une condition de type Neumann sur la frontière $\Sigma_\varepsilon = \partial\mathcal{O}_\varepsilon$ [6].
$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, est un domaine de référence et $x_0 \in \Omega$.
Lorsque $\varepsilon = 0$, on a $\Omega_0 = \Omega$.

Le problème inverse d'identification de paramètres consiste à trouver la transmissivité $T(x)$ telle que :

$$\begin{cases} -div(T(x)\nabla u_\varepsilon) & = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon & = \overline{H} & \text{sur } \Gamma_1 \\ T\nabla u_\varepsilon.\boldsymbol{n} & = \overline{\Phi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ T\nabla u_\varepsilon.\boldsymbol{n} & = \Phi & \text{sur } \Gamma_m \\ T\nabla u_\varepsilon.\boldsymbol{n} & = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

Avec u_ε est la charge hydraulique dont on dispose d'une certain nombre des mesures.
$\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_m \cup \Sigma_\varepsilon$.

Nous proposons une résolution par le couplage de la méthode de paramétrisation adaptative qui a l'avantage de minimiser le nombre des inconnus résultant de la discrétisation du paramètre et la méthode du gradient topologique.

La première étape de ce papier est consacrée à présenter la méthode du gradient topologique qui consiste à identifier les positions des puits. Ensuite, on présente la méthode de paramétrisation adaptative pour construire la paramétrisation de la transmissivité hydraulique supposée constante dans chaque zone géologique. Ceci nous conduit à localiser les frontières entre les différentes zones géologiques et à estimer la valeur de la transmissivité dans chaque zone. Dans la suite nous développons un algorithme couplant la méthode de paramétrisation adaptative avec la méthode du gradient topologique, ce qui nous permet d'identifier à la fois la distribution des valeurs de la transmissivité, les frontières des zones ainsi que les positions des puits dont on suppose le nombre connu.

2 La méthode du gradient topologique

La méthode du gradient topologique consiste à étudier le comportement d'une fonction objectif, modélisant l'écart entre les mesures et la réponse du modèle considéré, sous l'effet d'une petite perturbation de la géométrie [7, 8].

L'analyse de la sensibilité topologique permet d'obtenir un développement asymptotique d'une fonction de forme par rapport à l'insertion d'un trou à l'intérieur du domaine.

Donc, nous cherchons à déterminer l'expression d'un développement asymptotique de la fonction objectif $J(\Omega_\varepsilon)$ lorsque ε tend 0. Pour simplifier les notations, on note la fonction $J(\Omega_\varepsilon)$, le développement s'écrit :

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + f(\varepsilon)\delta_J(x_0) + o(f(\varepsilon)).$$

La fonction δ_J est appelée sensibilité où gradient topologique et va être utilisée comme direction de descente dans le processus d'optimisation. En effet, il suffit de placer un trou là où la fonction δ_J est la plus négative. La fonction $f(\varepsilon)$ est une fonction positive tendant vers 0 lorsque ε tend vers 0. Elle dépend de la dimension de l'espace et des conditions imposées sur le bord de la perturbation.

Dans ce travail nous nous basons sur les travaux de Kalell et Hassine [5] qui ont developpé la méthode du gradient topologique pour l'opérateur de Laplace anisotrope.

3 La méthode de paramétrisation adaptative

Le choix d'une bonne paramétrisation est un problème important en hydrogéologie. Différentes méthodes de paramétrisation sont proposées dans la littérature. Nous citons la paramétrisation multiéchelle utilisée par Chavent et Liu [3] et la paramétrisation adaptative développée par Ben Ameur et al. [2].

La méthode de paramétrisation adaptative a l'avantage de minimiser le nombre des inconnus de paramètres permettant d'interpréter au mieux les données disponibles. L'idée est de prendre une discrétisation du paramètre indépendante du maillage de calcul, de sorte que le paramètre reste constant dans un grand nombre de mailles appartenant à une même zone (voir figure (1)).

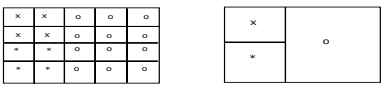


Figure 1 – A gauche paramétrisation avec un paramètre par maille de calcul. A droite paramétrisation avec un paramètre par zone.

Nous supposons dans ce travail que les interfaces entre les zones sont portées par les arrêtes du maillage de calcul. Nous procéderons à un raffinement itératif de la paramétrisation. La méthode de paramétrisation adaptative consiste à construire une partition du domaine, appelée paramétrisation, dont les parties sont de formes diverses et correspondent à des zones où le paramètre à estimer est constant. Les degrés de liberté du paramètre à identifier sont en nombre égal au nombre de parties de cette partition. Les degrés de liberté sont ajoutés impérativement par raffinement d'une seule zone à chaque itération. Le choix du "bon" raffinement est fait à travers des indicateurs de raffinement. Ces indicateurs s'obtiennent par des calculs simples utilisant le gradient de la fonction objectif.

4 Estimation de paramètre et localisation de puits

L'objectif de cette section, est de résoudre le problème inverse d'identification des positions des puits et d'estimer la transmissivité hydraulique en se basant sur le modèle gouverné par l'équation (1) où le puits est modélisé par un trou sur le bord duquel nous imposons une condition de type Neumann.

Nous supposons dans cette section que le nombre de puits est connu, nous identifions seulement leurs positions. La méthode présentée ici est basée sur le couplage de la méthode de sensibilité topologique avec la méthode de paramétrisation adaptative pour développer un algorithme qui nous permet de résoudre le problème inverse considéré.

Nous considérons la fonction objectif J définie par :

$$J(\Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - d^{obs}|^2 \tag{2}$$

d^{obs} sont les observations prises à l'intérieur du domaine Ω.

Pour simplifier la présentation de la technique de fonctionnement du couplage de la méthode des indicateurs de raffinement et de la méthode du gradient topologique, considérons le cas où nous identifions deux zones géologiques et nous localisons la position d'un seul puits.

Nous initialisons la procédure d'identification avec un domaine sain dont la partition est à une seule zone Z_1, la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine. Nous avons alors une seule valeur de la transmissivité hydraulique T_1 à estimer. Ceci est fait par la minimisation de la fonction objectif par rapport à la variable T_1.

Notons T_1^* et $J^{1,*}$ les valeurs optimales respectivement de T et de la fonction objectif. Puis à la première itération, nous calculons le gradient topologique par son expression donnée en utilisant l'algorithme de la méthode du gradient topologique [5] par :

$$\delta_J(x) = -2\pi T_1^* \nabla u_0(x) \nabla v_0(x) \tag{3}$$

Avec u_0 et v_0 sont les solutions respectives du problème direct et du problème adjoint dans le domaine sain associé à l'équation (1).

La position identifiée du puits est notée $\mathbf{P}_1^*$. Nous insérons un puits $\mathcal{O}$, de rayon ε, à cette position. À la deuxième étape, le raffinement consiste à construire une paramétrisation formée de deux zones $Z_{2,1}$ et $Z_{2,2}$ (voir la figure 2) en utilisant l'algorithme de paramétrisation adaptative [2]. L'ajout de l'interface $\mathcal{D}^*$ au domaine divise Z_1 en deux sous zones ayant des valeurs différentes de paramètres. Le choix de cette interface est guidé par les indicateurs de raffinement. Les valeurs du paramètre seront T_2^1 et T_2^2 respectivement dans les deux zones $Z_{2,1}$ et $Z_{2,2}$. Nous optimisons la fonction objectif considérant la paramétrisation à deux zones.

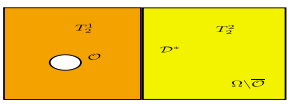


Figure 2 – Les deux zones géologiques et la position du puits.

Notons $T_2^* = (T_2^{1,*}, T_2^{2,*})$ et $J_\varepsilon^{2,*}$ les valeurs optimales respectives des paramètres et de la fonction objectif. À la deuxième itération, on ignore la première position du puits. On calcule le gradient topologique et on retient une nouvelle position. On passe ensuite à la deuxième étape qui consiste à raffiner la zonation.

Ci-dessous, on va décrire l'algorithme basé sur la couplage de la méthode de paramétrisation adaptative et la méthode du gradient topologique.

Initialisation :

– Choix d'une paramétrisation initiale.

– Optimisation de la fonction objectif avec la paramétrisation initiale.

Itération :

1) Déterminer les positions des puits en utilisant le gradient topologique dans chaque zone en utilisant les valeurs de la transmissivité calculées.

2) Utilisant l'algorithme de la paramétrisation :

a) Choisir une paramétrisation par le calcul des indicateurs de raffinement pour déterminer les zones géologiques .

b) Calculer les valeurs de la transmissivité hydraulique.

3) Mettre à jour le domaine en considérant la nouvelle paramétrisation et les nouvelles positions de puits.

5 Résultats numériques

Nous appliquons l'algorithme sur un exemple simple où nous allons identifier trois zones et déterminer la position d'un seul puits. On initialise la procédure d'identification avec un domaine sain dont la partition est à une seule zone géologique et la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine.

On continue jusqu'à ce que la fonction objectif tend vers zéro (figure 3).

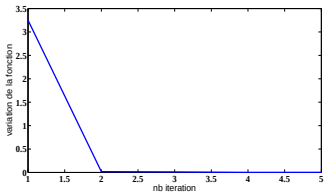


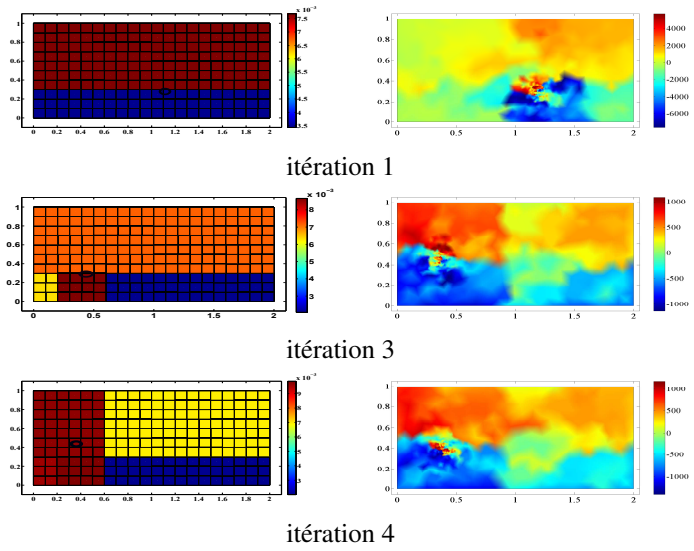
Figure 3 – Variation de la fonction objectif au cours des itérations.

Nous voyons que la valeur négative du gradient topologique s'approche de la position exacte. À l'itération 4, nous identifions les trois zones géologiques et la position du puits ainsi que les valeurs des transmissivités hydrauliques pour chaque zone (Tableau 1).

$P_{id}\ (km)$	$(1.1, 0.28)$	$(1.1, 0.28)$	$(0.59, 0.28)$	$(0.47, 0.26)$	$(0.36, 0.45)$
$\epsilon_p\ [\%]$	99.102	99.102	14.55	5.78	1.08

Tableau 1 – Les positions calculées au cours des itérations et les erreurs sur ces positions pour un puits situé en $z = (0.35\ km, 0.45\ km)$.

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de l'algorithme développé. En effet, le tableau 1 montre que l'erreur sur l'identification du puits décroit au cours des itérations jusqu'à atteindre 1%.



itération 1

itération 3

itération 4

Figure 4 – Exemple 1 : Valeurs identifiées du paramètre (à gauche) et variation du gradient topologique (à droite) au cours des itérations.

Références

[1] BEN ABDA, A. HASSINE, M. JAOUA, M. MASMOUDI, M., « Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow », *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 48, p. 2871–2900, 2009.

[2] BEN AMEUR, H. CHAVENT, G. JAFFRÉ, J., « Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization : application to the estimation of hydraulic transmissivities », *Inverse problems*, vol. 18, p. 775, 2002.

[3] CHAVENT, G., « On the theory and practice of non-linear least-squares », *Advances in Water Resources*, vol. 14, p. 55–63, 1991.

[4] HARIGA, N. T. BARANGER, T. BOUHLILA, R., « Land-sea interface identification and Submarine Groundwater Exchange (SGE) estimation », *Computers and Fluids*, vol. 88, p. 569-578, 2013.

[5] KALLEL, I, « Analyse de sensibilité topologique pour l'opérateur de Laplace anisotrope. », *Ecole Supérieur des Sciences et de Technologie, memoire de master* , 2012.

[6] LIZAIK, L., « Modélisation numérique de modèles thermomécaniques polyphasiques, puits-milieux poreux », *Université de Pau et des Pays de l'Adour*, 2008.

[7] MAZ'YA, V. NAZAROV, S. PLAMENEVSKIJ, B., « Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains », *Birkhäuser* vol. 1, 2012.

[8] SCHUMACHER, S, « Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lopchpositionierungkrieterien, Thesis », *Universitat-Gesamthochschule-Siegen*, 1995.

Identification de fissures en milieu thermoélastique

Elkamel Maayoufi* — Hend Ben Ameur**

* ENIT-LAMSIN
Université de Tunis
BP 51, 1200 Tunis-Belvedere
TUNISIE
elkamelmaay@gmail.com

** ENIT-LAMSIN et IPEST
Université de Tunis et Université de Carthage
BP 51, 1200 Tunis Belvedere
TUNISIE
hbenameur@yahoo.ca

RÉSUMÉ. On se propose dans ce papier d'identifier une fissure dans un domaine via des mesures de déplacement et de température sur une partie de la frontière. Nous montrons d'abord un résultat d'unicité de la solution. Puis, nous montrons un résultat de stabilité dans le cas d'une fissure droite débouchante.

ABSTRACT. We are interested on the inverse problem of fracture identification in a thermoelastic domain. The over specified considered data are measurements of displacement and temperature on a part of the boundary. We prove an identifiability result and a stability result in the case of a linear segment fracture in contact with the boundary.

MOTS-CLÉS : thermoélasticité, fissure,identifiabilité, stabilité.

KEYWORDS : thermo-elasticity, crack, identifiability, stability.

1. Introduction

Les problèmes d'identification de défauts (cavités, surfaces de décollement, fissures,...), dans le cas général, présentent une difficulté particulière due au manque de mesures qui sont souvent non réalisables à l'intérieur du domaine étudié et entachées d'erreurs. D'où la nécessité d'une étude théorique de la stabilité de tels problèmes et le développement de méthodes numériques adaptées afin de pouvoir résoudre le problème inverse en considération, d'une manière fiable et efficace. Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude du problème d'identification de fissures en milieux thermoélastiques.

Des études de l'unicité et de la stabilité de la solution sont fait dans le cas de l'identification de cavités en milieux élastiques ou thermoélastiques [BBJ98, BB07] et dans le cas de l'identification de fissures dans le cas de milieux élastique avec la restriction que celles-ci sont supposées droites et débouchantes [BBH04].
Nous envisageons dans ce travail d'étendre l'étude à des fissures en milieux thermoélastiques en développant des résultats théoriques d'identifiabilité et de stabilité

2. Modèle et problème inverse

Nous considèrons une fissure modélisée par une courbe Σ incluse dans un domaine Ω régulier,simplement connexe de R^2.

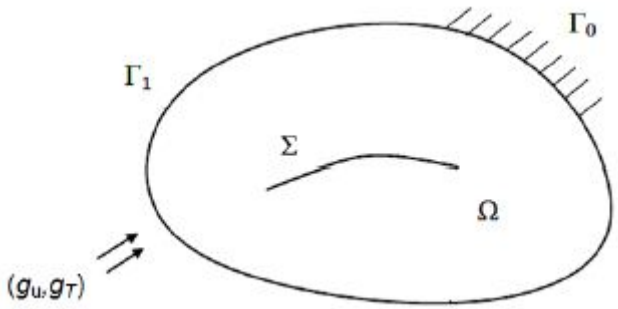


Figure 1

La thermoélasticité traite des milieux élastiques dilatables sous l'effet d'une variation de température.

Le problème direct de la thermoélasticité en contraintes planes s'écrit [MKF94]:

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma(u)) = \gamma \nabla T \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma \\ \Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma \\ (\sigma(u).n - \gamma T n, \frac{\partial T}{\partial n}) = (g_u, g_T) \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \\ (\sigma(u).n - \gamma T n, \frac{\partial T}{\partial n}) = (0,0) \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ (u,T) = (0,0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_D. \end{cases} \qquad [1]$$

Où n désigne la normale unitaire sortante de $\partial\,\Omega$, E est le module de Young. $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$, u le vecteur déplacement, T le champ de température, σ le tenseur des contraintes et on désigne par ε le tenseur des déformations en petites perturbations défini par

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad [2]$$

γ est un paramètre proportionnel au coefficient de dilatation thermique.
Nous rappelons que les tenseurs σ et ε sont liés par la loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène [BBJ98] Dans cette partie nous intéresse à l'étude du problème inverse de nature géométrique: nous cherchons à identifier une courbe Σ qui modélise une fissure incluse dans un domaine bidimensionnel Ω à partir des mesures de la solution du problème direct (1) effectuées sur une partie Γ_N de $\partial\Omega$ .Pour cela nous appliquons une densité surfacique de force g_u et un flux de chaleur g_T sur Γ_N, puis nous mesurons le déplacement u^m et la température T^m sur une partie M de Γ_N.
Le problème inverse considéré peut être présenté comme suit:
" Étant donné $m = (u^m, T^m)$ sur M, Trouver Σ telle que la solution (u,T) du problème direct, vérifie $(u,T)_M = m$"
La notion de l'identifiabilité correspond à l'unicité de la géométrie reconstituée par la donnée des mesures sur M. Cela se traduit par l'injectivité de l'opérateur

$$\eta : \Sigma_{ad} \ni \Sigma \mapsto m = (u,T)_M$$

où Σ_{ad} est l'ensemble des fissures admissibles.

3. Identifiabilité

Dans le cadre des problèmes inverses géométriques reliés au contrôle élastique A. B. Abda, H. Ben Ameur et M. Jaoua [BBJ98] ont prouvé un résultat d'identifiabilité pour le problème inverse d'identification de fessure en milieu élastique. Nous prouvons que ce résultat peut s'étendre au problème thermoélastique [1]:

Théorème 3.1 *Soient Σ et $\tilde{\Sigma}$ deux fissures dans Ω,et soient (u,T) et$(\tilde{u},\tilde{T})$ les solutions du problème thermoélastique (1.1) posé respectivement dans $\Omega \setminus \Sigma$ et $\Omega \setminus \tilde{\Sigma}$ pour une force g_u et un flux g_T appliqués sur Γ_N,($g_u \neq 0$).*
Alors, si Σ et $\tilde{\Sigma}$ conduisent à la même mesure du déplacement et de la température sur M ,nous avons $\Sigma = \tilde{\Sigma}$

L'outil principal de la démonstration du théorème 3.2 est le théorème de V.Kozlov, V.Maz'ya [MKF94]

Théorème 3.2 (V.Kozlov, V.Maz'ya) *Soit Ω un ouvert connexe de R^d, $(d = 2, 3)$. On suppose qu'il existe un ouvert connexe non vide S de $\partial\Omega$ tel que:*

$$\begin{cases} div(\sigma(u)) - \gamma\nabla T = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \Delta T = 0 \quad dans \quad \Omega \\ (\sigma(u).n - \gamma T n, \frac{\partial T}{\partial n}) = (0,0) \quad sur \quad S \\ (u, T) = (0,0) \quad sur \quad S. \end{cases} \tag{3}$$

Alors $u = 0$ et $T = 0$ dans Ω.

4. stabilité

Nous rappelons qu'il ya différents modes du comportement des lèvres d'une fissure (voir Figure 3) et que ces modes sont liés respectivement à des paramètres K_I, K_{II} et K_{III} appelés facteurs d'intensité de contraintes [Bui94].

Mode I: Ouverture transversale ($K_I \neq 0$) .
Mode II: Cisaillement plan ($K_{II} \neq 0$).
Mode III: Cisaillement anti-plan ($K_{III} \neq 0$).

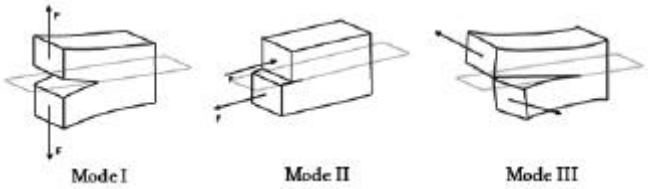


Figure 3

Dans le cas bidimensionnel le troisième mode est exclu.

Nous considérons un champ de vecteurs $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ nul sur $\Gamma_D \cup \Gamma_N$.
Pour $h > 0$ suffisamment petit, l'application $F_h = Id + h\theta$ est un difféomorphisme.
Nous avons:

$$F_h(\Omega \setminus \Sigma) = \Omega \setminus \Sigma_h. \tag{4}$$

Pour une fonction y_h définie sur $F_h(\Omega)$, nous notons:

$y' = \frac{\partial y_h}{\partial h} \mid_{h=0}$: dérivée de forme ou dérivée eulérienne.

$\dot{y} = \frac{\partial y^h}{\partial h}|_{h=0} := \frac{\partial y_h o F_h}{\partial h}|_{h=0}$: dérivée matérielle ou dérivée lagrangienne.

Les deux dérivées ainsi définies sont reliées par la relation:

$$y^{'} = \dot{y} - \nabla y.\theta \quad \text{(voir [SZ92])}$$

Nous notons (T_h, u_h, σ_h) la solution du problème perturbé (posé dans $\Omega \setminus \Sigma_h$) et soit:

$$T^h = T_h o F_h,\ u^h = u_h o F_h,\ \sigma^h = \sigma_h o F_h.$$

Dans la suite, nous considérons un repère cartésien de centre le fond de la fissure et dont l'axe Ox_1 est dans le prolongement de la fissure supposée droite de longueur l. Nous avons alors $\Sigma = \{(x_1, 0)/ - l \leq x_1 \leq 0\}$.

4.1. Stabilité par rapport à la longueur

Soit $r > 0$ tel que la boule $B(0, r)$ soit strictement incluse dans Ω et soient
$\Sigma_r = \{(x_1, 0)/ - (l - r) \leq x_1 \leq 0\}$ et $(\Omega\backslash\Sigma)_r = (\Omega\backslash\Sigma)\backslash\ B(0, r)$.

Lemme 4.2 *Soit $r > 0$ tel que la boule $B(0, r)$ soit strictement incluse dans Ω et soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$,nul sur $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ et tel que $\theta.n = 0$ sur Σ et $(\theta.t)(0) > 0$. Alors*

$$\dot{u} = Du\theta \quad \textit{sur } (\Omega\backslash\Sigma)_r.$$

Choisissons pour cette partie un champ θ particulier défini par:
$\theta(x_1, x_2) = (\chi(x_1, x_2), 0)$ où χ est une fonction très régulière égale à 1 dans un voisinage V du fond de la fissure et nulle en dehors d'un autre voisinage O tel que $\Omega \supset O \supset V$;

Théorème 4.3 *Si le facteur d'intensité K_I est non nul alors pour toute partie $M \subset \Gamma_1$ telle que $mes(M) > 0$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|u_M^h - u_M|_{L^2(M)}}{h} > 0 \textit{ ou } \lim_{h\to 0} \frac{|T_M^h - T_M|_{L^2(M)}}{h} > 0$$

4.4. Stabilité par rapport à l'angle

Pour cette partie, nous considérons un champ θ défini par: $\theta(x_1, x_2) = (-x_2, x_1 + l)$ dans un voisinage V du fond de la fissure et nul en dehors d'un autre voisinage O tel que $\Omega \supset O \supset V$ et $\bar{V} \cap \partial(\Omega\backslash\Sigma) = \{(-l, 0)\}$.

Théorème 4.5 *Si le facteur d'intensité K_{II} est non nul alors pour toute partie $M \subset \Gamma_1$ telle que $mes(M) > 0$.*

$$\lim_{t\to 0} \frac{|u_M^t - u_M|_{L^2(M)}}{t} > 0 \textit{ ou } \lim_{t\to 0} \frac{|T_M^t - T_M|_{L^2(M)}}{t} > 0$$

5. Bibliographie

[BBJ98] A. BEN-ABDA,, H. BEN-AMEUR, M. JAOUA « Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements », *Rapport de Recherche INRIA*, 15(1):67-90, 3438, 1998.

[BBH04] H. BEN-AMEUR,, M.BURGER, B.HACKL « Level Set Methods for geometric Inverse problems in linear elasticity. », *Inverse problems*, 20, 673-696, 2004.

[BB07] H. BEN-AMEUR,, M.BURGER « Cavity identification in linear elasticity and thermoelasticity », *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30, 625-647, 2007.

[Bui94] H.D.BUI, « Mécanique de la rupture fragile », *Masson, Paris*,1978.

[SZ92] J.SOKOLOWSKI AND J.P.ZOLÉZIO, « Introduction to shape optimisation », *Springer, Berlin, Heidlberg, New York*,1992.

[MKF94] V.MAZ'YA V.KOZLOV,, M.FOUMIN « The inverse problem of coupled thermoelasticity », *Inverse problem*, 10:135-160, 1994.

Rubrique

Indicateurs d'erreur a posteriori pour l'estimation de paramètres dans un milieu poreux

Hend Ben Ameur * — Nizar Kharrat** — Mohamed Hédi Riahi***

* ENIT-LAMSIN & IPEST
Université Tunis el Manar & Université de Carthage
B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere
TUNISIE
hbenameur@yahoo.ca

** ENIT-LAMSIN & FSB
Université Tunis el Manar& Université de Carthage
B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere
TUNISIE
Nizar.Kharrat@enit.rnu.tn

*** ENIT-LAMSIN & ESPRIT
Université Tunis el Manar
B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere
TUNISIE
mohamedhedi.riahi@esprit.tn

RÉSUMÉ. On identifie simultanément les coefficients d'emmagasinement et de transmissivité hydraulique dans un écoulement souterrain gouverné par une équation parabolique linéaire. Ces deux paramètres sont supposés être des fonctions constantes par morceaux en espace. Les inconnues du problème sont non seulement les valeurs de ces coefficients mais aussi la geométrie des zones dans lesquelles ces coefficients sont constants. L'objectif principal de ce travail est d'ameliorer les résultats obtenus par la technique de paramétrisation adaptative [1, 2] guidée par des indicateurs de raffinement. Nous incorporons des estimateurs d'erreur a posteriori définies pour raffiner le maillage de calcul dans l'algorithme de paramétrisation adaptative. Ces indicateurs d'erreur tiennent compte de l'état et des paramètres inconnus du problème inverse considéré

ABSTRACT. We identify simultaneously storage and hydraulic transmissivity coefficients in groundwater flow governed by a linear parabolic equation. Both parameters are assumed to be functions piecewise constant in space. The unknowns are the coefficient values as well as the geometry of the zones where these coefficients are constant. The main objective of this work is to improve the results obtained by the technical adaptive parameterization algorithm guided by refinement of indicators. We incorporate a posteriori error estimations depending on parameters to refine the computing mesh in adaptative parametrization algorithm

MOTS-CLÉS : Problème inverse, estimation de paramètres, paramétrisation, indicateurs de raffinement, indicateurs d'erreur a posteriori

1. Introduction

Le but est d'améliorer la résolution du problème inverse d'estimation du coefficient d'emmagasinement et de la transmissivité hydraulique faite par l'algorithme de paramétrisation adaptative guidé par des indicateurs de raffinement [1, 2].
Pour avoir une meilleure approximation de la solution du problème inverse, nous proposons une combinaison entre l'algorithme de paramétrisation adaptative guidé par les indicateurs de raffinement et l'algorithme d'adaptation de maillage guidé par les indicateurs d'erreurs a posteriori.

2. Formulation du problème

On considère les équations suivantes qui modélisent un écoulement d'eau dans une nappe captive.

$$\begin{array}{lcll} S\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} - \text{div}(T\nabla\Phi) & = & Q & \text{dans } \Omega \times (0,t_f) \\ \Phi & = & \Phi_d & \text{dans } \Gamma_D \times (0,t_f) \\ (-T\nabla\Phi)\cdot n & = & q_N & \text{dans } \Gamma_N \times (0,t_f) \\ \Phi(0) & = & \Phi_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \qquad [1]$$

avec les notations suivantes: Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, la variable de temps t appartient à l'intervalle $(0, t_f)$, S est le coefficient d'emmagasinement et T est la transmissivité hydraulique, Φ est la hauteur piézométrique et Q un terme source. n est la normale extérieure à Ω, Γ_D et Γ_N sont les parties du bord de Ω où sont vérifiées respectivement les conditions de Dirichlet et de Neumann.
Nous considèrons le problème inverse où l'on cherche à estimer les paramètres S et T: étant données des mesures de la hauteur piézométriques Φ. Ce problème inverse est posé comme un problème de minimisation d'une fonction objectif de type moindres carrés mesurant l'écart entre les hauteurs piézométriques mesurées et celles calculées pour un jeu de paramètres S et T [1]:

$$J(S,T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_t}\sum_{j=1}^{m}(\Phi(t_i,x_j) - d_{ij}^{obs})^2 \qquad [2]$$

où d_{ij}^{obs} désigne les hauteurs piézométriques mesurées à l'instant t_n et au point x_j.
$\Phi(t_i, x_j)$ hauteurs piézométriques calculées à l'instant t_i et au point x_j.

3. Indicateur d'erreur a posteriori

Rappelons que le problème inverse d'estimation de S et T est ramené à un problème d'optimisation d'une fonction objectif J. La résolution de ce problème d'optimisation nécessite la résolution du problème direct et de son adjoint. On estime donc qu'une meilleure approximation des solutions de ces deux problèmes permet d'avoir une meilleure estimation des paramètres [3]. Ainsi la combainaison entre l'algorithme de paramétrisation adaptative guidé par les indicateurs de raffinement et l'algorithme d'adaptation de maillage guidé par les estimateurs d'erreur a posteriori [3, 4, 5] permetterait d'avoir plus de précision dans la résolution du problème inverse d'estimation de paramètre.

3.1. Développement des estimateurs

A une itération donnée de l'algorithme de paramétrisation adaptative [1, 2] on dispose de deux zonations $\mathcal{Z}_S$ et $\mathcal{Z}_T$ associées aux coefficient d'emmagasinement et la transmissivité hydraulique notées respectivement $S_{\mathcal{Z}_S}$ et $T_{\mathcal{Z}_T}$. On veut établir l'écart entre la fonction objectif continue et celle discrète sous la forme:

$$J(S_{\mathcal{Z}}, T_{\mathcal{Z}}) - J(S_{h,\mathcal{Z}}, T_{h,\mathcal{Z}}) = \eta_{h,\mathcal{Z}} + R_h \qquad [3]$$

où $\eta_{h,\mathcal{Z}}$ représente l'estimateur d'erreur et R_h est un terme supposé négligeable. Nous décomposons cet écart:

$$J(S,T,\Phi) - J(S_h,T_h,\Phi_{\tau h}) = J(S,T,\Phi) - J(S,T,\Phi_\tau) + J(S,T,\Phi_\tau) - J(S_h^c,T_h^c,\Phi_{\tau h}^c)$$
$$+J(S_h^c,T_h^c,\Phi_{\tau h}^c) - J(S_h,T_h,\Phi_{\tau h}) \qquad [4]$$

où $J(S,T,\Phi) - J(S,T,\Phi_\tau)$ est l'erreur associée à la discretisation en temps, $J(S,T,\Phi_\tau) - J(S_h^c,T_h^c,\Phi_{\tau h}^c)$ est l'erreur associée à la discritisation en espace et $J(S_h^c,T_h^c,\Phi_{\tau h}^c) - J(S_h,T_h,\Phi_{\tau h})$ est l'erreur associée à la discretisation en espace et temps.

3.2. Problème continu

On considère le problème d'optimisation lié au problème continu:

Minimiser $J(S,T,\Phi)$ sous la contrainte de l'équation d'état (1) , $(S,T) \in \mathcal{Q}^2$ **(Pc)**

où $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_0((0,t_f), L^\infty(\Omega))$.
Si on note $\widetilde{\Phi} = \Phi - \Phi_D$ et $\xi = (\widetilde{\Phi}, S, T, \psi)$, Le Lagrangien associé au problème **(Pc)**:

$$\mathcal{L}(\xi) = J(S,T,\Phi) + \int_0^{t_f} \{F(\psi) - (\nabla\Phi, \nabla\psi)_T - (\partial_t\Phi, \psi)_S\} dt$$
$$+(\Phi_0 - \Phi(0), \psi(0))_S. \qquad [5]$$

Le point stationnaire de (5) satisfait les conditions d'optimalités suivantes:

$$\mathcal{L}'(\xi;\delta\xi) = 0, \ \forall \delta\xi = (\delta\widetilde{\Phi}, \delta S, \delta T, \delta\psi) \in \mathcal{W}.$$

3.3. Discrétisation en espace-temps par la méthode de Galerkin cG(s)dG(r)

Nous utilisons la méthode de Galerkin cG(s)dG(r) [5] pour la discrétisation de notre problème:

– On considère la discrétisation de l'intervalle $I_f = \cup_{k=1}^{N_\tau} I_k$, $I_k := (t_{k-1}, t_k]$.

– On définit pour $\sigma = S$ ou T le produit scalaire espace-temps:

$$((u,v))_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} \int_{I_k} (u,v)_\sigma dt.$$

– Nous introduisons le sous-espace de dimension finie de $L^2(I, H_D^1(\Omega))$ pour $r \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{X}_\tau^r = \{v_\tau \in L^2(I, H_D^1(\Omega)); \ v_\tau|_{I_k} \in P_r(I_k, H_D^1(\Omega)), \ k = 1, \cdots, N_\tau \text{ et } v_\tau(0) \in L^2(\Omega)\}$$

– Pour toute fonction v_k continue par morceaux, nous introduisons les notations suivantes:

$$v_{k,m}^{\pm} = \lim_{s\to 0} v_k(t_m \pm st), \quad [v_k]_m = v_{k,m}^{+} - v_{k,m}^{-}$$

3.3.1. Discrétisation en temps du problème direct

Le problème direct discret en temps est donnée par:
Pour une paramétrisation donnée de (S,T) chercher $\Phi_\tau \in \mathcal{X}_\tau^r + \Phi_d$ tel que

$$\begin{array}{rcl} ((\partial_t \Phi_\tau, v))_S + ((\nabla \Phi_\tau, \nabla v))_T & + & \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} ([\Phi_\tau]_k, v_k^+)_S + (\Phi_{\tau 0}^+, v_0^+)_S \\ & = & (\Phi_0, v_0^+)_S + \int_0^{t_f} F(v)dt, \ \forall v \in \mathcal{X}_\tau^r. \end{array} \quad [6]$$

Le problème d'optimisation discret en temps est donné par:

Minimiser $J(S,T,\Phi_\tau)$ sous la contrainte du problème (6), $(S,T) \in \mathcal{Q}^2$

3.3.2. Discrétisation en espace du problème direct

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage régulier du domaine Ω et V_h^s l'espace des éléments finis de l'espace $H_D^1(\Omega)$ défini par:

$$V_h^s := \{v \in C(\Omega) \cap H_D^1(\Omega);\ v_{|K} \in P_s(K),\ K \in \mathcal{T}_h\},$$

Nous définissons l'espace de discrétisation par éléments finis en espace par:

$$\mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s} = \{v \in L^2(I, L^2(\Omega)) \ \mid \ v|_{I_n} \in P_r(I_n, V_h^{s,n}),\ n = 1, \cdots, N_\tau \text{ et } v(0) \in V_h^{s,0}\}.$$

Par conséquent, la discrétisation par la méthode cG(s)dG(r) du problème (1) s'écrit :
Pour une zonation (S_h^c, T_h^c), chercher $\Phi_{\tau h} \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s} + \Phi_{dh}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} ((\partial_t \Phi_{\tau h}, v))_{S_h^c} + ((\nabla \Phi_{\tau h}, \nabla v))_{T_h^c} & + & \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} ([\Phi_{\tau h}]_k, v_k^+)_{S_h^c} + (\Phi_{\tau h,0}^+, v_0^+)_{S_h^c} \\ & = & (\Phi_0, v_0^+)_{S_h^c} + \int_0^{t_f} F(v)dt, \ \forall v \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s}, \end{array} \quad [7]$$

Le problème d'optimisation semi-discret par la méthode cG(s)dG(r) est donné par:

Minimiser $J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h})$ sous la contrainte (7), $(S_h^c, T_h^c) \in \mathcal{Z}^2$ **($\mathbf{P}_{\tau h}^c$)**

3.3.3. Discrétisation des paramètres

L'espace de discrétisation de type Galerkin pour les paramètres S et T est:

$$\mathcal{Q}_h = \{\sigma \in \mathcal{Z};\ \sigma_{|I_n} \in P_0(I_n, P_0(K)),\ \forall K \in \mathcal{T}_h^n,\ n = 1, \cdots, N_\tau\}.$$

Finalement la discrétisation en espace-temps du problème direct (1) par la méthode de Galerkin de type cG(s)dG(r) est donnée par:
Pour (S_h, T_h), chercher $\Phi_{\tau h} \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s} + \Phi_{dh}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} ((\partial_t \Phi_{\tau h}, v))_{S_h} + ((\nabla \Phi_{\tau h}, \nabla v))_{T_h} & + & \sum_{n=0}^{N_\tau - 1} ([\Phi_{\tau h}]_n, v_n^+)_{S_h} + (\Phi_{\tau h,0}^+, v_0^+)_{S_h} \\ & = & (\Phi_0, v_0^+)_{S_h} + \int_0^{t_f} F(v)dt, \ \forall v \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s}, \end{array} \quad [8]$$

Le problème d'optimisation discret avec la discrétisation des paramètres dans l'espace $\mathcal{Q}_h$ est donné par:

Minimiser $J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h})$ sous contrainte Problemediscretespace-temps-final,
$(S_h, T_h) \in \mathcal{Q}_h^2$ **($\mathbf{P}_{\tau h}$)**

4. Analyse d'erreur a posteriori

En se basant sur les travaux de, Becker, Braack, Meidner, Rannacher et Vexler [3] nous prouvons:

Théorème 1 *Soit* $\xi = (\widetilde{\Phi}, S, T, \psi)$, $\xi_\tau = (\widetilde{\Phi}_\tau, S, T, \psi_\tau)$, $\xi^c_{\tau h} = (\widetilde{\Phi}_{\tau h}, S^c_h, T^c_h, \psi_{\tau h})$ *et* $\xi_{\tau h} = (\widetilde{\Phi}_{\tau h}, S_h, T_h, \psi_{\tau h})$ *sont respectivement les points stationnaires de* $\mathcal{L}$ *et* $\mathbb{L}$. *Nous avons*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}'(\xi;\delta\xi) = \mathbb{L}'(\xi;\delta\xi) = 0 & \forall \delta\xi \in \mathcal{W}, \\ \mathbb{L}'(\xi_\tau;\delta\xi_\tau) = 0 & \forall \delta\xi_\tau \in \mathcal{W}^r_\tau, \\ \mathbb{L}'(\xi^c_{\tau h};\delta\xi^c_{\tau h}) = 0 & \forall \delta\xi^c_{\tau h} \in \mathcal{W}^{c,r,s}_{\tau h}, \\ \mathbb{L}'(\xi_{\tau h};\delta\xi_{\tau h}) = 0 & \forall \delta\xi_{\tau h} \in \mathcal{W}^{r,s}_{\tau h}. \end{array} \quad [9]$$

Alors, les erreurs relatives à la fonction objectif J pour la discrétisation dG(r) en temps et cG(s) en espace sont:

$$\begin{array}{lcl} J(S,T,\Phi) - J(S,T,\Phi_\tau) & = & \frac{1}{2}\mathbb{L}'(\xi_\tau).(\xi - \hat{\xi}_\tau) + \mathcal{R}_\tau, \\ J(S,T,\Phi_\tau) - J(S^c_h,T^c_h,\Phi^c_{\tau h}) & = & \frac{1}{2}\mathbb{L}'(\xi^c_{\tau h}).(\xi_\tau - \hat{\xi}^c_{\tau h}) + \mathcal{R}^c_h, \\ J(S^c_h,T^c_h,\Phi^c_{\tau h}) - J(S_h,T_h,\Phi_{\tau h}) & = & \frac{1}{2}\mathbb{L}'(\xi_{\tau h}).(\xi^c_{\tau h} - \hat{\xi}_{\tau h}) + \mathcal{R}_h. \end{array} \quad [10]$$

où $\hat{\xi}_\tau = (\hat{\widetilde{\Phi}}_\tau, \hat{S}, \hat{T}, \hat{\psi}_\tau)$, $\hat{\xi}^c_{\tau h} = (\hat{\widetilde{\Phi}}_{\tau h}, \hat{S}^c_h, \hat{T}^c_h, \hat{\psi}_{\tau h})$ *et* $\hat{\xi}_{\tau h} = (\hat{\widetilde{\Phi}}_{\tau h}, \hat{S}_h, \hat{T}_h, \hat{\psi}_{\tau h})$ *sont choisis arbitrairement et* $\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}^c_h$ *et* $\mathcal{R}_h$.

$$\mathcal{R}_\Phi(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_\psi(\xi;\cdot) \quad \mathcal{R}_\psi(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_\Phi(\xi;\cdot) \quad \mathcal{R}_S(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_S(\xi;\cdot) \quad \mathcal{R}_T(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_T(\xi;\cdot). \quad [11]$$

Nous déduisons les expressions suivantes:

$$\begin{array}{rcl} J(S,T,\Phi) - J(S,T,\Phi_\tau) & \approx & \frac{1}{2}\{\mathcal{R}_\Phi(\xi_\tau)(\psi - \hat{\psi}_\tau) + \mathcal{R}_\psi(\xi_\tau)(\widetilde{\Phi} - \hat{\widetilde{\Phi}}_\tau)\}, \\ J(S,T,\Phi_\tau) - J(S^c_h,T^c_h,\Phi^c_{\tau h}) & \approx & \frac{1}{2}\{\mathcal{R}_\Phi(\xi^c_{\tau h})(\psi_\tau - \hat{\psi}_{\tau h}) + \mathcal{R}_\psi(\xi^c_{\tau h})(\widetilde{\Phi}_\tau - \hat{\widetilde{\Phi}}_{\tau h})\}, \\ J(S^c_h,T^c_h,\Phi^c_{\tau h}) - J(S_h,T_h,\Phi_{\tau h}) & \approx & \frac{1}{2}\{\mathcal{R}_S(\xi_{\tau h})(S^c_h - \hat{S}_h) + \mathcal{R}_T(\xi_{\tau h})(T^c_h - \hat{T}_h)\}. \end{array}$$

4.1. Estimateurs d'erreur pour la méthode CG (1) dG (0)

On introduit les opérateurs: $\pi_h = \mathcal{I}^{(2)}_h - \mathrm{id}$, $\mathcal{I}^{(2)}_h : V^1_h \to V^2_h$ est un opérateur d'interpolation quadratique pour les fonctions constantes par morceaux en espace et id l'opérateur identité. Utilisant les expressions des résidus $\mathcal{R}_\Phi(\xi_{\tau h})$ et $\mathcal{R}_\psi(\xi_{\tau h})$ nous avons pour chaque élément de $\mathcal{T}_h$ les résidus sont définis par:

$$\rho_{K,n} := \|r(\Phi_{h,n})\|_{0,K} + h_K^{-\frac{1}{2}} \sum_{e\subset\partial K} \|j(\Phi_{h,n})\|_{0,e}.$$
$$\rho^*_{K,n} := \|r(\psi_{h,n})\|_{0,K} + h_K^{-\frac{1}{2}} \sum_{e\subset\partial K} \|j(\psi_{h,n})\|_{0,e}.$$

Les poids de chaque élément :

$$\omega_{K,n} := \|\Phi_{h,n} - \mathcal{I}^{(2)}_h \Phi_{h,n}\|_{0,K} + h_K^{\frac{1}{2}} \sum_{e\subset\partial K} \|\Phi_{h,n} - \mathcal{I}^{(2)}_h \Phi_{h,n}\|_{0,e}$$

$$\omega^*_{K,n} := \|\psi_{h,n} - \mathcal{I}^{(2)}_h \psi_{h,n}\|_{0,K} + h_K^{\frac{1}{2}} \sum_{e\subset\partial K} \|\psi_{h,n} - \mathcal{I}^{(2)}_h \psi_{h,n}\|_{0,e}$$

Alors les expressions des estimateurs d'erreur a posteriori sont:

$$\eta_\tau := \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \{\rho_{K,n}\omega^*_{K,n} + \rho^*_{K,n}\omega_{K,n}\}$$

$$\eta_h := \sum_{n=1}^{N_\tau} \frac{\tau_n}{2} \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \{\rho_{K,n}\omega^*_{K,n} + \rho^*_{K,n}\omega_{K,n}\} \right\}$$

Avec

$- r(\Phi_{h,n})_{|K} := S_h\Phi_{h,n} - \Phi_{h,n-1}\tau_n - \text{div}(T_h \,\text{grad}\, \Phi_{h,n}) - 1\tau_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} Q(t)dt$

$$- j(\Phi_{h,n})_{|e} := \begin{cases} \frac{1}{2}[(T_h \,\text{grad}\, \Phi_{h,n}) \cdot n_e] & e \subset \\ (T_h \,\text{grad}\, \Phi_{h,n}) \cdot n_e - q_N & e \subset_N \end{cases}$$

$$- r(\psi_{h,n})_{|K} := \begin{cases} S_h\psi_{h,n} - \psi_{h,n-1}\tau_n + \text{div}(T_h \,\text{grad}\, \psi_{h,n}) - \frac{1}{\tau_n|K|} R_i^{LS}(\Phi_{h,n}) & (x_j,t_i) \in K \times \overline{I}_n \\ S_h\psi_{h,n} - \psi_{h,n-1}\tau_n + \text{div}(T_h \,\text{grad}\, \psi_{h,n}) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$- j(\psi_{h,n})_{|e} := \begin{cases} \frac{1}{2}[(T_h \,\text{grad}\, \psi_{h,n}) \cdot n_e] & e \subset \\ (T_h \,\text{grad}\, \psi_{h,n}) \cdot n_e & e \subset_N \end{cases}$$

4.2. Algorithme d'adaptation de maillage [4]

1) Choisir un maillage initial $\mathcal{T}_h^0$ et une paramétrisation initiale (S_h, T_h) associée à une seule zone $Z_1 = \Omega$ avec une discrétisation initiale donnée Φ_h^0 de Φ.

2) Initialiser $k = 0$.

Faire tant que les conditions d'arrêt ne sont pas satisfaites.

3) Pour le maillage courant $\{\mathcal{T}_{h,k}^n, n = 1, \cdots, N_\tau\}$, chercher la parametrization optimal (S_h^k, T_h^k) avec une zonation Z_p^k (p-zones) (Les étapes de l'algorithme de paramétrisation adaptative voir [1, 2]).

4) Evaluer l'estimateur a posteriori $\{\eta_h^n, n = 1, \cdots, N_\tau\}$ et selectionner n tel que $\eta_h^n \geq \frac{\eta_h}{N_\tau}$.

5) Obtenir le nouveau maillage $\mathcal{T}_{h,k+1}^n$.

6) Minimiser J avec le maillage $\mathcal{T}_{h,k+1}^n$ de l'iteration n et la paramétrisation Z_p^k obtenue par l'algorithme de paramétrisation adaptative.

7) Si $J^{k+1} < J^k$ et $|\nabla J^{k+1}| < |\nabla J^k|$ $k = k + 1$ et retour à 3.

8) Sinon retour à 4.

Fin de faire.

5. Conclusion

Nous avons dévelloppé des indicateurs d'erreur a posteriori relatifs à la fonction objectif considérée. Nous avons mis en oeuvre un algorithme qui intègre une technique d'adaptation de maillage basée sur le calcul d'estimateurs d'erreurs a posteriori dans l'algorithme de paramétrisation adaptative.

Nous avons testé cet algorithme sur un cas d'une nappe synthétique. Les résultats obtenus sont considérés satisfaisants. Nous ne présentons pas les résultats numériques dans ce résumé en raison de limitation du nombre de pages.

6. Bibliographie

[1] BEN AMEUR, HEND AND CHAVENT, GUY AND JAFFRÉ, JÉRÔME, « Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization: application to the estimation of hydraulic transmissivities », *Inverse Problems*, vol. 18, n° 3, 2002.

[2] BEN AMEUR, HEND AND CLÉMENT, FRANÇOIS AND WEIS, PIERRE AND CHAVENT, GUY, « The multidimensional refinement indicators algorithm for optimal parameterization », *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 16, n° 2, 2008.

[3] BECKER, R AND BRAACK, M AND MEIDNER, D AND RANNACHER, R AND VEXLER, B, « Adaptive finite element methods for PDE-constrained optimal control problems », *Reactive flows, diffusion and transport, Springer*, vol. , n° , 2007.

[4] BEN AMEUR, HEND AND KHARRAT, NIZAR AND MGHAZLI, ZOUBIDA, « Incorporating a posteriori error estimators in an adaptive parametrization algorithm », *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 24, n° 3, 2016.

[5] ERIKSSON, KENNETH AND JOHNSON, CLAES, « Adaptive finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem », *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, n° 1, 1991.

Effect of inhibition on a syntrophic relationship model in the anaerobic digestion process

R. Fekih-Salem [a,c,*] — N. Abdellatif [a,b] — A. Yahmadi [a]

[a] University of Tunis El Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie
[b] University of Manouba, ENSI, Campus Universitaire, 2010 Manouba, Tunisie
[c] University of Monastir, ISIMa, BP 49, Av Habib Bourguiba, 5111 Mahdia, Tunisie
[*] Corresponding author.
E-mail addresses: radhouene.fekihsalem@isima.rnu.tn (R. Fekih-Salem), nahla.abdellatif@ensi-uma.tn (N. Abdellatif), asma_yahmadi@yahoo.fr (A. Yahmadi).

ABSTRACT. In this work, we consider a mathematical model of syntrophic relationship between two microbial species including maintenance (or decay) terms. We studied the effect of the inhibition of the second species on the behavior of the system. This model exhibits a rich behavior with the existence of two positive steady states and bistability. The operating diagram shows how the model behaves by varying the control parameters and illustrates the effect of inhibition on the reduction of the coexistence region and the emergence of a bistability region.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on considère un modèle mathématique de relation syntrophique entre deux espèces microbiennes avec des termes de maintenance non nuls. On étudie l'effet de l'inhibition de la seconde espèce sur le comportement du système. Ce modèle présente un comportement très riche avec existence de deux points d'équilibre positifs et bistabilité. Le diagramme opératoire montre comment le modèle se comporte en faisant varier les paramètres de contrôle et illustre l'effet de l'inhibition sur la réduction de la région de coexistence et l'émergence d'une région de bistabilité.

KEYWORDS : Anaerobic digestion, Chemostat, Operating diagram, Syntrophy

MOTS-CLÉS : Digestion anaérobie, Chémostat, Diagramme opératoire, Syntrophie

1. Introduction

Anaerobic digestion is a process used for the biological treatment of municipal, agricultural and industrial wastes with the additional benefit of producing energy in the form of biogas. During this process, the waste is first partially transformed into volatile fatty acids and then converted into methane and carbon dioxide. Many mathematical models describing the whole process or some key steps have been considered in the literature. In particular, a considerable research effort has been dedicated to the syntrophic relationship between acid consumers which produce hydrogen and hydrogen consumers which produce methane, see for example [4, 5, 6, 7, 8, 9]. In these last studies, the authors restricted their analysis to increasing growth rate in the dynamics of the second species, excluding the growth-inhibiting by the second substrate. Thus, in the present study, we investigate the properties of the syntrophy model with an inhibition in the second growth rate. As in [7] and [9], we assume that the growth rate of microorganisms of the first step depends on the product of the reaction and we include mortality terms. We do not specify kinetics but assume qualitative properties on the growth functions.

This paper is organized as follows: in Section 2 we present a model of syntrophic relationship between two microbial species and give some preliminary results. Section 3 is devoted to analyse this model in the case when the growth rate of the second species presents the inhibition. In Section 4, we present the operating diagrams which depict the different outcomes of the model according to control parameters. Finally, some conclusions are drawn in Section 5.

2. Mathematical model

We consider a mathematical model of syntrophic relationship between two microbial species, see [7]. This model reads:

$$\begin{cases} \dot{s}_0 &= D(s_0^{in} - s_0) - \mu_0(s_0, s_1)x_0 \\ \dot{x}_0 &= -Dx_0 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - a_0x_0 \\ \dot{s}_1 &= -Ds_1 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - \mu_1(s_1)x_1 \\ \dot{x}_1 &= -Dx_1 + \mu_1(s_1)x_1 - a_1x_1, \end{cases} \tag{1}$$

where one species x_0 consumes one substrate s_0 and produces a product s_1 which is consumed by the second species x_1. s_0^{in} and D denote, respectively, the concentration of substrate s_0 in the feed bottle and the dilution rate in the chemostat; a_i, $i = 0, 1$ is a non-negative parameter giving rise to death rate a_ix_i which is due to decay and $\mu_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ denotes the nutrient uptake function of the ith species. We first make the following assumption on the growth functions:

(H1) $\mu_0(0, s_1) = 0$, $\mu_0(s_0, s_1) > 0$, $\sup\limits_{s_0 \geqslant 0} \mu_0(s_0, s_1) < +\infty$, for all $s_0 > 0$ and $s_1 \geqslant 0$.

(H2) $\mu_1(0) = 0$ and $\mu_1(s_1) > 0$, for all $s_1 > 0$.

(H3) $\frac{\partial \mu_0}{\partial s_0}(s_0, s_1) > 0$ and $\frac{\partial \mu_0}{\partial s_1}(s_0, s_1) < 0$, for all $s_0 > 0$ and $s_1 > 0$.

(H4) $\mu_1(s_1)$ reaches a maximum $\mu_1^M := \mu_1(s_1^M)$ at $s_1 = s_1^M$, where $\mu_1'(s_1) > 0$, for all $0 \leqslant s_1 < s_1^M$ and $\mu_1'(s_1) < 0$, for all $s_1 > s_1^M$.

Hypotheses (H1) and (H2) mean that the growth can take place if and only if the substrate

is present. Moreover, the growth rate of each species increases with the concentration of substrate. Hypothesis (H3) means that the growth rate of the species x_0 increases with the concentration of substrate s_0 and is inhibited by the substrate s_1. Hypothesis (H4) means that the non-monotonic growth function takes into account the growth-limiting for low concentrations of substrate and the growth-inhibiting for high concentrations.

In the following, we prove that system (1) is behaving as well as one would expect for any reasonable chemostat model.

Proposition 2.1. *For any non-negative initial condition, the solutions of (1) remain non-negative and are positively bounded. The set*

$$\Omega = \left\{(s_0, x_0, s_1, x_1) \in \mathbb{R}^4_+ : 2s_0 + x_0 + s_1 + x_1 \leqslant 2s_0^{in}\right\}$$

is positively invariant and a global attractor for (1).

3. Analysis of the syntrophic model

The steady states of (1) are given by the solutions of the following system:

$$\begin{aligned} D(s_0^{in} - s_1) - \mu_0(s_0, s_1)x_0 &= 0 && \text{(2a)}\\ -Dx_0 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - a_0x_0 &= 0 && \text{(2b)}\\ -Ds_1 + \mu_0(s_0, s_1)x_0 - \mu_1(s_1)x_1 &= 0 && \text{(2c)}\\ -Dx_1 + \mu_1(s_1)x_1 - a_1x_1 &= 0. && \text{(2d)} \end{aligned}$$

From (2b) and (2d), respectively, it follows that

$$x_0 = 0 \quad \text{or} \quad \mu_0(s_0, s_1) = D + a_0, \tag{3}$$

and

$$x_1 = 0 \quad \text{or} \quad \mu_1(s_1) = D + a_1. \tag{4}$$

From (4) and (2c), we deduce that the case $x_0 = 0$ and $x_1 > 0$ is excluded. Thus, three types of steady states can be distinguished: either the washout steady state E_0 where $x_0 = 0$ and $x_1 = 0$, or the steady state E_1 of extinction of species x_1, or else two positive steady states E_2^i, $i = 1, 2$ where $x_0 > 0$ and $x_1 > 0$.

In order to study the existence and the stability of the steady states, we introduce the following notations. Since the restriction of the function μ_1 to the interval $[0, s_1^M]$ is increasing, it has an inverse function $y \mapsto M_1(y)$, such that, for all $s_1 \in [0, s_1^M]$ and $y \in [0, \mu_1^M]$,

$$s_1 = M_1(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \mu_1(s_1). \tag{5}$$

Since the restriction of the function μ_1 to the interval $[s_1^M, +\infty[$ is decreasing, it has an inverse function $y \mapsto M_2(y)$, such that, for all $s_1 \geqslant s_1^M$ and $y \in]0, \mu_1^M]$,

$$s_1 = M_2(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \mu_1(s_1). \tag{6}$$

For convenience, we let for all $s_1 \geqslant 0$,

$$m_0(s_1) = \sup_{s_0 \geqslant 0} \mu_0(s_0, s_1).$$

Let s_1 be fixed. Since the function $s_0 \mapsto \mu_0(s_0, s_1)$ is increasing, it has an inverse function $y \mapsto M_0(y, s_1)$, such that, for all $s_0 \geqslant 0$, $s_1 \geqslant 0$, and $y \in [0, m_0(s_1)[$,

$$s_0 = M_0(y, s_1) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \mu_0(s_0, s_1). \tag{7}$$

For the description of the steady states, we need to define the following functions:

$$F_0(D) = M_0(D + a_0, 0). \tag{8}$$

$$F_i(D) = M_i(D + a_1) + M_0(D + a_0, M_i(D + a_1)), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Now, we can state our main result. The proof is detailed in [10]. We use the abbreviation LES for Locally Exponentially Stable.

Proposition 3.1. *Under the assumptions (H1-H4), the system (1) has four steady states:*

1) The washout equilibrium $E_0 = (s_0^{in}, 0, 0)$, that always exists. It is LES if and only if $s_0^{in} < F_0(D)$.

2) The equilibrium $E_1 = (s_0, \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_0), s_0^{in} - s_0, 0)$ of extinction of species x_1, where s_0 is solution of the equation $\mu_0(s_0, s_0^{in} - s_0) = D + a_0$. It exists if and only if $s_0^{in} > F_0(D)$ and is LES if and only if $s_0^{in} < F_1(D)$ or $s_0^{in} > F_2(D)$.

3) The positive equilibrium $E_2^1 = (s_0, \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_0), s_1, \frac{D}{D+a_1}(s_0^{in} - s_0 - s_1))$ with $s_0 = M_0(D + a_0, M_1(D + a_1))$ and $s_1 = M_1(D + a_1)$. It exists if and only if $s_0^{in} > F_1(D)$ and is LES when it exists.

4) The positive equilibrium $E_2^2 = (s_0, \frac{D}{D+a_0}(s_0^{in} - s_0), s_1, \frac{D}{D+a_1}(s_0^{in} - s_0 - s_1))$ with $s_0 = M_0(D + a_0, M_2(D + a_1))$ and $s_1 = M_2(D + a_1)$. It exists if and only if $s_0^{in} > F_2(D)$ and is unstable.

4. Operating diagram

The aim of this section is to show the operating diagram that depicts regions in the (D, S_{in})-plane in which the various outcomes of the system occur by varying the two control parameters D and S_{in}. All other parameters must be fixed since they depend on the considered micro-organisms and substrates. In the following, we assume that the growth functions are given by

$$\mu_0(s_0, s_1) = \frac{m_0 s_0}{K_0 + s_0} \frac{1}{1 + s_1/K_{I_0}} \quad \text{and} \quad \mu_1(s_1) = \frac{m_1 s_1}{K_1 + s_1 + s_1^2/K_{I_1}}, \tag{10}$$

where m_j and K_j, $j = 0, 1$, denote, respectively, the maximum growth rates and the Michaelis-Menten constants; K_{I_0} and K_{I_1} represent, respectively, the inhibition factor for the growth of the species x_0 and a coefficient describing the inhibition due to s_1 on the growth of species x_1. The parameter values used for the simulations are provided in Table 1.

Parameter	m_0	K_0	K_{I_0}	m_1	K_1	a_0	a_1
Figure 1	2.05	1.5	2.2	4	0.5	0.9	1.1

Table 1. *Parameter values used for (1) where the growth rates are given by (10).*

Table 2 shows the existence and stability of the steady states E_0, E_1, E_2^1 and E_2^2 in the regions $\mathcal{I}_k$, $k = 0, \ldots, 3$, of the operating diagrams shown in Figure 1. The letter S (resp. U) means stable (resp. unstable). Absence of letter means that the corresponding equilibrium does not exist.

Condition	Region	E_0	E_1	E_2^1	E_2^2
$s_0^{in} < F_0(D)$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_0$	S			
$F_0(D) < s_0^{in} < F_1(D)$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_1$	U	S		
$F_1(D) < s_0^{in} < F_2(D)$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_2$	U	U	S	
$F_2(D) < s_0^{in}$	$(S_{in}, D) \in \mathcal{I}_3$	U	S	S	U

Table 2. *Existence and local stability of steady states according to regions in the operating diagram of Figure 1.*

Let Γ_i be the respective curves of equation $s_0^{in} = F_i(D)$, $i = 0, 1, 2$. They separate the operating plane (D, S_{in}) in at most four regions, labeled as $\mathcal{I}_k$, $k = 0, \ldots, 3$. The region $\mathcal{I}_3$ is empty in Fig. 1 (a) and the regions $\mathcal{I}_2$ and $\mathcal{I}_3$ are empty in Fig. 1 (e).

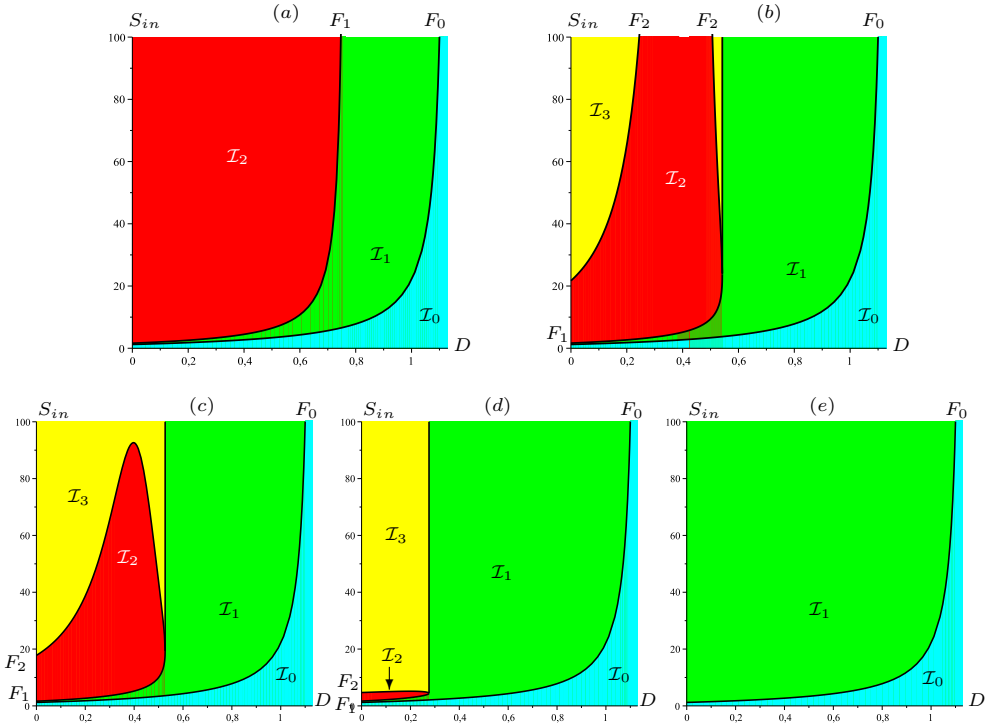


Figure 1. *Operating diagrams of model (1): (a)* $K_{I_1} = 5$*, (b)* $K_{I_1} = 0.97$*, (c)* $K_{I_1} = 0.94$*, (d)* $K_{I_1} = 0.55$ *and (e)* $K_{I_1} = 0.2$*.*

Figure 1 shows the effect of substrate inhibition on the emergence of a bistability region $\mathcal{I}_3$ and its disappearance with the coexistence region $\mathcal{I}_2$ when K_{I_1} decrease. Cyan color represents the region where the washout steady state E_0 is LES. Green color represents the region of exclusion of the second species (E_1 is LES). Red color represents the region of existence of both species (E_2^1 is LES) and yellow color represents the region of bistability (E_1 and E_2^1 are LES).

5. Conclusion

In this paper, we considered a mathematical model describing a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat, including maintenance terms and an inhibition in the specific growth rate of the second species. We have shown that inhibition has a significant impact on the behavior of the syntrophic relationship model. For a general class of non-monotonic growth rates including the Haldane kinetics, we proved that, depending on the initial conditions, the system can exhibit a bistability with existence of two positive steady states. These two features cannot occur in the syntrophic relationship model, [7], with monotonic growth functions for both species.

Acknowledgments

We are deeply grateful to Tewfik SARI for fruitful discussion on the subject and constructive suggestion which lead to truly significant improvement of the manuscript. This work was supported by the Euromed 3 + 3 project TREASURE (`https://project.inria.fr/treasure/`).

6. References

[1] B. BENYAHIA, T. SARI, B. CHERKI, J. HARMAND, "Bifurcation and stability analysis of a two step model for monitoring anaerobic digestion processes", *J. Process Control.*, vol. 22, num. 1008–1019, 2012.

[2] O. BERNARD, Z. HADJ-SADOCK, D. DOCHAIN, A. GENOVESI, J.P. STEYER, "Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process", *Biotechnol. Bioeng.*, vol. 75, num. 424–438, 2001.

[3] R. FEKIH-SALEM, N. ABDELLATIF, T. SARI, J. HARMAND, "Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie à trois étapes", *ARIMA Journal*, vol. 17, num. 53–71, 2014.

[4] M. EL HAJJI, F. MAZENC, J. HARMAND, "A mathematical study of a syntrophic relationship of a model of anaerobic digestion process", *Math. Biosci. Eng*, vol. 7, num. 641–656, 2010.

[5] R. KREIKENBOHM, E. BOHL "A mathematical model of syntrophic cocultures in the chemostat", *FEMS Microbiol. Ecol.*, vol. 38, num. 131–140, 1986.

[6] T. SARI, M. EL HAJJI, J. HARMAND, "The mathematical analysis of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat", *Math. Biosci. Eng.*, vol. 9 , num. 627–645, 2012.

[7] T. SARI, J. HARMAND, "A model of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat including maintenance", *Math. Biosci.*, vol. 275, num. 1–9, 2016.

[8] M. WEEDERMANN, G. SEO, G. WOLKOWICZ, "Mathematical Model of Anaerobic Digestion in a Chemostat: Effects of Syntrophy and Inhibition", *Journal of Biological Dynamics*, vol. 7, num. 59–85, 2013.

[9] A. XU, J. DOLFING, T.P. CURTIS, G. MONTAGUE, E. MARTIN, "Maintenance affects the stability of a two-tiered microbial 'food chain'", *J. Theoret. Biol.* vol. 276, num. 35–41, 2011.

[10] A. YAHMADI, "Modèles mathématiques de relation syntrophique entre deux espèces microbiennes dans un chémostat", *Mastère "Modélisation mathématique et calcul scientifique " FST et ENIT, Université de Tunis El Manar*, 2016.

TamTam'2017, Hammamet - Tunisie

Un Resultat d'Inpainting par Tenseur de Structure Non-Linéaire

M. Benseghir[1] and F.Z. Nouri[2]

Mathematical Modeling and Numerical Simulation Laboratory LAM^{2}SIN,
Badji Mokhtar University, P.O. Box 12, 23000 Annaba, Algeria
[1]bens.moun.ma@hotmail.fr, [2]tassili.nan09@gmail.com

ABSTRACT. In this work, we propose a technique for image inpainting combining an anisotropic smoothing process by partial differential equations (PDEs) and the filtering shock. This method based on a nonlinear structure tensor (NLST) permits to evaluate the strength, the diffusion direction and the shock filters, to preserve the geometric structures. In [2] we used this technique to restore missing parts in images, and very satisfactory results have been obtained. However, this method has the disadvantage of the choice of several parameters, adaptively. To overcome this problem, a partition and an adjustment methodologies are used to estimate these parameters, presenting a new algorithm for inpainting. Our interpolation technique is applied to grayscale images containing complex geometries.

RESUME. Dans ce travail, on propose une technique d'inpainting d'images combinant un processus de lissage anisotrope par des équations aux dérivées partielles (EDPs) et le filtrage de choc. Cette méthode est basée sur un tenseur de structure non-linéaire (TSNL) afin d'évaluer la force, la direction de la diffusion ainsi que les filtres de choc pour préserver les structures géométriques. Dans **[2]**, nous avons utilisé cette technique pour la restauration de régions manquantes dans des images et des résultats très satisfaisants ont été obtenus. Toutefois, cette méthode présente l'inconvénient du choix de plusieurs constantes d'une manière adaptative. Pour surmonter ce problème on utilise une méthodologie de partition et d'ajustement pour estimer ces paramètres, en présentant un nouveau algorithme d'inpainting. Notre technique d'interpolation est appliquée à des images en niveau de gris contenant des géométries complexes.

KEYWORDS : Inpainting, Nonlinear Structure Tensor

MOTS-CLES : Inpainting, Tenseur de structure non linéaire

1. Introduction

L'inpainting est une procédure pour restaurer des parties manquantes ou détériorées d'une image U sur un domaine D à partir de l'information connue sur son voisinage. A cet effet, différentes techniques de diffusion par EDP anisotrope ont été proposées, on peut citer **[1]**, **[5], [7]** et **[9]**. Toutes ces méthodes ont une chose en commun, elles considèrent la distribution des niveaux de gris de l'image comme la distribution des intensités de chaleur et le processus de la diffusion d'information est considéré comme de la conduction de chaleur. Ces procédés d'interpolation se basent sur la préservation des structures, tels que les courbures et les jonctions, car elles représentent des caractéristiques perceptuelles très importantes, au regard du système visuel humain. Cependant, l'orientation des structures n'étant pas prise en compte, le résultat d'inpainting conserve des traces de restauration et les caractéristiques géométriques sont rarement reconstruites correctement. Pour surmonter ce problème, de nouvelles méthodes d'inpainting ont été proposées, par exemple **[8]** et **[11],** ont utilisé le tenseur de structure linéaire (TSL) pour estimer au mieux l'orientation des contours et d'orienter la diffusion suivant les structures présentes dans l'image. Néaumoins, leur efficacité reste limitée pour des régions considérablement grandes. Cela est dû au lissage par des noyaux gaussiens utilisés dans l'estimation du TSL, qui provoque une délocalisation des contours. Dans notre travail (voir **[2]**), on a combiné la diffusion orientée basée sur le TSNL et les filtres de choc. Notre technique a abouti à des résultats très satisfaisants. Néanmoins, elle présente l'inconvénient dû au choix adaptif de plusieurs paramètres, contrôlant les fonctions-stop qui déterminent à leurs tour la force de diffusion. Ces paramètres constants, appelés paramètres de contraste, sont propres à chaque image de part leur sensiblité à la grandeur du gradient. Dans ce travail, on améliore l'efficacité de notre méthode en ajoutant une méthodologie de partition et d'ajustement afin d'approximer les paramètres de contraste. Pour confirmer l'efficacité de l'approche proposée et démontrer sa compétetivité par rapport à d'autres algorithmes d'interpolation **[8]** et **[11]**, on présente différentes applications de traitement d'image en niveaux de gris contenant des géometries complexes.

2. Estimation de l'orientation des structures

L'extraction des caractéristiques géométriques de l'image est un enjeu crucial pour la communauté de traitement d'image et de vision par ordinateur. Le TSNL est un tenseur de structure adaptatif qui donne une meilleure estimation de l'orientation locale des structures de l'image, que le TSL, essentiellement en présence de discontinuités importantes.

L'estimation du TSL peut être modélisée par l'équation de diffusion suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = \triangle s_{ij} \quad i,j = 1,2 \\ (s_{ij}^0) = \nabla U \nabla U^T \quad i,j = 1,2 \end{cases} \tag{1}$$

où $U = U(x,y)$ est une image en niveau de gris, $(s_{i,j})_{i,j=1,2}$ est le tenseur de structure linéaire avec la condition initiale (s_{ij}^0) et le paramètre t relie l'écart-type du noyau gaussien utilisé pour filtrer l'image avant le calcul du TSL (voir **[8]**). Le TSNL remplace l'équation (1) par un processus de diffusion anisotrope afin de réduire le lissage en présence de structures et de rehausser les contours. Ce processus est donné par:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = div[g(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}).\nabla s_{ij}], i, j = 1, 2. \tag{2}$$

où $g(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) = g(r) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+(\frac{r}{k})^2}}$ est une fonction stop, avec $\varepsilon > 0$ une constante utilisée pour éviter les singularités et la mesure $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ détermine la cohérence des données de l'image et $(\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$ sont respectivement les valeurs propres maximale et minimale de $S = (s_{ij})_{i,j=1,2}$. La donnée initiale (s^0_{ij}) est symétrique et semi-définie positive et le processus de diffusion appliqué aux données de la matrice multivaluée S préserve cette propriété (Pour plus de détails, voir **[3]**). Ainsi, le TSNL S peut s'écrire sous la forme de la décomposition suivante:

$$S = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\max} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \tag{3}$$

Le vecteur propre V_1, correspondant à $\lambda_{\max}$, représente la direction de la variation maximale du signal et le vecteur propre V_2, associé à $\lambda_{\min}$, fournit l'orientation des structures. En analysant les valeurs propres de S, la mesure de l'anisotropie locale est définie par:

$$moa = \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\right)^2 \tag{4}$$

La mesure $moa \in [0, 1]$, avec $moa \approx 1$ au voisinage des contours droits et $moa \approx 0$ en présence d'un angle. En comparaison avec le tenseur de structure linéaire classique (1), le TSNL (3) a mis en évidence ses performances à estimer avec précision l'orientation des structures, ce qui permet de lisser dans des directions spécifiques, de rehausser les contours et d'éviter la délocalisation des discontinuités. En tenant compte de ces critères positifs, on utilise le TSNL pour l'inpainting d'images contenant des géométries complexes.

3. Modèle proposé

Dans **[2]**, on a couplé la diffusion orientée par une EDP et le filtrage de choc afin de diffuser l'information à l'intérieur de la zone manquante. Les deux stratégies utilisent les estimations fournies par le TSNL (3) pour déterminer la force et la direction de diffusion. Cette approche d'inpainting peut être formulée comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = f_1.D^2U(V_1, V_1) + f_2 \cdot D^2U(V_2, V_2) - f_3 \cdot sign(D^2U(V_1, V_1))||\nabla U|| \\ -(f_2 - f_4)((\nabla \cdot (V_2V_2^T))^T \cdot \nabla U) \end{aligned} \tag{5}$$

où $f_1 = f_1(r, k_1) = \frac{1}{1+\frac{r}{k_1}}$ et $f_2 = f_2(r, k_2) = \frac{1}{1+(\frac{r}{k_2})^a}$ sont les fonctions stop, avec $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ et $a = 0.3$. Les deux derniers termes dans (5) sont les filtres de choc pour les contours et les angles contrôlés par $f_3 = f_3(r, k_3) = e^{\frac{-|\lambda_{\max}-\lambda_{\min}|^2}{k_3^2}}$ et $f_4 = f_4(moa, k_4) = e^{-\frac{(1-moa)}{k_4^2}}$, avec moa donnée par (4) et $(k_i)_{i=1}^4$sont les paramètres de contraste. Il est facile de constater que les fonctions f_3 et f_4 décroient plus vite que $f_1$et f_2. Dans l'équation dans (5), les fonctions de diffusion f_1, f_2, f_3 et f_4 sont très sensibles au choix des paramètres de contraste $(k_i)_{i=1}^4$de tel sorte que si $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| > (k_i)_{i=1}^3$ ou bien $(1 - moa) > k_4$, l'effet de lissage est plus

faible et les contours sont conservés, mais si $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| < (k_i)_{i=1}^3$ ou bien $(1 - moa) < k_4$, l'effet de lissage est plus fort. Cela signifie que les paramètres k_i interfèrent d'une manière ou d'une autre avec le processus de diffusion et ils sont choisis selon les variations de contraste de l'image, qui diffèrent d'une image à une autre.

Inspirée par les travaux dans **[4]**, dans ce travail on améliore nos résultats obtenus dans **[2]** en utilisant une méthodologie de partition et d'ajustement, afin d'approximer les paramètres de contraste. Ce processus s'éffectue à chaque itération en deux étapes par l'agorithme suivant:

Algorithme

Etant donnée une fonction de diffusion $f_i(r, k_i)$, où $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ si $i = 1, 2, 3$ et $r = 1 - moa$ si $i = 4$.

Etape 1 : Partitionnement (algorithme K-means)

– L'ensemble des pixels de l'image P est partitionné en trois grappes: P_1 pour les pixels (x, y) se trouvant dans les zones homogènes, P_3 pour ceux avoisinant les contours et $P_2 = P\backslash(P_1 \cup P_3)$.

(a) Sélection des ordres de grandeur initiales:

$$\begin{array}{lll} m_1 = \min\limits_{(x,y)\in P}\{r(x,y), \quad (x,y) \in P\} & dans \text{ la zone } P_1, \\ m_3 = \max\limits_{(x,y)\in P}\{r(x,y), \quad (x,y) \in P\} & dans \text{ la zone } P_3, \\ m_2 = \frac{m_1+m_3}{2} & dans \text{ la zone } P_2. \end{array} \tag{6}$$

(b) Affectation des pixels:

$$(x, y) \in P_i \; si \; d(r(x, y), m_i) = \min_{(x,y)\in P} |r(x, y) - m_i|, \; i = 1, 2, 3 \tag{7}$$

(c) Calcul des barycentres

$$m_i = \sum_{(x,y)\in P_i} \frac{r(x, y)}{n_i}, \; i = 1, 2, 3 \tag{8}$$

où n_i est le nombre de pixels de chaque partition P_i $(i = 1, 2, 3)$.

– On répète les opérations (b) et (c) jusqu'à ce que les pixels ne changent plus de grappes (cluster). Il faut noter que le seuil est fixé par (8) à chaque itération.

(d) Sélection des ordres des grandeurs finales:

$$\begin{array}{l} m_1 = \max\limits_{(x,y)\in P_1}\{r(x,y), (x,y) \in P_1\} \\ m_3 = \min\limits_{(x,y)\in P_3}\{r(x,y), (x,y) \in P_3\} \end{array} \tag{9}$$

Etape 2 : Ajustement (réglage)

On applique la méthode des moindres carrés aux fonctions de diffusion f_i avec les valeurs m_1, m_3 (données par (9)) et les valeurs sep et wep, avec $sep = 0.01$ un seuil préservant les contours et $wep = 0.5$ un seuil permettant un lissage fort. Cela revient à estimer les paramètres k_i en minimisant la fonction suivante :

$$S(k_i) = [sep - f_i(m_1, k_i)]^2 + [wep - f_i(m_3, k_i)]^2, i = 1, 2, 3, 4 \tag{10}$$

à l'aide de la méthode de descente de gradient à pas optimal.

L'utilisation de l'estimateur TSNL peut garantir un bon compromis entre la diffusion dans les directions robustes V_1et V_2 et les filtres de choc. Il permet entre autres à l'équation (5) de satisfaire certaines conditions très importantes, décrites comme suit :

(a) Dans les régions homogènes, où $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \approx 0$ et $moa \to 0$, seuls les deux premiers termes dans (5) sont significatifs et on obtient une diffusion isotrope.

(b) Au voisinage d'un contour droit , $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \gg 0$ et $moa \to 1$, la diffusion (5) devient anisotrope (très forte dans la direction la plus cohérente) et le filtre de choc dans le troisième terme préserve les contours.

(c) En présence d'un coin, $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \geq 0$ et $moa \to 0$, la diffusion est forte le long des côtés de l'angle (aigu ou courbé) et le filtre de choc du dernier terme dans (5) rehausse la structure.

4. Resultats numériques et discussion

Pour résoudre l'équation (5) en accord avec les nouveaux paramètres de contraste $(k_i)_{i=1}^4$, on propose un schéma numérique basé sur la méthode des différences finies. On utilise un schéma en avant en temps et centré en espace avec un pas de temps $\tau = \triangle t$ choisi selon des critères de stabilité (condition CFL) et les pas en espace $\triangle x = \triangle y = 1$. La forme discrète de l'équation (5) s'écrit alors

$$\begin{array}{c} U^{n+1} = U^n + \tau[f_1^n.U^n_{V_1V_1} + f_2^n.U^n_{V_2V_2} - f_3^n \cdot sign(U^n_{V_1V_1})||\nabla U^n|| \\ -(f_2^n - f_4^n)((\nabla \cdot (V_2V_2^T))^T \cdot \nabla U^n) \end{array} \tag{11}$$

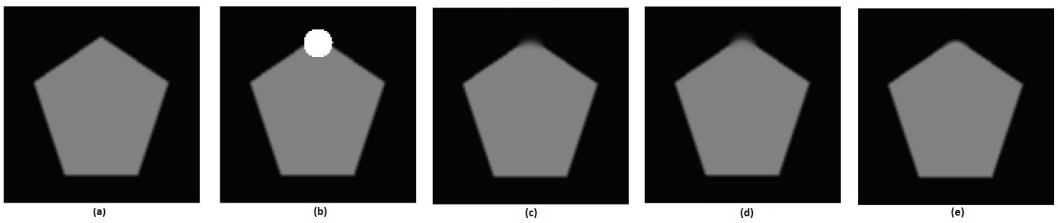


Figure 1. *Résultats pour des angles : (a) Image originale, (b) Image masquée, (c) inpainting par le modèle de Shao et al.**[8]** , (d) inpainting par le modèle de Zhang et al.**[11]** et (e) inpainting par notre modèle (11).*

Figure 2. *Résultats pour une image masquée aléatoirement : (a) Image originale, (b) Image masquée à 50%, (c) inpainting par le modèle de Shao et al.**[8]** , (d) inpainting par le modèle de Zhang et al.**[11]** et (e) inpainting par notre modèle (11).*

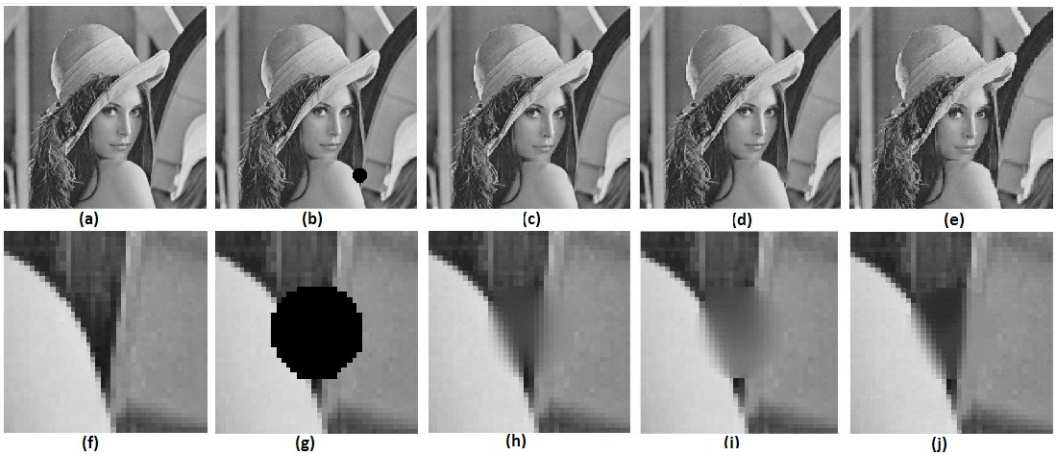


Figure 3. *Résultats pour des courbures : (a)-(f) Image originale, (b)-(g) Image masquée, (c)-(h) inpainting par le modèle de Shao et al.**[8]** , (d)-(i) inpainting par le modèle de Zhang et al.**[11]** et (e)-(j) par notre modèle (11)*

Il est à noter que les images (f), (g), (h), (i) et (j) sont (a), (b), (c), (d) et (e) zoomées.

Modèle	Figure 1	Figure 2	Figure 3
Shao et al.	0.8220	0.8861	0.8128
Zhang et al.	0.7858	0.8711	0.8083
Modèle proposé	**0.9636**	**0.9155**	**0.8175**

Tableau 1. Tableau comparatif des valeurs de SSIM (*structure similarity measure*) des résultats d'inpainting par le modèle de Shao et al.**[8]** , de Zhang et al.**[11]** et notre modèle (11).

5. Conclusion

Dans ce travail, on a proposé une approche d'inpainting d'image combinant la diffusion orientée et le filtrage de choc. Cette approche est non seulement capable de préserver les structures géométriques lors du processus d'inpainting mais aussi d'éliminer les artéfacts le long des contours et au voisinage des jonctions. L'estimation des paramètres de contraste, s'adaptant à la complexité des structures contenues dans l'image, a permis de surmonter l'inconvénient du choix adaptif des constantes. Les résultats expérimentaux d'interpolation d'image obtenus ont confirmé l'efficacité de l'algorithme proposé et ont démontré sa compétitivité en terme de SSIM ainsi que de la qualité visuelle par rapport à d'autres algorithmes d'inpainting **[8]** et **[11]** (voir Tableau 1 et Figure 1, 2 et 3).

Références

[1] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles and C. Ballester, *"Image inpainting"*, Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive TechniquesComputer graphics, SIGGRAPH 2000, pp.417–424, 2000.

[2] M. Benseghir, F.-Z. Nouri, P.-C. Tauber, *"An Inpainting Result by a Nonlinear Structure Tensor"*, Proceedings of the 20th International Conference on Information Visualisation (IV), pp.367– 370, 2016.

[3] T. Brox, J. Weickert, B. Burgeth and P. Mrázek, *"Nonlinear structure tensors"*, Image and Vision Computing, Vol. 24, No. 1, pp.41–55, 2006.

[4] M. Borroto-Fernández, M. González-Hidalgo and A. León-Mecías, *"New estimation method of the contrast parameter for the Perona-Malik diffusion equation"*, Computer Methods In Biomechanics And Biomedical Engineering: Imaging and Visualization, Vol. 4 , No. 3-4 pp. 238-252, 2016.

[5] F. Chan and J. Shen, *"Mathematical models for local nontexture inpaintings"*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 62 , No. 3, pp.1019–1043, 2001.

[6] M. Maouni, F.-Z. Nouri and D. Meskine, *"Image Restoration by Non-standard Diffusion"*, IEEE Geometric Modeling and Imaging , Modern Techniques and Applications, Vol. 9 , No. 11, pp.98–101, 2008.

[7] S. Masnou,*"Disocclusion : a variational approach using level lines"*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 11 , No. 2, pp.68–76, 2002.

[8] W. Shao and Z. Wei, *"Edge-and-corner preserving regularization for image interpolation and reconstruction"*, Image and Vision Computing, Vol. 26, No. 12, pp.1591–1606, 2008.

[9] X. C. Tai, S. Osher and R. Holm, *"Image Inpainting Using a TV-Stokes Equation"*, Image Processing Based on Partial Differential Equations: Proceedings of the International Conference on PDE-Based Image Processing and Related Inverse Problems, pp.3–22, 2007.

[10] J. Wu, Z. Feng, and Z. Ren, *"Improved structure-adaptive anisotropic filter based on a nonlinear structure tensor"*, Cybernetics and Information Technologies, Vol. 14, No. 1, pp.112–127, 2014.

[11] F. Zhang, Y. Chen, Z. Xiao, L. Geng, J. Wu, T. Feng, P. Liu, Y. Tan, and J. Wang,*"Partial Differential Equation Inpainting Method Based on Image Characteristics"*, Image and Graphics: 8th International Conference, pp.11–19, 2015

Modélisation multicouche couplée hydrodynamique morphodynamique en écoulements de recirculation

S. SARI [a], F. BENKHALDOUN [b], M. SEAID [c]

[a] LIM, IPEIN, Tunisie
[b] LAGA, Université Paris XIII, France
[c] ECS, Université de Durham, UK

RÉSUMÉ. La modélisation couplée hydrodynamique et morphodynamique est un domaine de recherche très actif au cours des dernières années. L'objectif de cette étude consiste à calculer les flux de recirculation car, pour ce type d'écoulement, les équations classiques en eau peu profonde ne peuvent récupérer le champ de vitesse vertical nécessaire pour générer la recirculation dans le domaine de calcul. Comme solveur numérique, nous utilisons la méthode FVC récemment proposée dans [1] pour résoudre les flux d'eaux peu profondes multicouches sans morphodynamique. Cette méthode est une méthode Lagrange volumes finis, simple à mettre en œuvre et ne nécessite pas de solveurs de Riemann dans sa formulation.

ABSTRACT. Modelling coupled hydrodynamics and morphodynamics has been a very active research area during the past years. The focus in the current study is on recirculation flows as for this type of water flows the standard shallow water equations fail to recover the vertical velocity field necessary to generate the recirculation within the computational domain. As numerical solver we employ the FVC method recently proposed in [1] to solve multi-layer shallow water flows without morphodynamics. The method is a Lagrange finite volume method, simple to implement and does not require Riemann solvers in its formulation.

MOTS-CLÉS : hydrodynamique, morphodynamique, couplage, Navier-Stokes, modèle multicouche, Exner, volumes finis

KEYWORDS : hydrodynamics, morphodynamics, coupling, Navier-Stokes, multilayered model, Exner, finite volume

1. Le modèle

Dans cette étude, nous nous interessons au couplage hydrodynamique morphodynamique qui a lieu à l'interface entre le débit d'eau et la topographie du lit. Pour surmonter certaine difficultés liées à ce couplage, nous proposons un nouveau modèle. D'une part, nous considérons un modèle multi-couche d'écoulements peu profonds pour éviter les trois dimensions coûteuses des équations de Navier-Stokes. D'autre part, nous considérons le modèle de Grass pour le lit en utilisant la vitesse de la dernière couche voisine du fond qui évite un transport trop rapide du lit quand on utilise une vitesse moyenne.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x}\left(l_\alpha H u_\alpha\right) = 0 \tag{1a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(l_\alpha H u_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(l_\alpha H u_\alpha^2 + \frac{1}{2} g l_\alpha H^2\right) &= -g l_\alpha H \frac{\partial B}{\partial x} + F_\alpha \\ &\quad + u_{\alpha+1/2}\mathcal{G}_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2}\mathcal{G}_{\alpha-1/2}\end{aligned} \tag{1b}$$

$$(1-p)\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1c}$$

avec $\alpha = 1, \ldots, M$ où M est le nombre total des couches, H est la hauteur totale de l'eau, u_α la vitesse d'écoulement de la couche α, B la topographie du fond, F_α la force exercée sur la couche α et Q est le flux d'Exner.

Les termes d'échange de mass $G_{\alpha+1/2}$ sont déterminés par la formule suivante :

$$G_{\alpha+1/2} = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\left(\frac{\partial\left(h_\beta u_\beta\right)}{\partial x} - l_\beta \sum_{\gamma=1}^{M}\frac{\partial\left(h_\gamma u_\gamma\right)}{\partial x}\right), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, M-1, \tag{2}$$

avec

$$G_{1/2} = G_{M+1/2} = 0,$$

et la vitesse aux interfaces est déterminée par un simple décentrement selon le signe du terme d'échange de mass

$$u_{\alpha+1/2} = \begin{cases} u_\alpha, & \text{si} \quad G_{\alpha+1/2} \geq 0, \\ u_{\alpha+1}, & \text{si} \quad G_{\alpha+1/2} < 0. \end{cases} \tag{3}$$

La décharge du sédiment peut être simplement détrminée par la formule de Grass :

$$Q(u_1) = A u_1 |u_1|^m, \tag{4}$$

avec u_1 est la vitesse de la couche au dessous voisine du fond, A et m sont des coefficients empiriques. En pratique, la valeur de A est entre 0 et 1, et $m = 2$.

2. La méthode

2.1. La procédure

Dans cette section nous décrivons la procédure utilisée pour résoudre le modèle multicouche couplé. Notons que trois stratégies peuvent être utilisées. La première est appelée approche quasi-stable. Le modèle de fluide est d'abord résolu sur un fond fixe jusqu'à ce qu'un état stable soit atteint. Puis le fond est mis à jour en utilisant dans l'équation d'Exner (1c) la vitesse d'écoulement stationnaire qui a été calculée dans l'étape de fluide et nous reprenons avec le problème de fluide mais en considérant le nouveau profil de fond. L'intérêt de cette méthode est de rendre indépendantes les procédures numériques qui sont utilisées pour la solution des problèmes de fluide et de fond. Les principaux inconvénients sont la difficulté d'estimer le pas de temps correct dans l'équation d'Exner et la limitation pour traiter le flux transitoire en tant que problèmes de rupture du barrage. Une deuxième stratégie possible est de résoudre chaque équation séparément, mais à chaque étape de temps. Comme pour la première, cette stratégie nous permet d'utiliser différentes procédures numériques pour chaque équation, mais elle évite d'estimer deux pas de temps différents. Elle nous permet également de résoudre des problèmes transitoires mais elle peut introduire une certaine diffusion numérique sur la topographie du fond. La troisième possibilité est de considérer un problème couplé où toutes les variables H, u et B sont mises à jour à chaque étape de temps en utilisant la même procédure numérique. Cette troisième stratégie nécessite le développement d'un algorithme cohérent qui résout les aspects multicouches du problème couplé à ceux offerts par l'équation d'Exner. Dans ce travail, nous adoptons la troisième stratégie pour le modèle couplé monocouche et la deuxième stratégie est utilisée pour la solution du système multicouche.

2.2. Le schéma FVC

Nous discrétisons le domaine spatial en volumes de contrôle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de taille uniforme $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ et on subdivise le domaine temporel en sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$. En posant Wpour désigner les variables conservatives (H, Hu, B), $F(W)$ le flux physique et $S(W)$ le terme source, le système (1) prend la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}). \tag{5}$$

L'intégration de l'équation (5) en temps et en espace donne :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \Delta t \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} + \Delta t \mathcal{S}_i^n, \tag{6}$$

avec $\mathbf{W}_i^n$ est la moyenne en espace de la solution $\mathbf{W}$ dans le volume de contrôle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ à l'instant t_n et $\mathcal{F}_{i\pm1/2}^n = \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i\pm1/2}^n)$ sont les flux numériques en $x = x_{i\pm1/2}$ à t_n. Afin de reconstruire les flux numériques $\mathcal{F}_{i\pm1/2}^n$ dans l'équation (6), nous considérons la méthode des caractéristiques appliquée à la version advective du système (1).

En général, la forme advective du modèle multicouche est construite de sorte que les variables non-conservatives du système (1) sont transportées avec le même champ de vitesse associé à chaque couche :

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + \mathcal{U}_\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial x} = S_\alpha(\mathbf{U}), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, M, M+1, \tag{7}$$

où $\mathbf{U} = (H, Hu_1, \ldots, Hu_M, B)^T$ et $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (S_0, S_1, \ldots, S_{M+1})^T$ avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} H \\ Hu_1 \\ \vdots \\ Hu_M \\ B \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sum_{\alpha=1}^{M} l_\alpha H \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} \\ -Hu_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - gH \dfrac{\partial}{\partial x}(H+B) \\ \vdots \\ -Hu_M \dfrac{\partial u_M}{\partial x} - gH \dfrac{\partial}{\partial x}(H+B) \\ -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{pmatrix},$$

et la vitesse d'advection $\mathcal{U}_\alpha$ est définie comme suit :

$$\mathcal{U}_\alpha = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^{M} l_\beta u_\beta, & \text{si} \quad \alpha = 0, \\ u_\alpha, & \text{si} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = M+1. \end{cases} \tag{8}$$

Ainsi les courbes caractéristiques sont solutions de :

$$\begin{aligned} &\frac{dX_{j,i+1/2}(\tau)}{d\tau} = \mathcal{U}_{j,i+1/2}\Big(\tau, X_{j,i+1/2}(\tau)\Big), \quad \tau \in [t_n, t_n + \Delta t/2], \\ &X_{j,i+1/2}(t_n + \Delta t/2) = x_{i+1/2}, \qquad j = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{9}$$

Notons que $X_{j,i+1/2}(\tau)$ est le point de départ à l'instant τ d'une particule qui arrive au point $x_{i+1/2}$ à l'instant $t_n + \Delta t/2$. Une fois les courbes caractéristiques $X_{j,i+1/2}(t_n)$ sont connues, une solution à l'interface $x_{i+1/2}$est construite comme suit :

$$\mathbf{U}^n_{j,i+1/2} = \mathbf{U}_j\left(t_n + \Delta t/2, x_{i+1/2}\right) = \tilde{\mathbf{U}}_j\left(t_n, X_{j,i+1/2}(t_n)\right), \tag{10}$$

où $\tilde{\mathbf{U}}_j\left(t_n, X_{j,i+1/2}(t_n)\right)$ est la solution au pied de la caractéristique déterminée par interpolation *i.e.*

$$\tilde{\mathbf{U}}_j\left(t_n, X_{j,i+1/2}(t_n)\right) = \mathcal{P}\Big(\mathbf{U}_j\left(t_n, X_{j,i+1/2}(t_n)\right)\Big), \tag{11}$$

où $\mathcal{P}$ représentant le polynôme d'interpolation.

3. Résultats numériques

3.1. Rupture de barrage sur fond érodable

Nous considérons maintenant le cas très classique d'une rupture de barrage sur un fond plat mais le fond évolue dans le temps suivant la loi d'Exner (1c). Comme conditions initiales, le barrage est situé à $x = 5\ m$, avec $H_l = 2\ m$ en amont du barrage et

$H_r = 0.125\ m$ en aval. La topographie est initialement plane et le fluide est au repos $u = 0\ m.s^{-1}$.

Les résultats obtenus avec le modèle couplé sont présentés dans la figure 1. Elles sont en accord avec ceux obtenus dans [3].

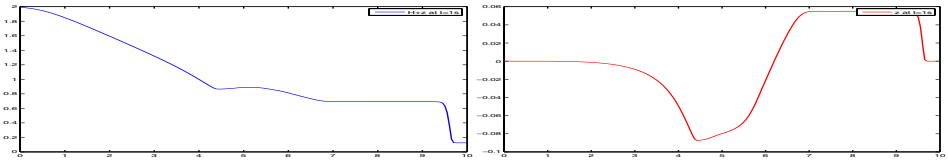


Figure 1. *Rupture de barrage sur fond érodable. Surface libre (gauche) et érosion du fond (droite).*

3.2. Modèle monocouche couplé avec Exner

Nous résolvons un problème de transport de sédiments par écoulement de recirculation dans un bassin fermé. Le lac est de longueur 2000 m et le lit initial se compose de quatre bosses données par l'équation :

$$B(x,0) = \sum_{k=1}^{4} A_k \exp\left(-\left(\frac{x-x_k}{100}\right)^2\right), \tag{12}$$

$A_1 = A_3 = 0.5, A_2 = 1, A_4 = 0.25, x_1 = 500\ m, x_2 = 800\ m, x_3 = 1100\ m$ et $x_4 = 1400\ m$.

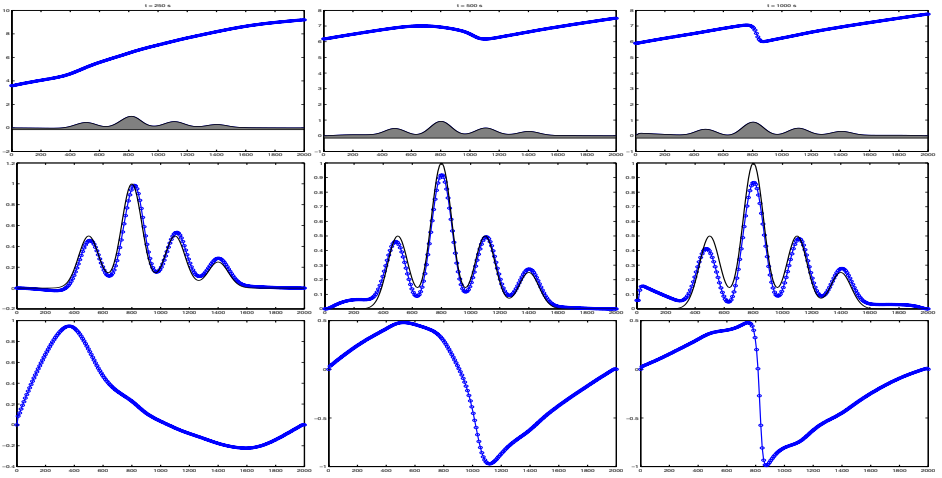


Figure 2. *Modèle monocouche couplé avec Exner. De haut en bas : (1) déformation de la surface libre sous l'action d'une source de vent soufflant de l'ouest, (2) déformation de la topographie, (3) vitesse de l'écoulement. De gauche à droite : Trois temps de simulation : (1)* $t = 250\ s$*, (2)* $t = 500\ s$*, (3)* $t = 1000\ s$*.*

3.3. Écoulement de recirculation

Nous considérons les mêmes paramètres que dans la simulation monocouche. En particulier, les conditions aux limites sont telles que $u_\alpha = 0$ pour toutes les couches.

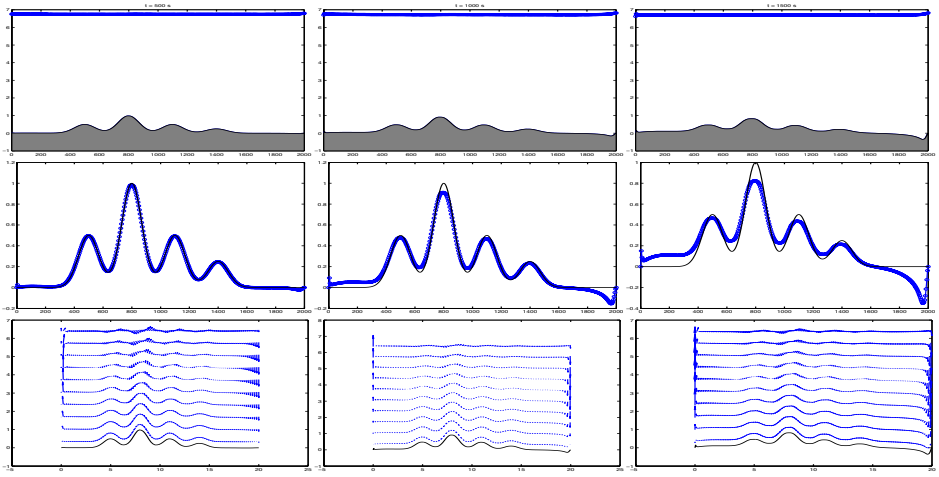


Figure 3. *Modèle multicouche couplé avec Exner. De haut en bas : (1) Surface libre sous l'action d'une source de vent soufflant de l'ouest, (2) déformation de la topographie, (3) champ de vitesse des différentes couches. De gauche à droite : Trois temps de simulation : (1)* $t = 500\ s$*, (2)* $t = 1000\ s$*, (3)* $t = 1500\ s$*.*

En comparant les figures 2 et 3, la déformation du fond présente un comportement différent qui affecte à son tour la dynamique de l'écoulement. Cette différence est liée au fait que la décharge sédimentaire dans l'équation d'Exner utilise un champ de vitesse complètement différent. Notons également que l'approche monocouche adopte une vitesse uniforme ce qui surestime (pendant la phase transitoire) la vitesse de déformation du lit, ce qui entraîne un transport plus rapide des sédiments par rapport aux résultats multicouches. En observant la figure 3, une recirculation est clairement détectée dans le bassin. Ce résultat est conforme à ce qui est observé pour les écoulements géophysiques dans les lacs ou les estuaires lorsque les effets dus à la variation de densité sont négligeables.

4. Bibliographie

[1] E. AUDUSSE, F. BENKHALDOUN, S. SARI, M. SEAID, P. TASSI, "A fast finite volume solver for multi-layered shallow water flows with mass exchange3", *Journal of Computational Physics*, vol. 272, 23-45, (2014).

[2] E. AUDUSSE, F. BENKHALDOUN, J. SAINTE-MARIE, M. SEAID, "Multilayer Saint-Venant equations over movable beds", *Discrete and conrinuous dynamical systems series B*, vol. 15, n° 4, (2011).

[3] E. AUDUSSE, C. BERTHON, C. CHALONS, O. DELESTRE,, N. GOUTAL,, M. JODEAU,, J. SAINTE-MARIE,, J. GIESSELMANN,, G. SADAKA, "Sediment transport modelling : Relaxation schemes for Saint-Venant-Exner and three layer models", *ESAIM*, vol. 38, 78-98 (2011).

Rubrique

La détection des contours et la reconstruction tridimensionnelle d'images par un algorithme optimal

$S.Boujena^1, \underline{K.Bellaj}^1, E.ElGuarmah^2, O.Gouasnouane^1$

1 MACS, Département de mathématique et informatique
Faculté des Science Ain Chock, Km 8 Route El Jadida B.P 5366 Maarif,
Casablanca, Maroc.
2 Ecole Royale de l'Air, Département de Mathématiques et Informatique,
DFST, BEFRA,POB 40002, Menara, Marrakech, Maroc.

boujena@gmail.com ; guarmah@gmail.com ; gouasnouane@gmail.com
Corresponding author: bellaj.khalid@gmail.com

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous proposons un algorithme permettant la reconstruction tridimensionnelle d'objets à partir d'une image 2D. On s'intéresse essentiellement à la reconstitution tridimensionnelle d'organes à partir d'images en séries (coupes anatomiques, scanner, IRM). Ce processus est réalisé en trois grandes étapes : l'extraction des contours des organes étudiés, leur reconstruction tridimensionnelle et leur maillage surfacique ou volumique. Pour l'extraction de contours, nous utilisons un modèle mathématique proposé par S. Boujena et al [7]. Ensuite nous proposons un algorithme basé en partie sur le travail de C. Li [12] afin de reconstituer l'organe en 3D et d'en générer un maillage par éléments finis à partir des contours obtenus de l'étape précédente. Nous donnons à la fin de ce travail une comparaison du modèle proposé par rapport aux résultats publiés dans la littérature [1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11].

ABSTRACT. In this work we propose an algorithm for three-dimensional reconstruction of objects from a 2D image. It is mainly interested in three-dimensional reconstruction of organs from images in series (anatomical sections, Scanner, MRI). This process is performed in three steps: the extraction of the contours of organs studied, their three-dimensional reconstruction and surface or volume mesh. For the contour extraction, we use a mathematical model proposed by S. Boujena et al. [7]. Then we propose an algorithm based in part on the work of C. Li [12] to reconstruct the organ in 3D and to generate a mesh by finite element from the edges obtained in the previous step. We give in the end of this work a comparison between our proposed model and the results published in the literature [1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11].

MOTS-CLÉS : Maillage, éléments-finis, Segmentation d'image, Reconstruction 3D, Détection de contours.

KEYWORDS : Mesh, finite element, image segmentation, 3D reconstruction, Edge detection.

1. INTRODUCTION

La reconstruction d'image désigne un ensemble de techniques qui permettent d'obtenir des informations sur la structure interne d'un objet. Ces techniques sont surtout utilisées en imagerie médicale ou en contrôle non destructif. Les travaux exposés dans ce travail présentent un caractère général et sont illustrés par une application au domaine médical.

Le travail effectué est réparti dans deux grandes parties dans lesquelles on trouve les différents aspects du sujet : la détection des contours et la reconstruction tridimensionnelle en traitement d'images, Figure 1.

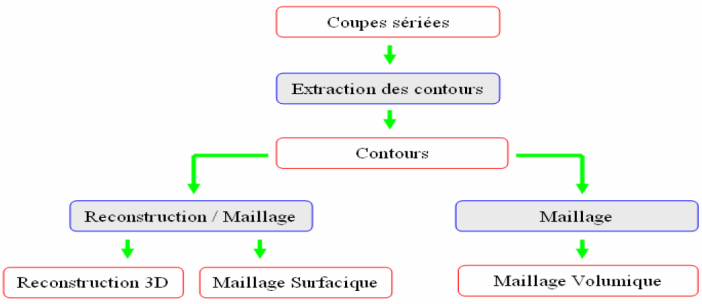


Figure 1. *Enchaînement des trois parties du schéma de traitement choisi et résultats obtenus pour chacune d'elles.*

Dans la première partie de ce travail, le problème considéré est consacré à la détection des contours d'éléments anatomiques. Les données traitées peuvent indifféremment provenir de coupes scanner, IRM ou anatomiques pour la plus large possible d'application.

Dans un second temps nous avons étudié la reconstruction tridimensionnelle et le maillage afin d'obtenir rapidement une représentation des organes à reconstruire ainsi qu'un maillage surfacique fiable composé exclusivement de quadrangles.

2. Divers types d'images à traiter en coupes sériées

La segmentation a de très nombreuses applications, notamment dans l'imagerie médicale, la stéréovision et la réalité virtuelle. Nous présentons brièvement trois type d'images :

2.1. Images scanner

Il existe deux grands types de scanners :
1- le scanner hélicoïdal : l'acquisition des images est réalisée durant un déplacement continu de la table sur laquelle repose le patient. L'image obtenue à la fin du processus est reconstruite par interpolation. Ce scanner à l'avantage d'être rapide.
2- le scanner incrémental : les images scanner sont acquises lorsque la table est immobile. Celle-ci se déplace entre chaque prise. Ce scanner malgré qu'il est plus lent , il peut fournir des images plus précises que le scanner hélicoïdal.

2.2. Coupes sériées anatomiques

Elles sont obtenues en effectuant des coupes sur un sujet d'anatomie en suivant des plans parallèles. Chacune des faces des coupes obtenues est photographiée. Les images obtenues, dont la précision dépend de la qualité de la photographie (zoom utilisé, qualité de l'appareil, ...), fournissent une représentation très précise des organes.

2.3. Images IRM

L'imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est une méthode très employée. L'image obtenue est le reflet de la variation de l'orientation des atomes d'hydrogène. Le patient est soumis à un champ magnétique constant qui oriente les spins de tous les protons (atomes d'hydrogène) dans une même direction. Une seconde antenne génère de façon intermittente un autre champ magnétique qui permet d'écarter les protons de leur direction initiale.

3. Détection de contours

La première étape vers la reconstruction tridimensionnelle et le maillage 3D surfacique [3] ou volumique [4] est la détection et l'extraction des contours 2D des organes étudiés. De nos jours il existe de nombreuses méthodes permettant d'effectuer ce travail :

3.1. Approches contours

- Basées sur l'information de gradient pour localiser les frontières des régions.
Contours : détection et fermeture de contours ou techniques de contours déformables.
- Sensibles aux bruits et aux contours mal définis, elles offrent une bonne localisation spatiale.

3.2. Approches régions

- Basées sur l'homogénéité de caractéristiques localisées spatialement et calculées sur les niveaux de gris.
- Homogénéité : variation à l'intérieur d'une région < variation entre 2 régions.
- Robustes aux bruits mais mauvaise localisation spatiale.

3.3. Méthode sélectionnée

Les plus robustes méthodes de segmentation pouvant s'appliquer dans notre cas viennent d'être explicitées. Nous avons essayé de faire en sorte que cette liste soit la plus exhaustive possible. Cependant nous n'avons évidemment pas pu tester nous même tous ces algorithmes. Nous nous sommes donc en grande partie appuyés sur diverses études les comparant afin de pouvoir les évaluer et faire notre choix parmi leur grande diversité suivants :
- Temps de calcul.
- Erreur quadratique moyenne.
- Type de contours.

3.3.1. Segmentation d'image

Pour la restauration d'image, considérons le modèle de diffusion non linéaire suivant [7] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - div(g(|\nabla u|)\nabla u) = 0, \ \text{ in } Q = \Omega x[0,T], \ \text{ for } T > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \forall x \in \Omega, \\ \partial u_\nu(x,t) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T], \end{cases} \quad [1]$$

Avec Ω en R^2 denotes the domain of image, et ν est le vecteur normal unité à la frontière du domaine $\partial\Omega$.
Notons que l'existence et l'unicité de la solution de (1) sont établies sous la même hypothèse sur g, [7] :

- $g : R^+ \longrightarrow R^+$ est une fonction décroissante.
- $g(s) = \frac{1}{\sqrt{1+(s/k)^2}} + \alpha$, $s \geq 0$, $\alpha > 0$.
- $g(0) = 1 + \alpha$.
- $\lim\limits_{s\to+\infty} g(s) = \alpha$, $\alpha > 0$.
- $2s \left| g^{'}(s) \right| \leq g(s)$, $s \geq 0$, $\alpha > 0$.

Dans cette partie de détection de contour, on a utilisé la méthode de LI avec plusieurs modification qui optimise sa performance dans plusieurs niveaux [12] :
- Optimisation de choix de contour initial.
- Ajout de point d'arrêt optimisé.
- Optimisation des passage entre série d'images traitées.
- Changement de Fonction K par [7].

Pour la segmentation d'image, considérons la méthode de LI [12] :

$$E(\Phi) = \lambda_1 \int_\Omega \int_\Omega g(x-y)|I(y) - f_1(x)|^2 H(\Phi(x))\, dy\, dx$$

$$+\lambda_2 \int_\Omega \int_\Omega g(x-y)|I(y) - f_2(x)|^2 (1 - H(\Phi(x)))\, dy\, dx$$

$$\nu \int_\Omega \delta(\Phi(x))||\nabla(\Phi(x))||\, dx + \mu \int_\Omega \frac{1}{2}(||\nabla(\Phi(x))|| - 1)^2 \, dx, \quad [2]$$

Et :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x) = \delta(\Phi(x))(\lambda_1 \int_\Omega g(x-y)|I(y) - f_1(x)|^2 \, dy$$

$$+\lambda_2 \int_\Omega g(x-y)|I(y) - f_2(x)|^2 \, dy) + \nu\delta(\Phi(x))\kappa + \mu(\nabla^2\Phi(x) - \kappa), \quad [3]$$

Et :

$$f_1(x) = \frac{g * (H(\Phi(x))I(x))}{g * H(\Phi(x))} \quad [4]$$

$$f_2(x) = \frac{g * ((1 - H(\Phi(x))I(x))}{g * (1 - H(\Phi(x)))} \quad [5]$$

$$K_\sigma(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-||u||^2/2\sigma^2} \quad [6]$$

$$\mu(|\nabla u|) = \frac{1}{\sqrt{1 + (|\nabla u|)^2}} + \alpha \quad [7]$$

Où Ω dans R^2 indique le domaine de l'image, $I(x)$ est l'intensité de l'image au pixel x, H est la fonction Heaviside, λ_1 et λ_2 sont deux constantes et ν est le vecteur normal unitaire de la limite de domaine $\partial\Omega$.

4. Reconstruction tridimensionnelle

Lorsque l'on parle de maillage il existe une autre façon de classer les méthodes, suivant le type d'approche qu'elles utilisent :

- l'approche directe (où la surface elle-même est maillée) :

Méthode par Balayage : Si la géométrie du domaine s'y prête une méthode par balayage peut être appliquée . Ainsi si la surface peut être créée en déplaçant une courbe C1 le long d'une courbe C2 il est possible de tirer partie de cette particularité afin de générer un maillage de la surface. Ce type de géométrie est typiquement une surface de révolution, une surface réglée ou les surfaces d'extrusion.

Connection de sections : La connection de sections ne peut s'effectuer que lorsque les données de départ sont sous forme de contours planaires. Le principe est d'utiliser la structure des sections et de générer les éléments qui permettront de les joindre entre elles.

- l'approche indirecte (où un maillage est construit dans un espace de paramètres puis reporté sur la surface) :

Méthode algébrique : Lorsque la surface à reconstruire est définie par interpolation algébrique (grâce à des carreaux de Béziers ou de Coons par exemple) ou par un produit tensoriel, les carreaux résultants de cette définition peuvent être utilisés afin de générer un maillage en quadrangles.

Projection paramétrée : Si l'on peut définir une relation entre la surface à reconstruire et un espace des paramètres (le plus simple des cas étant lorsque la surface est définie de façon paramétrique), il est possible d'utiliser cette correspondance. Un maillage 2D de l'espace des paramètres peut être généré en utilisant des méthodes classiques (généralement une décomposition Quadtree,

une méthode d'avancement de front ou une décomposition de Delaunay) puis être reporté sur la surface.
Dans ce qui suite nous allons utilisés la méthode de connections de sections pour passer de l'étape de détection des contours de tous les images 2D de l'objet 3D (voir Figure 2) a l'étape final la reconstruction tridimensionnelle et le maillage afin d'obtenir rapidement une représentation des organes à reconstruire ainsi qu'un maillage surfacique fiable.

5. Résultats expérimentaux

Nous considérons une ensemble des images de 128 * 128 pixels corrompue par des Bruit gaussien (variance de 10^{-3}). Nous présentons les résultats après 10, 30 et 50 itérations sur la Figure 2.

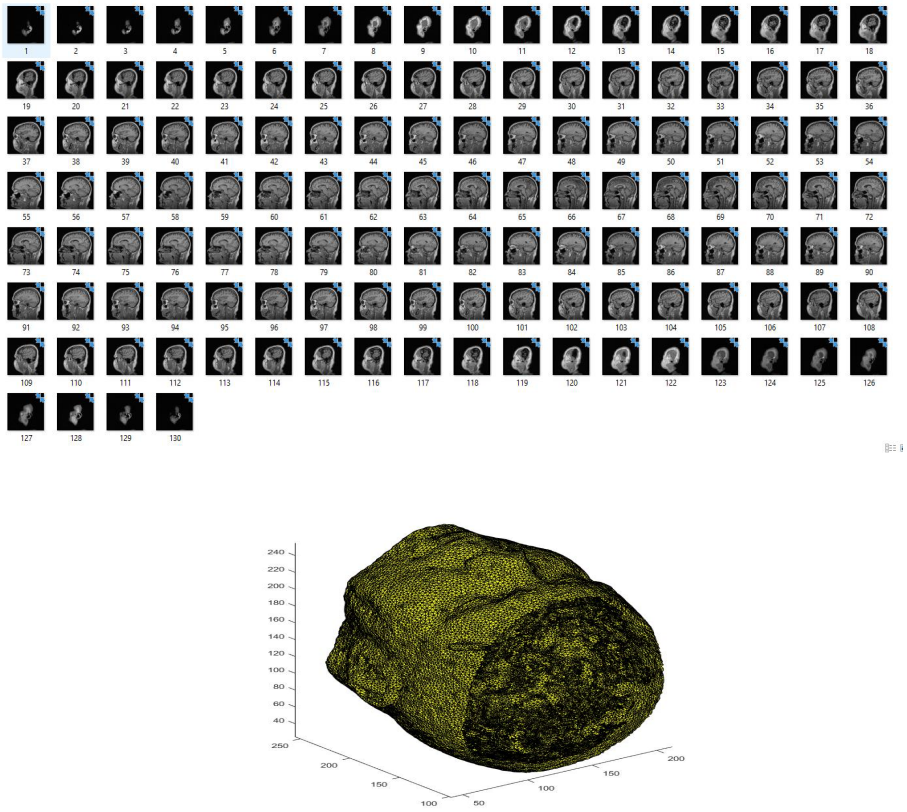


Figure 2. *Reconstruction tridimensionnelle du crâne humaine avec notre méthode.*

Les résultats de MSE et CPU pour les différentes itérations sont signalés dans le Tableau 1 et montrent l'efficacité de la méthode de Li améliorée avec la méthode de connections de sections.

Segmentation d'image	CPU	MSE	Reconstruction tridimensionnelle	CPU
Méthode de Caselles	21.09	49.22	Connections de sections	142.36
Méthode de Chan and Vese	19.18	39.10	Connections de sections	130.68
Méthode de Bernard	15.13	29.43	Connections de sections	113.50
Méthode de Lankton	17.52	21.05	Connections de sections	124.02
Méthode de Shi	26.32	39.35	Connections de sections	129.57
Méthode de Li	**11.11**	**15.4**	Connections de sections	**109.54**
Méthode de Li améliorée	**9.86**	**4.4**	Connections de sections	**89.00**

Tableau 1. *Comparaison des valeurs MSE, CPU pour reconstruction tridimensionnelle avec plusieurs méthodes [8],[9],[11],[12],[13].*

6. Bibliographie

[1] P. L. BAEHMANN, S. L. WITTCHEN, M. S. SHEPHARD, K. R. GRICE AND M. A. YERRY, « Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation« , *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp.1043-1078, 1987.

[2] V. BARRA,« Fusion d'images 3D du cerveau - Etude de Modèles et Applications », *Thèse d'informatique - traitement d'images*, 2000.

[3] M. BEHR AL, « A human model for road safety : from geometrical acquisition to model validation with radios. », *in Computer Methods in Biomechanics Biomedical Engineering*, vol. 4, 2001.

[4] M. BEHR , « Etude de l'influence de la tonicité musculaire en choc automobile », *Mémoire de DEA, Université de la Méditerranée*, 2002.

[5] O. BERNARD, D. FRIBOULET, P. THEVENAZ, M. UNSER, « B-Spline Level-Set : A Linear Filtering Approach for Fast Deformable Model Evolution », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 18, pp. 1179-1191, June 2009.

[6] S. BEUCHER, « Segmentation d'images et morphologie mathématique », *Thèse de doctorat, cahiers du centre de morphologie mathématique, fascicule n°10, Ecole des Mines*, Paris, France, Juin 1990.

[7] S. BOUJENA, E. EL GUARMAH, O. GOUASNOUANE, J. POUSIN, « An Improved Nonlinear Model for Image Restoration », *Pure and Applied Functional Analysis*, submitted January 2016.

[8] V. CASELLES, R. KIMMEL, AND G. SAPIRO, « active contours », *Int. J. of Computer Vision*, vol. 22, pp. 61-79, 1997.

[9] T. CHAN AND L. VESE, « contours without edges », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 10, pp. 266-277, February 2001.

[10] T. DIETENBECK, M. ALESSANDRINI, D. FRIBOULET, AND O. BERNARD, « : a free software for the evaluation of image segmentation algorithms based on level-set« , *IEEE International Conference On Image Processing*, Hong Kong, China, 2010.

[11] S. LANKTON AND A. TANNENBAUM, « region-based active contours », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 2029-2039, November 2008.

[12] C. LI, C.-Y. KAO, J. C. GORE, Z. DING, « of region-scalabletting energy for image segmentation », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 17, pp. 1940-1949, 2008.

[13] Y. SHI AND W. C. KARL, (2008), « real-time algorithm for the approximation of level-set based curve evolution », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. vol 17, 645-656.

Homogeneization theory for the derivation of higher-order macroscopic models for diffusion MRI

Marwa Kchaou* — Houssem Haddar** — Maher Moakher*

* Université de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LAMSIN, B.P. 37, 1002 Tunis, Tunisia.
** CMAP, Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France.
butterflymarwamath@gmail.com (M. Kchaou), houssem.haddar@inria.fr (H. Haddar), maher.moakher@enit.rnu.tn (M. Moakher).

ABSTRACT. Diffusion Magnetic Resonance Imaging is an effective tool to obtain useful information on the microscopic structure and has been extensively applied to biological tissues, notably, in the brain. We establish a new macroscopic model from homogenization theory for the complex transverse water proton magnetization in a voxel due to diffusion-encoding magnetic field gradient pulses in the case of biological tissue with impermeable membranes where there is no exchange of water across the membranes. In this model, new higher-order diffusion tensors emerge and offer more information about the structure of the biological tissues. Finally, we present some preliminary numerical results for the determination of the effective tensors.

RÉSUMÉ. L'imagerie par résonance magnétique de diffusion est un outil efficace pour obtenir des informations utiles sur la structure microscopique qui a été largement utilisé pour les tissus biologiques, notamment dans le cerveau. Nous établissons un nouveau modèle macroscopique à partir de la théorie de l'homogénéisation pour la magnétisation transversale des protons d'eau dans un voxel dû à des impulsions de gradient de champ magnétique encodant la diffusion dans le cas de cellules biologiques avec des membranes imperméables, c'est-à-dire où il n'y a pas d'échange d'eau à travers les membranes. Dans ce modèle, de nouveaux tenseurs de diffusion d'ordre supérieur émergent et offrent plus d'informations sur la structure des tissus biologiques. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques préliminaires pour la détermination des tenseurs effectifs.

KEYWORDS : Periodic homogenization, diffusion MRI, two-scale asymptotic expansion, macroscopic model.

MOTS-CLÉS : Homogénéisation périodique, IRM de diffusion, développement asymptotique à deux échelles, modèle macroscopique.

1. Introduction

Diffusion Magnetic Resonance Imaging (dMRI) is a non-invasive imaging technique that is applied in material sciences to investigate structural and transport properties of porous media as well as in medicine and neuroscience to study anatomical, physical, and functional properties of biological tissues and organs such as brain, muscules and bones [3]. The classical dMRI experiment consists in applying two pulsed-gradient magnetic fields with a 180 degree spin reversal between the two in order to encode the displacement of water molecules between the two pulses [4, 5].

Homogenization method is a mathematical theory of averaging. It is an approach of change of scale from microscopic scale (cellular-level) to macroscopic scale (pixel-level) [1]. For simplicity, in this work we use periodic homogenization theory. Hence, we make the hypothesis that the domain is periodic and make the formal homogenization of our model problem in the periodic context.

In this paper, starting from a microscopic model of the complex transverse water proton magnetization, due to diffusion-encoding magntic field gradient pulses in a spatial volume on the order of a voxel, which mathematically takes the form of a Bloch-Torrey partial differential equation, we will provide a macroscopic limit model, through homogenization, that is applicable to general diffusion-encoding magnetic field gradients.

2. Bloch-Torrey equations

For a volume $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ or 3) occupied by a biological tissue, we denote by Γ the union of the boundaries of all the "two-compartment" cells included in Ω. The domain Ω_{ext} then represents the union of the extra-cellular and intra-cellular domains

$$\Omega_{\text{ext}} = \Omega \setminus \Gamma = \Omega_e \cup \Omega_c.$$

The complex transverse water proton magnetization $\boldsymbol{M} = M_x + \imath M_y$, is modeled by the following Bloch-Torrey equation [3, 4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \imath f(t)\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t) - \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega_{ext}\times]0,T[, \\ [\![\sigma(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}_{|\Gamma}]\!] = 0, & \text{on } \Gamma, \\ \sigma(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}_{|\Gamma} = \kappa[\![\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)]\!], & \text{on } \Gamma, \\ \boldsymbol{M}(\cdot,0) = \boldsymbol{M}_{\text{init}}, & \text{in } \Omega_{\text{ext}}, \end{cases} \tag{1}$$

where $T > 0$ is the final time, $\boldsymbol{\nu}$ is the normal exterior to the domain, $\boldsymbol{M}_{\text{init}}$ is the initial magnetization, $[\![\cdot]\!]$ is the jump across the interface Γ (extra-cellular minus intra-cellular), κ is the permeability coefficient of the interface (in this work we take $\kappa = 0$, i.e., without membrane exchange) and σ is the intrinsic diffusion coefficient

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_e, & \text{in } \Omega_e, \\ \sigma_c, & \text{in } \Omega_c. \end{cases}$$

The constant vector, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d$, contains the amplitude and direction of the applied diffusion-encoding magnetic field gradient multiplied by the gyro-magnetic ratio of water protons. The interface condition considered in the model (1) corresponds to impermiable interface which means that water can't move between the cells and the extra-cellular space

like myelin layer of the myelinated axons [4]. The time profile, $f(t)$, is the classical Pulsed Gradient Spin Echo (PGSE) sequence, with two rectangular pulses of duration δ, separated by a time interval $\Delta - \delta$, see e.g. [5].

For simplicity and in order to be able to apply the homogenization method [1], we will assume that the volume to be modeled, Ω, can be described as a periodic domain. We assume that the size of the period is ε which is small compared to the size of Ω. We define the unit periodicity cell $Y =]0,1[^d$ such that $Y = Y_e \cup Y_c$ and $\Gamma_m = \partial Y_c = \partial Y_e \setminus \overline{\partial Y}$. We also define the sets

$$\Xi_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{Z}^d | \varepsilon(\xi + Y) \cap \Omega \neq \varnothing\},\ \Omega_c^\varepsilon = \underset{\xi\in\Xi}{\cup}\{\varepsilon(\xi + Y_c) \cap \Omega\},\ \Gamma_m^{\varepsilon,\xi} = \varepsilon(\xi + \Gamma_m) \cap \Omega.$$

Therefore, problem (1) can be rewritten as:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{M}_\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \iota f(t) Q(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{M}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) - \operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \nabla \boldsymbol{M}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega_c^\varepsilon \times]0,T[, \\ \sigma_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \nabla \boldsymbol{M}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{\nu}_{|_{\Gamma_m^{\varepsilon,\xi}}} = 0, & \forall \xi \in \Xi_\varepsilon, \\ \boldsymbol{M}_\varepsilon(\cdot,0) = \boldsymbol{M}_{\text{init}}, & \text{in } \Omega_c^\varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

where $\sigma_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \sigma(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = \sigma_c(\boldsymbol{x})$ and $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{x}$. We assume that the initial data $\boldsymbol{M}_{\text{init}}$ defined on Ω is independent of ε.

3. A macroscopic model through two-scale asymptotic expansion

Following the classical periodic homogenization technique, we use the two-scale asymptotic expansion for $\boldsymbol{M}_\varepsilon$:

$$\boldsymbol{M}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{M}_n\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}, t\right) \qquad \text{in } \Omega_c^\varepsilon, \tag{3}$$

where the function $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ is defined on $\Omega \times Y_c \times]0,T[$. Therefore, the first two equations in (2) become

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+2} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{M}_n + \iota Q f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+2} \boldsymbol{M}_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+2} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_n) \\ \qquad - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1} \left(\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\sigma \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_n) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_n)\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_n) = \boldsymbol{0}, \\ \varepsilon^0 \sigma \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \varepsilon^1 \sigma\left(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}\right) + \varepsilon^2 \sigma\left(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}\right) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1} \sigma\left(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_n \cdot \boldsymbol{\nu}\right) = 0. \end{cases}$$

3.1. Macroscopic model for M_0

By equating the zeroth-order terms in ε we get

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Y_c, \\ \sigma \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \boldsymbol{M}_0 \text{ is } Y\text{-periodic.} \end{cases} \tag{4}$$

Let us recall the following lemma:

Lemma 3.1. *[1] Let $f \in L^2(Y)$ and $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Then, there exists a unique (up to an additive constant) solution $u \in H^1(Y)$ to*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y})) = f(\boldsymbol{y}), & \text{in } Y, \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\nu} = h(\boldsymbol{y}), & \text{on } \Gamma, \\ u(\boldsymbol{y}) \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases}$$

if and only if $\int_Y f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_\Gamma h(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = 0$.

Multiplying the first equation in (4) by a test function ϕ, integrating over Y_c and after using Green's formula we get $\int_{Y_c} \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_0 \nabla_{\boldsymbol{y}} \phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0$. In particular, for $\phi = \boldsymbol{M}_0$ we obtain $\int_{Y_c} |\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_0|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0$. It follows from Lemma 3.1 that $\boldsymbol{M}_0$ does not depend on $\boldsymbol{y}$.

By equating the first-order terms in ε we get

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_1 + \sigma\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Y_c, \\ \sigma\,(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_1 + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \boldsymbol{M}_1 \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{5}$$

which, by Lemma 3.1, has a unique (up to an additive constant) solution $\boldsymbol{M}_1$ that depends on the gradient $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0$.

For each vector $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, d$ of the canonical basis of $\mathbb{R}^d$, we introduce the cell problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \omega_i + \sigma\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \omega_i \cdot \boldsymbol{\nu} + \sigma\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \omega_i \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{6}$$

which, according to Lemma 3.1, has a unique solution with zero mean, i.e., $\langle \omega_i \rangle_{Y_c} := \frac{1}{|Y_c|} \int_{Y_c} \omega_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0$. Let $\widehat{\boldsymbol{M}}_1 = \langle \boldsymbol{M}_1 \rangle_{Y_c}$, then one can express the solution to (5) as

$$\boldsymbol{M}_1 = \sum_{i=1}^{d} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{M}_0 + \widehat{\boldsymbol{M}}_1, \qquad \text{in } Y_c. \tag{7}$$

Now, by equating the second-order terms in ε we get

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_2 + \sigma\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_1) = \\ \qquad \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_1 + \sigma\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0) - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{M}_0 - \iota Q f(t) \boldsymbol{M}_0, & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} + \sigma\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \boldsymbol{M}_2 \text{ is } Y\text{-periodic}. \end{cases} \tag{8}$$

Using Lemma 3.1, it is easy to see that the compatibility condition on $\boldsymbol{M}_2$ implies

$$\int_{Y_c} \left(\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{M}_1 + \sigma\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{M}_0) - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{M}_0 - \iota Q f(t) \boldsymbol{M}_0 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.$$

We define the homogenized second-order tensor $\mathbb{D}$ by

$$\mathbb{D}_{ij} := \langle \sigma\nabla\omega_j \cdot \boldsymbol{e}_i + \sigma\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle_{Y_c}, \quad i, j = 1, \ldots, d.$$

By using the divergence theorem in (6), we have

$$\int_{Y_c} \sigma(\nabla\omega_j + \boldsymbol{e}_j) \cdot \nabla\omega_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = -\int_{Y_c} \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma(\nabla\omega_j + \boldsymbol{e}_j))\omega_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.$$

We then conclude that $\mathbb{D}$ is symmetric as its components can be written as $\mathbb{D}_{ij} = \langle \sigma(\nabla\omega_j + \boldsymbol{e}_j)\cdot(\nabla\omega_i + \boldsymbol{e}_i)\rangle_{Y_c}$. We therefore obtain the macroscopic model for $\boldsymbol{M}_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{M}_0 + \iota Q f(t)\boldsymbol{M}_0 - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{D}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \boldsymbol{M}_0(\cdot,0) = \boldsymbol{M}_{\text{init}}, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

3.2. A macroscopic model for $\widehat{M}_1$

To derive the macroscopic model for $\widehat{\boldsymbol{M}}_1$, we consider, for $i,j = 1,\dots,d$, the cell problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\chi_{ij}) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}(\sigma\omega_i), & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\chi_{ij}\cdot\boldsymbol{\nu} + \sigma\omega_i\nu_j = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \chi_{ij} \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{10}$$

and

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\varphi_{ij}) = \sigma\frac{\partial}{\partial y_i}\omega_j + \sigma\delta_{ij} - \langle\sigma\frac{\partial}{\partial y_i}\omega_j + \sigma\delta_{ij}\rangle_{Y_c}, & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\varphi_{ij}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \varphi_{ij} \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{11}$$

which, according to Lemma 3.1, have unique zero-mean solutions χ_{ij} and φ_{ij}.

By defining the homogenized third-order tensor $\mathbb{H}$ through

$$\mathbb{H}_{ijk} = \langle\sigma\frac{\partial}{\partial y_k}(\chi_{ij} + \varphi_{ij})\rangle_{Y_c}, \qquad i,j,k = 1,\dots,d,$$

and recalling that $\boldsymbol{M}_0, \widehat{\boldsymbol{M}}_1$ are independent of $\boldsymbol{y}$ and that $\langle\omega\rangle_{Y_c} = 0$, we obtain the following macroscopic model for $\widehat{\boldsymbol{M}}_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{\boldsymbol{M}}_1 + \iota Q f(t)\widehat{\boldsymbol{M}}_1 - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{D}\nabla_{\boldsymbol{x}}\widehat{\boldsymbol{M}}_1) = \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{H} : \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_0), & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \widehat{\boldsymbol{M}}_1(\cdot,0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{12}$$

3.3. A macroscopic model for $\widehat{M}_2$

For each i, let us introduce the cell problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\theta_i) = \omega_i, & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\theta_i\cdot\nu = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \theta_i \text{ is } Y\text{-periodic}. \end{cases} \tag{13}$$

which admits a unique zero-mean solution θ_i. For $i,j,k = 1,\dots,d$ we consider the cell problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\mathcal{Q}_{ijk}) = \sigma\omega_j\delta_{ki} + \sigma\frac{\partial}{\partial y_k}(\chi_{ij} + \varphi_{ij}) - \langle\sigma\frac{\partial}{\partial y_k}(\chi_{ij} + \varphi_{ij})\rangle_{Y_c}, & \text{in } Y_c \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\mathcal{Q}_{ijk}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, & \text{on } \Gamma_m \\ \mathcal{Q}_{ijk} \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{14}$$

and

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\boldsymbol{y}}(\sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\mathcal{R}_{ijk}) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sigma(\chi_{ij}+\varphi_{ij})\right), & \text{in } Y_c, \\ \sigma\nabla_{\boldsymbol{y}}\mathcal{R}_{ijk}\cdot\boldsymbol{\nu} + \sigma(\chi_{ij}+\sigma\varphi_{ij})\nu_k = 0, & \text{on } \Gamma_m, \\ \mathcal{R}_{ijk} \text{ is } Y\text{-periodic}, \end{cases} \tag{15}$$

which, according to Lemma 3.1, admit unique zero-mean solutions $\mathcal{Q}_{ijk}$ and $\mathcal{R}_{ijk}$.

By defining the homogenized fourth-order tensor $\mathbb{T}$ with components

$$\mathbb{T}_{ijkl} = \langle \sigma \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\mathcal{Q}_{ijk}+\mathcal{R}_{ijk}\right)\rangle_{Y_c}, \quad i,j,k,l = 1,\dots,d,$$

we obtain the macroscopic model for $\widehat{\boldsymbol{M}}_2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{\boldsymbol{M}}_2 + \iota Q f(t)\widehat{\boldsymbol{M}}_2 - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{D}\nabla_{\boldsymbol{x}}\widehat{\boldsymbol{M}}_2) = \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{H} : \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\widehat{\boldsymbol{M}}_1) \\ \qquad + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{T} \therefore \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_0) - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\left(\mathbb{D}\nabla_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{S} : \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_0)\right) \\ \qquad\quad + \iota f(t)\mathbb{S} : \boldsymbol{q}\otimes\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_0, & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \widehat{\boldsymbol{M}}_2(\cdot,0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

where $\mathbb{S}_{ij} = \sigma\langle\frac{\partial}{\partial y_j}\theta_i\rangle_{Y_c}$.

Finally, let $\boldsymbol{M}_{\epsilon,2} = \boldsymbol{M}_0 + \epsilon\widehat{\boldsymbol{M}}_1 + \epsilon^2\widehat{\boldsymbol{M}}_2$. Then, using the three macroscopic models for $\boldsymbol{M}_0$, $\widehat{\boldsymbol{M}}_1$ and $\widehat{\boldsymbol{M}}_2$ given in (9), (12) and (16), we obtain the following third-order model

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{M}_{\epsilon,2} - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\left(\mathbb{D}\nabla_{\boldsymbol{x}}(1-\epsilon^2\mathbb{S} : \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{M}_{\epsilon,2}\right) - \epsilon\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{H} : \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_{\epsilon,2}) \\ -\epsilon^2\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{T} \therefore \nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_{\epsilon,2}) + \iota f(t)\left(Q\boldsymbol{M}_{\epsilon,2} - \epsilon^2\mathbb{S} : \boldsymbol{q}\otimes\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}_{\epsilon,2}\right) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \boldsymbol{M}_{\epsilon,2}(\cdot,0) = \boldsymbol{0}, & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

4. Numerical experiment

In the numerical experiment, we considered the periodic cell Y shown in Figure 1 and we took $\sigma = 3\times10^{-3}$. We used the FreeFEM software to compute the solutions to the cell problems described above and have found the following results:
The second-order effective diffusion tensor is

$$\mathbb{D} = 10^{-3}\times\begin{bmatrix} 2.339121039 & -0.000018335 \\ -0.000018335 & 2.339130545 \end{bmatrix}.$$

The third-order effective diffusion tensor is

$$\mathbb{H} = 10^{-8}\times\left[\begin{array}{cc|cc} 0.0001195039 & -2.168859661 & 2.168807185 & 0.000000000 \\ -0.0000000001 & -1.926646182 & 1.926763625 & -0.000050894 \end{array}\right].$$

The fourth-order effective diffusion tensor is

$$\mathbb{T} = 10^{-3}\times\begin{bmatrix} 2.41645417 & -2.394184794 & -0.000054988 & -0.000110047 \\ -2.39419101 & 2.416253334 & 0.000054435 & 0.000122159 \\ -0.00005495 & 0.000054307 & -0.780038564 & 0.251888863 \\ -0.00011015 & 0.000122173 & 0.251888846 & -0.780102439 \end{bmatrix}.$$

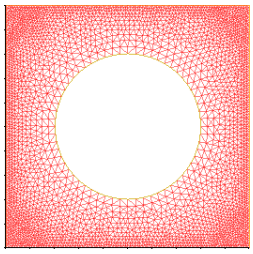


Figure 1. *The considered periodic cell. The square has sides of unit lenght and the disk has radius 0.3.*

5. Conclusion

In this work, we have used homogenization theory to derive a macroscopic model from for the complex transverse magnetization due to diffusion-encoding magnetic field gradient pulses in the case of biological tissue with impermeable membranes. In this model, new higher-order diffusion tensors emerge and offer more information about the structure of the biological tissues. In forthcoming works, we will push further the numerical studies.

6. References

[1] G. ALLAIRE, "Conception Optimale des Structures", SMAI, 2007.

[2] J. COATLÉVEN, H. HADDAR, J. R. LI, "A macroscopic model including membrane exchange for diffusion MRI", *Signal Processing*, vol. 74, num. 2, pp. 516–546, 2014.

[3] D. S. GREBENKOV, "From the microstructure to diffusion MRI, and back", Preprint, Ecole Polytechnique, 2015.

[4] D. HOA , A. MICHEAU , G. GAHIDE , E. LE BARS , P. TAOUREL, "L'IRM pas à pas", *SAURAMPS / CAMPUS MEDICA*, 2008.

[5] S. MORI, "Introduction to Diffusion Tensor Imaging", Elsevier, 2007.

A NEW STABILITY NUMBER OF THE BRESSE–CATTANEO SYSTEM

LEILA DJOUAMAI AND BELKACEM SAID-HOUARI

Abstract. In this paper, we consider the Bresse–Cattaneo system with a frictional damping term and prove some optimal decay results for the L^2-norm of the solution and its higher order derivatives. In fact, we show that there is a completely new stability number δ that controls the decay rate of the solution. To prove our results, we use the energy method in the Fourier space to build some very delicate Lyapunov functionals that give the desired results. We also prove the optimality of the results by using the eigenvalues expansion method. In addition, we show that for the absence of the frictional damping term, the solution of our problem does not decay at all. This results improves the one in [4].

1. Introduction

In this paper, we study the stability of the initial value problem of the Bresse–Cattaneo system by introducing some frictional dissipative mechanisms. Namely, we consider the system

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi - lw)_x - k_0^2 l\,(w_x - l\varphi) = 0, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (\varphi_x - \psi - lw) + m\theta_x = 0, \\ w_{tt} - k_0^2\,(w_x - l\varphi)_x - l\,(\varphi_x - \psi - lw) + \gamma w_t = 0, \\ \theta_t + q_x + m\psi_{tx} = 0, \\ \tau_q q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

with the initial data

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta, q)(x,0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0)\,. \tag{1.2}$$

where $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, the functions φ, ψ and w denote the vertical displacements of the beam, the rotation angle of the linear filaments material and longitudinal displacements respectively, the function θ is the temperature difference and a, l, k_0, m, β, γ and τ_q are positive constants. System (1.1) is the coupling between the Bresse system (circular arch problem):

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi - lw)_x - k_0^2 l\,(w_x - l\varphi) = 0, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (\varphi_x - \psi - lw) = 0, \\ w_{tt} - k_0^2\,(w_x - l\varphi)_x - l\,(\varphi_x - \psi - lw) + \gamma w_t = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35B37, 35L55, 74D05, 93D15, 93D20.
Key words and phrases. Decay rate, Bresse system, regularity loos, Cattaneo's law, wave speeds.

and the Cattaneo system of heat conduction, written in the one-dimensional case as

$$\begin{cases} \theta_t + q_x = 0, \\ \tau_q q_t + \beta q + \theta_x = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Recently in [4], the authors investigated the decay rate of system (1.1) and showed the following:

- For $\alpha = 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6}\|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/2}\|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}. \tag{1.5}$$

- For $\alpha \neq 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6}\|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/10}\|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}, \tag{1.6}$$

where $U = (\varphi_x - \psi - lw, \varphi_t, a\psi_x, \psi_t, k_0(w_x - l\varphi), w_t, \theta, q)^T$ and α is the parameter

$$\alpha(\tau_q) = \alpha = (\tau_q - 1)(1 - a^2) - \tau_q m^2.$$

No optimality of the decay rates has been shown in [4]. Similar decay rates have been also proved for the Bresse–Fourier system (the system associated to $\tau_q = 0$) in [7] under the same assumption on $\alpha(0)$.

Our main goal in this paper is to show the optimality decay rates of the Bress–Cattaneo system (1.1). In fact, by introducing new (very delicate) Lyapunov functionals, we improved the estimates (1.5) and (1.6) and obtained instead

$$\left\|\partial_x^k U(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2}\left\|U_0\right\|_{L^1} + Ce^{-ct}\left\|\partial_x^k U_0\right\|_{L^2}, \quad \text{for } \alpha = 0, \tag{1.7}$$

and

$$\left\|\partial_x^k U(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2}\left\|U_0\right\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell}\left\|\partial_x^{k+\ell} U_0\right\|_{L^2}, \quad \text{for } \alpha \neq 0. \tag{1.8}$$

In addition, we proved, by using the eigenvalues expansion method, that the estimates (1.7) and (1.8) are optimal and they cannot be improved. In addition, we found a completely new parameter

$$\delta = k_0^2 l^2 - l^2 - 1 \tag{1.9}$$

and showed that the estimates (1.7) and (1.8) are obtained under the assumption

$$\delta \neq 0.$$

To show the above estimates, we applied the energy method in the Fourier space and proved that the Fourier image of the solution satisfies the estimates

$$|\hat{U}(\xi,t)|^2 \leq \begin{cases} Ce^{-c\rho_1(\xi)t}|\hat{U}(\xi,0)|^2, & \text{if } \alpha = 0 \\ Ce^{-c\rho_2(\xi)t}|\hat{U}(\xi,0)|^2, & \text{if } \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

where

$$\rho_1(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} \qquad \text{and} \qquad \rho_2(\xi) = \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \tag{1.11}$$

provided that $\delta \neq 0$. It is clear that for small frequencies $|\xi| \leq 1$, both functions $\rho_1(\xi)$ and $\rho_2(\xi)$ behave as ξ^2 (similar to the heat kernel). This gives the decay rate of $(1+t)^{-1/4-k/2}$ in (1.7) and (1.8). This has been also conformed by the eigenvalues expansion. In fact we prove that, for small frequencies, the real part of four eigenvalues associated to system of the

Fourier image of the solution behave as $-c\xi^2$ and four eigenvalues behave as $-c$, for some $c > 0$. For high frequencies $|\xi| \geq 1$, the function $\rho_1(\xi)$ behaves as a positive constant c, while the function $\rho_2(\xi)$ behaves like ξ^{-2}, which means that the dissipation effect becomes very week for $|\xi| \to \infty$ and yields the regularity loss in (1.8). Similar results has been shown for the eigenvalues. In addition, we show that for $\gamma = 0$, the solution of our problem does not decay at all.

Before closing this section, we now recall some results related to the Bresse system. The initial value problem associated to (1.3), has beed first investigated by Soufyane and Said-Houari in [8] and several decay rates have been shown under different assumptions on the wave speeds of the three wave equations in (1.3). For the thermoelastic Bresse system, the initial boundary value problem was first investigated by Liu and Rao [3], where they considered the Bresse system with two different thermal dissipative mechanisms. The authors showed that the energy decays exponentially when the wave speeds of the three wave equations are equal, that is to say when $a = k_0 = 1$. Otherwise, if two of the wave speeds are different the authors found polynomial decay rates depending on the boundary conditions.

For $l = 0$, the Bresse system reduces to the Timoshenko system

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (\varphi_x - \psi) = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

Several decay result have been shown for the solution of the Cauchy problem associated to (1.12) under different type of damping mechanisms. The interested reader is referred to the papers [1, 2, 5, 6].

2. Main results

The main result in this paper reads as follows.

Theorem 2.1. *Let s be a non negative integer and assume $U_0 = (v_0, u_0, z_0, y_0, \phi_0, \eta_0, \theta_0, q_0)^T \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Then the solution $U = (v, u, z, y, \phi, \eta, \theta, q)^T$ of the system (??)-(??) and (1.9) satisfies the following decay estimates:*

$$\left\|\partial_x^k U(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2} \left\|U_0\right\|_{L^1} + Ce^{-ct} \left\|\partial_x^k U_0\right\|_{L^2}, \quad \text{for } \alpha = 0, \tag{2.1}$$

and

$$\left\|\partial_x^k U(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2} \left\|U_0\right\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell} \left\|\partial_x^{k+\ell} U_0\right\|_{L^2}, \quad \text{for } \alpha \neq 0, \tag{2.2}$$

where k and ℓ are non-negative integers satisfying $k + \ell \leq s$ and C is a positive constant, and

$$\alpha = (\tau_q - 1)\left(1 - a^2\right) - \tau_q m^2 = a^2 - 1 - \left(a^2 + m^2 - 1\right)\tau_q. \tag{2.3}$$

References

[1] K. Ide, K. Haramoto, and S. Kawashima. Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 18(5):647–667, 2008.

[2] K. Ide and S. Kawashima. Decay property of regularity-loss type and nonlinear effects for dissipative Timoshenko system. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 18(7):1001–1025, 2008.

[3] Z. Liu and B. Rao. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Z. Angew. Math. Phys.*, 60:54–69, 2009.

[4] B. Said-Houari and T. Hamadouche. The asymptotic behavior of the Bresse–Cattaneo system. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2016.

[5] B. Said-Houari and A. Kasimov. Decay property of Timoshenko system in thermoelasticity. *Math. Methods. Appl. Sci.*, 35(3):314–333, 2012.
[6] B. Said-Houari and A. Kasimov. Damping by heat conduction in the Timoshenko system: Fourier and Cattaneo are the same. *J. Differential Equations*, 255(4):611–632, 2013.
[7] B. Said-Houari and A. Soufyane. The Bresse system in thermoelasticity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 38(17):3642–3652, 2015.
[8] A. Soufyane and B. Said-Houari. The effect of frictional damping terms on the decay rate of the Bresse system. *Evolution Equations and Control Theory*, 3(4):713–738, 2014.

APPLIED MATH LAB, UNIVERSITY BADJI MOKHTAR-ANNABA, P.O. BOX 12, ANNABA 23000, ALGERIA. EMAIL: DJOUAMAI@GMAIL.COM

ALHOSN UNIVERSITY, MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES DEPARTMENT, PO BOX 38772, ABU DHABI, UNITED ARAB EMIRATES,EMAIL: BSAIDHOUARI@GMAIL.COM

Rubrique

Détection de Points Sources.

Identifiabilité et Observabilité.

Khiari Souad*

* Département de Mathématiques Appliquées
Université de Tunis El Manar-Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Tunis
Tunisie
souad.khiari@utc.fr

RÉSUMÉ. L'objectif que nous poursuivons est un résultat d'identifiabilité pour des sources ponctuelles de pollution dans le système couplé de Streeter et Phelps dispersif. La particularité réside dans le fait que les mesures sont réalisées sur l'Oxygène Dissous car elles sont raisonablement accessibles. Obtenir des informations sur la Demande Biochimique en Oxygène n'est pas simple. Par conséquent, l'excès de données sur l'OD servent d'observations indirectes sur la DBO. Il faudra traiter deux problèmes de complétion de données, chacun est posé sur une bande entre l'extrémité du cours d'eau et la station d'observation qui lui est proche. Résoudre ces deux problème produit les données manquantes sur la DBO.

ABSTRACT. The objective that we pursue is an identifiability result for pointwise sources of pollution in Streeter dispersive Phelps coupled system. The particuliarity lies in the fact that the measures are realised on Dissolved Oxygen because they are reasonably accessible. Get information on the Biochemical Oxygen Demand is not simple. Therefore, excess data on DO serve as indirect observations on BOD. Solving data completion problem occurs missing data on BOD.

MOTS-CLÉS : Identifiabilité, observabilité, sources ponctuelles, complétion de données, problème inverse mal-posé.

KEYWORDS : Identifiability, observability, pointwise sources, data completion, ill-posed inverse problem.

1. Identification de sources

La détection de sources ponctuelles dans le système couplé de DBO-OD avec dispersion est l'objectif ici. Le modèle auquel nous nous intéressons est centré sur deux traceurs basés sur l'oxygène. Le premier est l'Oxygène Dissous (OD) noté c, tandis que le second est la Demande Biochimique en Oxygène (DBO) noté b. La DBO est la fraction d'oxygène nécessaire à la biodégradation de la matière organique alors que l'OD est la quantité d'oxygène dissous dans l'eau. Le symbole x est utilisé pour l'abscisse curviligne et t est la variable temps. Nous désignons aussi $\mathcal{Q}_T = (0, L) \times (0, T)$ où $T > 0$ est l'instant final. Les deux concentrations b et c sont solutions de

$$\begin{aligned}
\partial_t b - (Db')' + Rb &= F \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\
\partial_t c - (Dc')' + R_* c + Rb &= G \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\
Db'(L,t) = Dc'(L,t) &= 0 \qquad \text{sur } (0,T) \\
-Db'(0,t) = -Dc'(0,t) &= 0 \qquad \text{sur } (0,T) \\
b(x,0) = b_0(x), \quad c(x,0) &= c_0(x) \qquad \text{sur } I.
\end{aligned} \tag{1}$$

où $F(x,t)$ représente la source de pollution, $G(x,t)$ est une source de ré-oxygénation. Elles sont ponctuelles de la forme

$$F(x,t) = f(t)\delta(x - r(t)), \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T, \tag{2}$$

$$G(x,t) = g(t)\delta(x - s(t)), \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T. \tag{3}$$

Elles sont inconnues. Leur reconstruction par un procédé mathématique requiert de rassembler des informations sur les champs b et/ou c. Très souvent, c'est la densité c de l'OD qui est observée. Des données abondantes sur cette dernière sont accessibles à faible coût. A l'opposé, les mesures sur la DBO sont difficiles à obtenir, et ce manque est donc compensé par davantage de mesures sur l'OD. Un problème similaire a été étudié dans [3], où la densité c et son flux Dc' sont observés aux points ζ et η. La différence entre les deux modèles, le notre est celui de [3], est que pour nous seule la densité c elle même est observée. Nous nous intéressons à la détermination des deux sources ponctuelles (F, G) à partir de mesures données sur $c(\cdot,\cdot)$. Soient donc données ζ, η deux points d'observations distincts tels que $0 < \zeta < \eta < L$, les observations dont mises en dispositions sont

$$B[F,G] = \Big\{ (c(0,\cdot), c(\zeta,\cdot)), \quad (c(\eta,\cdot), c(L,\cdot)), \quad 0 \le t \le T \Big\}. \tag{4}$$

Les deux stations d'observations sont localisées aux points ζ, en amont des deux sources, et η, en aval.

Des mesures disponibles sur b aux points ζ et η auraient permis de découpler la reconstitution de F et G. Le système inverse aurait gardé la structure triangulaire du problème direct. L'absence de ces mesures (sur b) renforce fortement le couplage dans le système (1) et donc la structure triangulaire est complètement perdue. Nous sommes donc conduit à employer des méthodes mathématiques pour éventuellement les reconstituer. Cela passe par l'analyse de deux problèmes de complétion de données, le premier est posé sur $(\zeta, L) \times (0, T)$ et le second est défini sur $(\eta, L) \times (0, T)$.

2. Problème de complétion de données

Nous nous intéressons dans cette section au système de complétion de données dont l'étude est nécessaire sur la voie de l'identification de sources ponctuelles. Il s'agit en réalité de considérer deux de ces problèmes, l'un posé sur la bande $(0,\zeta)\times(0,T)$ et l'autre sur $(\eta,L)\times(0,T)$. En réalité les mesures sur b sont difficile à obtenir, les conditions $-Db'(0,t)=-Dc'(0,t)=0$, sont donc remplacées par les observations

$$c(0,t)=\alpha_0(t), \qquad c(L,t)=\alpha(t) \qquad \text{sur } (0,T).$$

L'objectif premier est de reconstruire la condition manquante $b(0,t)=\gamma(t)$ à partir de la condition supplémentaire sur l'oxygène dissous,

$$c(L,t)=\alpha(t), \qquad \text{sur } (0,T). \tag{5}$$

Les effets de ce changement de conditions sont drastiques. La nature du problème est complètement modifiée car il devient inverse, mal-posé et fortement couplé. La question spécifique étudiée ici est liée à la redondance de la condition à la limite en $x=L$ sur la concentration de c, pour compenser le manque de données sur la densité de b. Comme mentionné dans [3], l'étude à réaliser est loin d'être facile. Indiquons que dans toute la suite nous fixons $\alpha_0(\cdot)=0$, ce qui ne restreint en rien la généralité des résultats obtenus.

Degré d'instabilité— Nous poursuivons le calcul du degré d'instabilité de ce problème, comme défini dans [5]. L'étude est réalisée en supposant que les paramètres physiques sont constants. Ce qui nous intéresse est la sensibilité de la reconstruction du flux $\gamma(\cdot)$ par rapport à la mesure α dans (5). Une dernière hypothèse consiste à supposer que (b_0,c_0) sont nulles. Le problème de réaction-dispersion considéré est

$$\begin{aligned}
\partial_t b_\gamma - Db_\gamma'' + Rb_\gamma &= 0 \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\
\partial_t c_\gamma - Dc_\gamma'' + R_* c_\gamma + Rb_\gamma &= 0 \qquad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\
Db_\gamma'(L,t) = Dc_\gamma'(L,t) &= 0 \qquad \text{sur } (0,T) \\
b_\gamma(0,t)=\gamma(t), \quad c_\gamma(0,t) &= 0 \qquad \text{sur } (0,T) \\
b_\gamma(x,0)=0, \quad c_\gamma(x,0) &= 0 \qquad \text{sur } I.
\end{aligned} \tag{6}$$

Si γ est donné, le système direct (6) est triangulaire et admet une solution unique (b_γ,c_γ). L'opérateur linéaire S défini par

$$(S\gamma)(t) := c_\gamma(L,t) \qquad \text{sur } (0,T),$$

joue un rôle central dans l'équation inverse (5). Chercher γ revient à inverser l'opérateur S qui est continu de $L^2(0,T)$ dans $L^2(0,T)$. Nous allons établir sa compacité et examiner ses valeurs singulières.
En utilisant les séries de Fourier dans (6), dans le cas où les paramètres sont constants ($D=1, R=R_*=1$), il ressort que S est finalement un opérateur de convolution.

$$(S\gamma)(t)=\int_0^t K(t-s)\gamma(s)\,ds \qquad \forall t\in(0,T).$$

Le noyau de convolution $K(\cdot)$ est donné par (avec $\mu_k=(\omega_k)^2+1$ et $\omega_k=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}$).

$$K(s)=-\frac{2}{L}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+\frac{1}{2})se^{-\mu_k s} \qquad \forall s\in(0,T).$$

L'équation (5) est une équation de type Volterra. L'opérateur S est un opérateur compact puisque son noyau de convolution K appartient à $L^2(0,T)$. Il s'ensuit que le problème (5) est mal-posé. Pour en savoir plus à quel point le problème est mal-posé, il est nécessaire de voir le comportement des valeurs singulières de cet opérateur. Ce comportement dépend de la régularité du noyau K au voisinage de zéro. Ce qui revient à vérifier le caractère plat du noyau K en $s = 0$. Nous illustrons ce caractère dans la FIG. 1 pour le noyau de convolution K et ses premières dérivées $K'(\cdot)$, $K''(\cdot)$ et $K'''(\cdot)$. Dans la représentation graphique, nous avons fixé et $L = \pi$. Le noyau K est fortement plat, ce qui fait que les valeurs singulières décroissent rapidement vers zéro. C'est la confirmation que le problème (5) est sévèrement mal-posé.

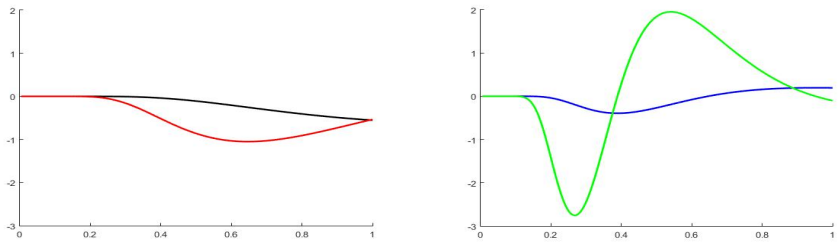


Figure 1. *Les courbes représentatives des noyaux* $10 * K$ *(noir),* $10 * K'$ *(rouge),* K'' *(bleu) et* K''' *(vert).*

3. Identifiabilité

La question de l'identifiabilité est l'objectif poursuivi dans le cas général des paramètres variables pour un intervalle de temps fini. Les procédés utilisés ci-dessus ne s'appliquent plus. Nous suivons la méthodologie développée dans [3] qui s'appuie essentiellement sur un théorème d'unicité de la théorie de semi-groupe établi par A. Pazy [2]. La différence par rapport à [3] est que, dans notre cas, le flux de pollution est à reconstituer à une extrémité de la rivière alors que le point d'observation se trouve à l'autre extrémité. L'approche adoptée consiste à mettre le problème sous forme abstraite. Notons $Y = (b, c)^T$ et $F = (f, g)^T$, le problème inverse peut être écrit comme suit

$$\partial_t Y + AY = F. \tag{7}$$

L'opérateur A est défini par : pour tout $\Upsilon = (\varphi, \psi)^T$,

$$A\Upsilon = \begin{pmatrix} -(D\varphi')' + R\varphi \\ -(D\psi')' + R_*\psi + R\varphi \end{pmatrix}.$$

C'est un opérateur linéaire non borné dans $\boldsymbol{L}^2(I)$. Le domaine $D(A) \subset \boldsymbol{L}^2(I)$ est donné par

$$D(A) = \Big\{ \Upsilon \in \boldsymbol{H}^1(I), \qquad ((D\varphi')', (D\psi')') \in \boldsymbol{L}^2(I) \psi(0) = 0,\ (\psi, D\psi', D\varphi')(L) = (0,0,0) \Big\}.$$

Nous commençons par l'analyse du problème quasi-stationnaire, où les dérivées $(\partial_t b, \partial_t c)$ sont remplacées par $(\lambda b, \lambda c)$,

$$\lambda Y + AY = F. \tag{8}$$

λ un réel positif. Ce problème est lié à la résolvante $R(\lambda) = (\lambda + A)^{-1}$.

3.1. La résolvante

Nous allons étudier l'existence et l'unicité de solution du problème (8). Cela passe par l'écriture d'une formulation variationnelle appropriée. Il convient donc de débuter par la description du cadre fontionnel dans lequel nous travaillons. Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants

$$V = H^1(I), \quad V_* = \Big\{\varphi \in H^1(I) \quad \varphi(0) = 0\Big\},$$
$$Q = \Big\{\psi \in H^1(I) \quad \psi(0) = 0\Big\}, \quad Q_* = H_0^1(I).$$

Nous avons aussi besoin de définir les trois formes bilinéaires

$$a(\chi, \varphi) = \int_I R\chi\varphi \, dx, \qquad \forall (\chi, \varphi) \in V \times V_*,$$
$$m(\psi, \varphi) = \int_I (\lambda + R)\psi\varphi \, dx + \int_I D\psi'\varphi' \, dx, \qquad \forall (\psi, \varphi) \in Q \times V.$$

λ est un nombre réel fixe. La notation m_* est utilisée lorsque R est remplacée par R_* et les espaces Q, V par Q_*, V_*. Ces formes bilinéaires sont continues.
La formulation variationnelle adoptée est de type mixte. Le problème faible s'écrit comme suit : *trouver* $Y = (b, c) \in V \times Q_*$ *qui vérifie*

$$m\,(b, \psi) = (f, \psi)_{L^2} \qquad \forall \psi \in Q, \tag{9}$$
$$m_*(\varphi, c) + a(b, \varphi) = (g, \varphi)_{L^2} \qquad \forall \varphi \in V_*. \tag{10}$$

Pour étudier ce problème de point-selle non-symétrique nous faisons appel à des outils développés dans [4]. Nous devons en premier lieu montrer que les formes bilinéaires $m(\cdot, \cdot)$ et $m_*(\cdot, \cdot)$ vérifient les conditions inf-sup dans $Q \times V$ et dans $Q_* \times V_*$ respectivement.

Proposition. 1 *Les formes bilinéaires $m(\cdot, \cdot)$ et $m_*(\cdot, \cdot)$ satisfassent les des conditions inf-sup sur $V \times Q$ et $V_* \times Q_*$*

$$\inf_{\psi \in Q} \sup_{\varphi \in V} \frac{m(\varphi, \psi)}{\|\varphi\|_{H^1(I)} \|\psi\|_{H^1(I)}} \geq \alpha,$$
$$\inf_{\psi \in Q_*} \sup_{\varphi \in V_*} \frac{m_*(\varphi, \psi)}{\|\varphi\|_{H^1(I)} \|\psi\|_{H^1(I)}} \geq \alpha_*.$$

L'étape suivante consiste à prouver que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ satisfaisse deux conditions inf-sup dans les noyaux de $m(\cdot, \cdot)$ et $m_*(\cdot, \cdot)$. Les noyaux de $m(\cdot, \cdot)$ et $m_*(\cdot, \cdot)$ sont notés respectivement $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_*$. Ils sont définis par

$$\mathcal{N} = \Big\{\varphi \in H^1(I), \quad (\lambda + R)\varphi - (D\varphi')' = 0 \quad \text{sur } I, \quad D\varphi'(L) = 0\Big\},$$
$$\mathcal{N}_* = \Big\{\chi \in H^1(I), \quad (\lambda + R_*)\chi - (D\chi')' = 0 \quad \text{sur } I, \quad \chi(0) = 0\Big\}.$$

$\mathcal{N}$ est de dimension un et $\varphi(0)$ peut être considéré comme le degré de liberté pour tout $\varphi \in \mathcal{N}$. De même, $\chi(L)$ est le degré de liberté pour tout $\chi \in \mathcal{N}_*$. Donc $\chi \in \mathcal{N}_*$ est de dimension un aussi.
Les conditions inf-sup requises sur la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ sont données dans la proposition suivante. La preuve se fait en utilisant quelques lemmes de comparaison et le principe du maximum.

Proposition. 2 *Pour tout $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, il existe $\tau > 0$ telle que*

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{N}} \sup_{\chi\in\mathcal{N}_*} \frac{a(\chi,\varphi)}{\|\varphi\|_{H^1(I)}\|\chi\|_{H^1(I)}} \geq \frac{e^{-\tau\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{N}_*} \sup_{\chi\in\mathcal{N}} \frac{a(\chi,\varphi)}{\|\varphi\|_{H^1(I)}\|\chi\|_{H^1(I)}} \geq \frac{e^{-\tau\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}.$$

La continuité des formes bilinéaires ainsi que les conditions inf-sup des propositions 1 et 2 permettent de conclure à l'existence et l'unicité de solution du problème de point-selle (9)-(10).

Proposition. 3 *Soit $(f,g) \in \boldsymbol{L}^2(I)$. Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'équation* (9)-(10) *admet une solution unique et*

$$\|b\|_{H^1(I)} + \|c\|_{H^1(I)} \leq \sqrt{\lambda}e^{\tau\sqrt{\lambda}}(\|f\|_{L^2(I)} + \|g\|_{L^2(I)}).$$

Ce résultat permet d'établir la continuité de la résolvante et d'obtenir son module de continuité en fonction de λ.

Proposition. 4 *La résolvante $\mathcal{R}(\lambda)$ est donc un opérateur borné dans $\boldsymbol{L}^2(I)$ et nous avons pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,*

$$\|R(\lambda)\|_{\boldsymbol{L}^2(I)\to\boldsymbol{L}^2(I)} \leq \sqrt{\lambda}e^{\tau\sqrt{\lambda}}.$$

3.2. Unicité

Toutes les conditions sont assemblés pour pouvoir utiliser un résultat de Pazy. D'après le théorème 1.2 de [2, Chapitre 4] , si $R(\lambda)$ existe pour un réel assez grand $\lambda(\geq 0)$ et si

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\log\|R(\lambda)\|_{(\boldsymbol{L}^2(I)\to\boldsymbol{L}^2(I))} = 0.$$

alors le problème initial (7) admet au plus une solution. Grâce à Proposition 4, la résolvante est majorée comme suit

$$\frac{1}{\lambda}\log\|\mathcal{R}(\lambda)\|_{(\boldsymbol{L}^2(I)\to\boldsymbol{L}^2(I))} \leq \frac{\log\sqrt{\lambda}}{\lambda} + \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}}.$$

L'hypothèse de Pazy est satisfaite, ce qui donne l'unicité.

Théorème. 1 *Le problème* (7) *admet au plus une solution Y dans l'espace $\mathscr{C}([0,T];\boldsymbol{L}^2(I))\cap \mathscr{C}(]0,T];\boldsymbol{H}^1(I))$.*

En utilisant les résultats d'identifiabilité de sources ponctuelles prouvés dans l'article [1]. Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat d'identifiabilité final.

Théorème. 2 *Supposons que* $B[F_1, G_1] = B[F_2, G_2]$*, alors*

$$(r_1(t), f_1(t)) = (r_2(t), f_2(t)), \qquad \textit{sur } (0, T),$$
$$(s_1(t), g_1(t)) = (s_2(t), g_2(t)), \qquad \textit{sur } (0, T).$$

4. Conclusion

L'identifiabilité de sources de pollution à l'aide d'observations indirectes est une question délicate. Elle requiert la reconstitution de la densité de la DBO à partir de mesures réalisées sur l'OD. Ceci passe par la résolution d'un problème de complétion de données. La particularité de ce problème inverse réside dans le fait que des données sont manquantes à une extrémité et les observations pour leur reconstitution sont réalisées sur l'autre extrémité. Le problème inverse correspondant s'avère être sévèrement mal-posé et son étude théorique est compliquée. L'unicité est basée sur le théorème de A. Pazy. Ce résultat sert ensuite à démontrer l'identifiabilité de sources ponctuelles dans le système de pollution organique de Streeter et Phelps dispersif.

5. Bibliographie

[1] ANDRLE, M. AND BEN BELGACEM, F. AND EL BADIA, A., « Identification of Moving Pointwise Sources in an Advection-Dispersion-Reaction Equation », *Inverse Problems*, vol. A, n° 27, 2011.

[2] PAZY, A., « Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations », *Springer-Verlag*, n° 100-101, 1983.

[3] BEN BELGACEM, F., « Uniqueness for an ill-posed reaction-dispersion model. Application to organic pollution in stream-waters », *Inverse Problems and Imaging*, n° 163-181, 2012.

[4] BERNARDI, C. AND CANUTO, C. AND MADAY, I, « Generalized inf-sup condition for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem », *SIAM J. Numer. Anal.*, n° 1237-1271, 1980.

[5] WAHBA, G., « Ill posed problems : Numerical and statistical methods for mildly, moderately and severely ill posed problems with noisy data. », *University of Wisconsin, Madison. Unpublished proceedings of the DelawareConference on Ill Posed Inverse Problems, TR 595*, n° 1237-1271, 1988.

Rubrique

New approach for solving electrocardiography imaging inverse problem with missing data on the body surface

Mohammed Addouche[1] — Nadra Bouarroudj[2] — Jacques Henry [3,4] [1] — Fadhel Jday [5] — Nejib Zemzemi[3,4]

[1] University Boubaker Belkadhi, Tlemcen, Algeria
[2] Department of Mathematics and informatics, ENP Oran Algeria
[3] INRIA Bordeaux Sud-Ouest, Carmen project 200 rue de la vieille tour 33405 Talence Cedex, France
[4] IHU Liryc, Electrophysiology and heart modeling institute. Avenue du Haut-Lévêque, 33604 Pessac, France
[5] University Oum Alqura,Saoudi Arabia
(*) nejib.zemzemi@inria.fr

RÉSUMÉ. *A définir par la commande* `\resume{...}`

ABSTRACT. In this work we provide a new mathematical formulation for the inverse problem in electrocardiography imaging. The novelty of this approach is that we take into account the missing measurements on the body surface. The electrocardiography imaging is formulated as a data completion problem for the Laplace equation. The Neumann boundary condition is given at the whole body surface. The difficulty comes from the fact that the Dirichlet boundary condition is only given on a part of the body surface. In order to construct the electrical potential on the heart surface, we use an optimal control approach where the unknown potential at the external boundary is also part of the control variables. We use the method of factorization of elliptic boundary value problems combined with the finite difference method. We illustrate the theoretical results by some numerical simulations in a cylindrical domain. We numerically study the effect of the size of the missing data zone on the accuracy of the inverse solution.

MOTS-CLÉS : *A définir par la commande* `\motscles{...}`

KEYWORDS : electrocardiography imaging, inverse problem, missing data, Factorization method, incomplete data, optimal control.

1. Introduction

Electrocardiographic imaging (ECGI) is a new technology that allows to non-invasively reconstruct the electectrical activity of the heart from measurements on the body surface and geometrical informations of the torso. This clinical tool is used by cardiologists in order to localize some arrhythmogenic substrates, of particular concern are atrial and ventricular fibrillations. The current clinical tool consists of a vest containing 252 electrodes that are used to measure the electrical potential at the body surface and a software used to calculate the electrical potential on the heart surface. These electrodes are distributed on the body surface. The mathematical method used behind the tool the is Method of Fundamental Solutions (MFS) [11]. However, the 252 electrodes are not equally distributed on the torso surface and some regions are more covered than others. Moreover, in the clinical practice some electrodes are not considered in the inverse problem : Sometimes because they are not in contact with the patient skin and sometimes because of the high noise registered on some electrodes. This means that there are some regions where we know the potential and others where we don't have any information about the electrical potential. But in both cases, we know that the we have a zero flux boundary conditions in the whole body surface. In different studies [10, 7, 8], authors reconstruct these missing BSPs by interpolating them from the well measured signals.

In all works cited above and in most of the works that have been used in the literature for solving the ECGI inverse problem, the mathematical problem was formulated using a transfer matrix approach. This approach has been first introduced in [4]. The transfer matrix was later computed using different approaches like boundary elements, finite elements or MFS. Recent works [9, 12, 6] presented novel approches based on the recent advances on the boundary values inverse problem techniques. These works use an energy based cost function. The theoretical study of these methods has been reported in [2, 3, 1]. In this work we use the method of boundary value factorization introduced for solving data completion in [1]. It has been used for solving the ECGI problem in [6]. Our goal in this work is to introduce a new mathematical formulation that takes into account the missing data on the body surface without using interpolation methods. The missing BSPs would be part of the control problem.

2. Methods

2.1. Continuous Problem and Factorization Method

For the sake of simplicity and clarity, the problem is formulated on a cylindrical domain in all the paper. The cylindrical geometry and the Laplace operator make the presentation of the factorization method easy, but the method can be generalized to regular non-cylindrical domains and to more general self adjoint second-order elliptic operators. The generalization for a three dimensional domains could be done following. Let's consider the cylindrical domain Ω in $\mathbb{R}^n$. The domain $\Omega =]0, a[\times \theta$, where θ is a bounded domain in $\mathbb{R}^{n-1}$. The length of the cylinder a is a strictly positive real number. We denote by $\partial\Omega$ the boundary of the cylinder : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_a \cup \Sigma$, where $\Sigma =]0, a[\times \partial\theta$ is the lateral boundary of Ω, $\Gamma_0 = \Gamma_0^m \cup \Gamma_0^I = \{0\} \times \theta$ and $\Gamma_a = \{a\} \times \theta$ be the faces. The face θ, could be partitioned as follows $\theta = \theta^m \cup \theta^I$, so that $\{0\} \times \theta^m = \Gamma_0^m$ and $\{0\} \times \theta^I = \Gamma_0^I$. We suppose that Γ_0 is an accessible boundary, which means that we can measure the electrical potential on it. On the other hand Γ_a is inaccessible boun-

dary, which means that we canot make any measurements on it. For the reasons that we cited previously, the boundary Γ_0^m is the part of Γ_0 where we have measurements of the potentials and in Γ_0^I we don't have electrical potential measurements.

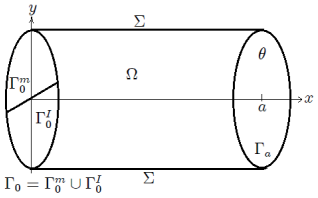


Figure 1 – Schematic representation of the cylindrical domain used in the study.

We also denote by $x \in \mathbb{R}$ the coordinate along the axis of the cylinder and by $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ the coordinates in the section, perpendicular to the axis. The schematic representation of the domain Ω and all its boundaries is represented in Figure 1.

2.2. Optimal control problem

In this paper, we consider the following Continuous problem :

$$(p_0)\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ \bigtriangledown u.n = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\ u = T & \text{on} \quad \Gamma_0^m. \end{cases} .$$

The boundary Γ_0^m is the measured portion of the surface of Γ_0 i.e the part of Γ_0 where we have both Dirichlet ($u = T$) and Neumann ($\bigtriangledown u.n = 0$) boundary conditions. The boundary Γ_0^I is the unmeasured part of the surface Γ_0 i.e. it is the part of Γ_0 where we only know that we have a Neumann boundary condition ($\bigtriangledown u.n = 0$). The data completion problem (p_0) is converted to an optimal control problem following the approach used in [2, 1, 6]. The difference is that now it includes three states instead of two. Each of them represents a boundary conditions on the accessible but incomplete boundary Γ_0^I and the inaccessible boundary Γ_a. For every triplet $\left(\eta, \tau, \tau^{'}\right) \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)^{'} \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_0^I\right)$, we define the triplet of states (u_1, u_2, u_3) as follows

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ u_1 = T & \text{on} \quad \Gamma_0^m, \\ u_1 = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0^I, \\ \bigtriangledown u_1.n = \eta & \text{on} \quad \Gamma_a. \end{cases} , \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ \bigtriangledown u_2.n = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\ u_2 = \tau & \text{on} \quad \Gamma_a. \end{cases} , \quad \begin{cases} -\Delta u_3 = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_3 = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ u_3 = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0^m, \\ u_3 = \tau^{'} & \text{on} \quad \Gamma_0^I, \\ \bigtriangledown u_3.n = 0 & \text{on} \quad \Gamma_a. \end{cases}$$

where η, τ and $\tau^{'}$ are the controls variables. For a given $\epsilon > 0$, we define the following cost functionals depending on the controls variables : The first uses the L^2 norm in the regularization operator

$$J_\epsilon^1(\eta, \tau, \tau^{'}) = \int_\Omega \left|(\bigtriangledown u_1 + \bigtriangledown u_3) - \bigtriangledown u_2\right|^2 dxdy + \epsilon \left(\|\eta\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + \|\tau\|_{L^2(\Gamma_a)}^2 + \left\|\tau^{'}\right\|_{L^2\left(\Gamma_0^I\right)}^2 \right) , \tag{1}$$

and in the second cost functional, we use the norm in the space where each variable lives.

$$J_\epsilon^2(\eta,\tau,\tau^{'}) = \int\limits_\Omega \left|(\bigtriangledown u_1 + \bigtriangledown u_3) - \bigtriangledown u_2\right|^2 dxdy + \epsilon \left(\|\eta\|^2_{\left(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_a)\right)'} + \|\tau\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_a)} + \left\|\tau^{'}\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_0^I\right)} \right) . \tag{2}$$

We make use of the factorization method which transforms the elliptic boundary value problem into parabolic ones. This approach allows to compute the Dirichlet-to-Neuman and Neumann-to-Dirichlet mappings on a sequence of surfaces flowing from the known to the unknown boundaries. It allows a direct evaluation of the missing boundary data for any new Cauchy data T without re-computation of the operators [1, 6]. In what follows we will study the effect of the size of the area that lacks data by comparing the computed solution to a known analytical solution. We consider the problem (p_0) for $(x,y) \in]0,a[\times]0,\pi[$. The Cauchy data is given by $u(x,y)_{|\Gamma_0^m} = u(0,y)_{|\Gamma_0^m} = T = \sin(y)$, and $\nabla u(x,y)_{|\Gamma_0} \cdot n = \nabla u(0,y)_{|\Gamma_0} \cdot n = 0$. One can then check that : the harmonic function $u(x,y) = \cosh(x)\sin(y)$ is the solution of the problem. We seek to rebuild the data on the surface Γ_a and Γ_0^I. Data to be completed on Γ_a are : $\varphi_{\text{theo}} = \nabla u(a,y) \cdot n = \cosh(a)\sin(y) - \sinh(a)\cos(y)$, $t_{\text{theo}} = u(a,y) = \cosh(a)\sin(y)$. The exact incomplete data on Γ_0^I is $t^{'}_{\text{theo}} = u(0,y) = \sin(y)$. We make use the methods developed in [1, 6] in order to solve the optimal control problem by minimizing J_ϵ^1 and J_ϵ^2.

3. Results

In this section we present result of a numerical experiment to illustrate the effect of the size of the boundary where we measure the electrical potential $\%\Gamma_0^m$. We compare the exacts solution t_{theo} and $t^{'}_{\text{theo}}$ with the numerical solution t_{num} and $t^{'}_{\text{num}}$. Let err_{regu1} and err_{regu2} be respectively the relative errors with respect to the first and the second regularizations. The error is computed at both the incomplete domains Γ_0^I and Γ_a. For this computation we took $\epsilon = 10^{-8}$ and $a = 2\pi$. Table 1 : Comparison of Integral regularization and norm regularization for the data completion problem with incomplete data In Table 1, we provide err_{regu1} (respectively, err_{regu2}) the error between the exact solution and the solution obtained using the cost function J_ϵ^1 (respectively, J_ϵ^2), for various size of Γ_0^m. Without noise, we see that when the size of the measuring domain Γ_0^m is larger than 40% of the full accessible domain Γ_0, the relative error is less than 1%. Whereas, when Γ_0^m is less than 10% of Γ_0 the relative error is higher than 10%. Figure2 shows the reconstructed potential at Γ_a when Γ_0^m covers 70% (left) and 12% (right)

$\%\Gamma_0^m$	90%	60%	40%	20%	10%	5%
err_{regu1}	$5,58.10^{-3}$	$6,76.10^{-3}$	$1,19.10^{-2}$	$3,79.10^{-2}$	$1,25.10^{-1}$	$2,7.10^{-1}$
err_{regu2}	$5,58.10^{-3}$	$6,84.10^{-3}$	$1,23.10^{-2}$	$3,83.10^{-2}$	$1,25.10^{-1}$	$2,7.10^{-1}$

Tableau 1 – Relative error between the exact solution and the solution obtained using the cost function J_ϵ^1 and J_ϵ^2, for various size of Γ_0^m without noise.

Here, we also study the stability of the data completion problem to noise on the Dirichlet data. Let err^δ_{regu1} and err^δ_{regu2} the relative error when $\delta = 30\%$ is the added noise. The level of the noise is 30%. We see that the relative error of the solution si less than 5% when the size of Γ_0^m covers more than 80% of Γ_0. The error is higher than 10% when the size of Γ_0^m covers less than 60% of Γ_0. The error becomes too high when Γ_0^m covers less

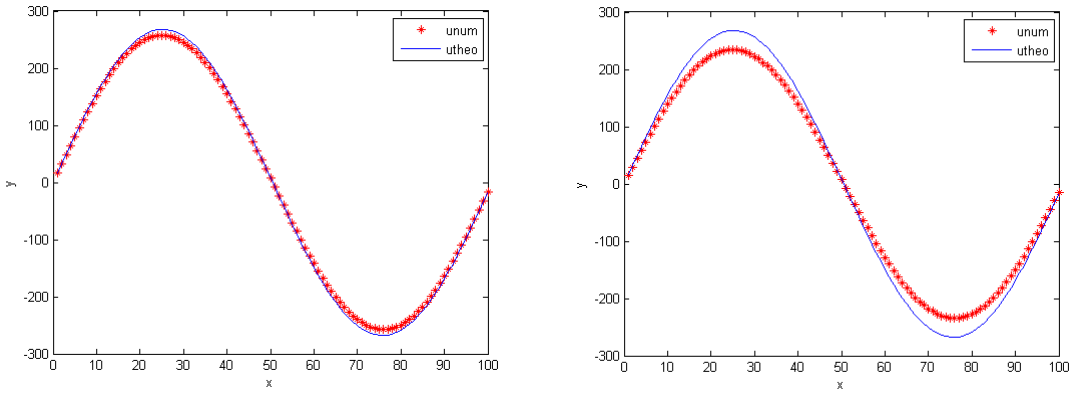


Figure 2 – Comparison between the exact (blue continuous ligne) and the computed (red stars) solutions. The area of Γ_0^m covers 20% (left) and 10% (right) of the boundary Γ_0. than 20 of the accessible boundary as shown in Table 2. Figure3 shows the reconstructed potential at Γ_a when Γ_0^m covers 20% (left) and 10% (right)

$\%\Gamma_0^m$	90%	80%	70%	60%	20 %	15 %	12 %
err^{δ}_{regu1}	$2,16.10^{-2}$	$4,67.10^{-2}$	$6,87.10^{-2}$	$1,01.10^{-1}$	3,23.10-1	5,22.10-1	1.27
err^{δ}_{regu2}	$2,22.10^{-2}$	$4,88.10^{-2}$	$7,22.10^{-2}$	$1,08.10^{-1}$	3,26.10-1	5,24.10-1	1.28

Tableau 2 – Relative error between the exact solution and the solution obtained using the cost function J_ϵ^1 (err^{δ}_{regu1}) and J_ϵ^2 (err^{δ}_{regu2}), for various size of Γ_0^m with 30 of noise on the measured data.

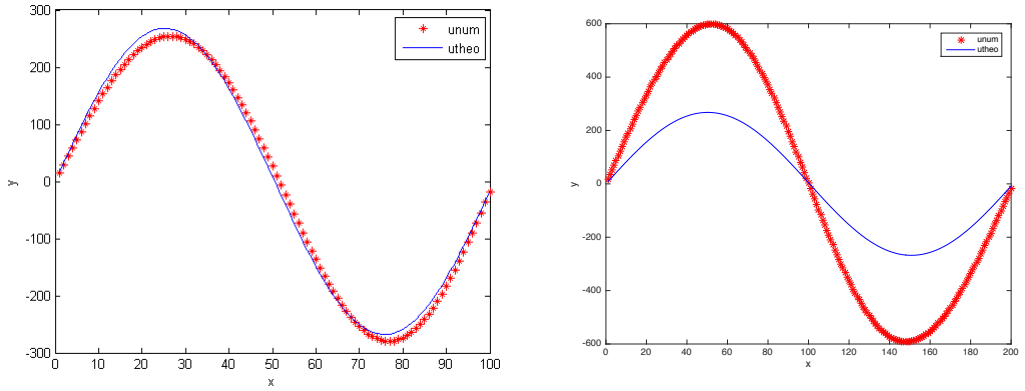


Figure 3 – Comparison between the exact (blue continuous ligne) and the computed (red stars) solutions when adding 30% of noise. The area of Γ_0^m covers 70% (left) and 12% (right) of the boundary Γ_0.

4. Conclusion

In this paper, we presented a method to solve a data completion problem where the Cauchy data is measured on part of the accessible boundary. We used a method based on the factorization of elliptic boundary value problems. We numerically tested this method on a 2D rectangular domain. Without noise, results show that when the size of the measuring domain Γ_0^m is larger than 40% of the full accessible domain, the relative error is less than 1%. When Γ_0^m is less than 10% of Γ_0 the relative error is higher than 10%. Whereas, when the level of the noise is 30%, we found that the relative error of the solution is less than 5% when the size of Γ_0^m covers more than 80% of Γ_0. The error is higher than 10% when the size of Γ_0^m covers less than 60% of Γ_0. In future work, we aim to extend this study in 3D domain and theoretically study the effect of the size of the measuring domain.

Références

[1] Amel Ben Abda, Jacques Henry, and Fadhel Jday. Boundary data completion : the method of boundary value problem factorization. *Inverse Problems*, 27(5) :055014, 2011.

[2] Stephane Andrieux, Amel Ben Abda, and Thouraya Nouri Baranger. Data completion via an energy error functional. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(2) :171–177, 2005.

[3] Mejdi Azaïez, Faker Ben Belgacem, and Henda El Fekih. On cauchy's problem : Ii. completion, regularization and approximation. *Inverse problems*, 22(4) :1307, 2006.

[4] Roger C Barr, Maynard Ramsey III, and Madison S Spach. Relating epicardial to body surface potential distributions by means of transfer coefficients based on geometry measurements. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, pages 1–11, 1977.

[5] Laura Bear, Mark Potse, Josselin Duchateau, Nejib Zemzemi, Yves Coudière, and Rémi Dubois. Accuracy of lead removal vs linear interpolation in non-invasive electrocardiographic imaging (ecgi). In *Computing in Cardiology Conference (CinC), 2015*. IEEE, 2014.

[6] Julien Bouyssier, Nejib Zemzemi, and Jacques Henry. Inverse problem in electrocardiography via factorization method of boundary problems : how reconstruct epicardial potential maps from measurements of the torso ? In *International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI), 2015*. IEEE, 2015.

[7] John E Burnes, David C Kaelber, Bruno Taccardi, Robert L Lux, Philip R Ershler, and Yoram Rudy. A field-compatible method for interpolating biopotentials. *Annals of biomedical engineering*, 26(1) :37–47, 1998.

[8] Alireza Ghodrati, Dana H Brooks, and Robert S MacLeod. Methods of solving reduced lead systems for inverse electrocardiography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 54(2) :339–343, 2007.

[9] Nejla Hariga-Tlatli, TN Baranger, and Jocelyne Erhel. Misfit functional for recovering data in 2d electrocardiography problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(5) :492–500, 2010.

[10] Thom F Oostendorp, Adriaan van Oosterom, and Geertjan Huiskamp. Interpolation on a triangulated 3d surface. *Journal of Computational Physics*, 80(2) :331–343, 1989.

[11] Yong Wang and Yoram Rudy. Application of the method of fundamental solutions to potential-based inverse electrocardiography. *Annals of biomedical engineering*, 34(8) :1272–1288, 2006.

[12] Nejib Zemzemi. A steklov-poincaré variational formulation of the inverse problem in cardiac electrophysiology. In *CinC-Computing in Cardiology Conference*, page 193. IEEE, 2013.

On GoF tests for perturbed dynamical systems based on a MDE

BEN ABDEDDAIEM Maroua

Laboratoire Manceau de Mathématiques
Université du Maine
Le Mans
France
Marwa.Ben_Abdeddaiem.Etu@univ-lemans.fr

RÉSUMÉ. On considère le problème de construction de test d'ajustement dans le cas des observations en temps continu pour un processus de diffusion avec "petit bruit". L'hypothèse nulle est paramétrique et on utilise l'estimateur de distance minimale pour le paramètre inconnu. On propose un test "asymptotically distribution free" pour le modèle étudié.

ABSTRACT. We consider the problem of the construction of the Goodness-of-Fit test in the case of continuous time observations of a diffusion process with small noise. The null hypothesis is parametric and we use a minimum distance estimator of the unknown parameter. We propose an asymptotically distribution free test for this model.

MOTS-CLÉS : Test d'ajustement, estimateur de distance minimale, test "asymptotically distribution free", processus de diffusion avec "petit bruit".

KEYWORDS : Goodness-of-fit test, minimum distance estimator, asymptotically distribution free test, diffusion process with small noise.

1. Introduction

We consider the problem of the construction of the asymptotically distribution free (ADF) test in the case of continuous time observations of a diffusion process with small noise. We suppose that under the null hypothesis the trend coefficient depends on some unknown one-dimensional parameter. Therefore the basic (null) hypothesis is parametric.

The goodness-of-fit (GoF) test plays an important role in mathematical statistics because its application allows to check if the observations correspond well to the proposed mathematical model. Remind that in the case of i.i.d. observations the problem of the construction of GoF tests attracts attention of the statisticians since 1928 due to the works by Cramér (1928), von Mises (1931), Kolmogorov (1933) and Smirnov (1937) (see, e.g., [2]).

Let us recall the well-known basic results for the i.i.d. model. Suppose that the null hypothesis is simple. Denoting the continuous distribution function under the null hypothesis by $F_0(x)$, we have to check if the i.i.d. observations $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ have this continuous distribution function. Many GoF tests are based on the following property : the normalized empirical distribution function

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right), \qquad \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_j < x\}}$$

converges in distribution, under the null hypothesis, to the Brownian bridge $B(F_0(x))$. In particular, for the Cramér-von Mises statistic we have (with the change of variable $s = F_0(x)$)

$$\Delta_n = n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right)^2 \mathrm{d}F_0(x)$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} B(F_0(x))^2 \,\mathrm{d}F_0(x) = \int_0^1 B(s)^2 \,\mathrm{d}s \equiv \Delta.$$

Therefore the limit Δ does not depend on $F_0(\cdot)$ (distribution free) and the Cramér-von Mises test

$$\psi_n = \mathbb{1}_{\{\Delta_n > c_\alpha\}}, \qquad \mathbf{P}\{\Delta > c_\alpha\} = \alpha$$

has the asymptotic $(n \to \infty)$ size $\alpha \in (0,1)$ (see, e.g., [12]).

In the case of parametric null hypothesis

$$\mathcal{H}_0 \quad : \qquad F(x) = F_0(\vartheta, x), \qquad \vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R},$$

where ϑ is some unknown one-dimensional parameter, the similar limit

$$U_n(x) = \sqrt{n}\left(\hat{F}_n(x) - F_0(\hat{\vartheta}_n, x)\right) \Longrightarrow B(F_0(\vartheta, x)) - \zeta \dot{F}_0(\vartheta, x) \equiv U(x)$$

is no more distribution free and the choice of the threshold c_α is much more complicated. Here $\hat{\vartheta}_n$ is the maximum likelihood estimator (MLE), $\dot{F}_0(\vartheta, \cdot)$ is the derivative of $F_0(\vartheta, \cdot)$ w.r.t. ϑ and ζ is a Gaussian variable. By the change of variables $t = F_0(\vartheta, x)$ and $s = F_0(\vartheta, y)$, we have for $U(x)$ the representation (see Darling [2])

$$u(t) = B(t) - \int_0^1 h(\vartheta, s)\,\mathrm{d}B(s) \int_0^t h(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

where

$$h(\vartheta, s) = \frac{\dot{l}\left(\vartheta, F_{\vartheta}^{-1}(s)\right)}{\sqrt{I(\vartheta)}}, \qquad \int_0^1 h(\vartheta, s)^2 \, \mathrm{d}s = 1.$$

Here $l(\vartheta, x) = \ln f(\vartheta, x)$, $\dot{l}(\vartheta, x)$ is the derivative of $l(\vartheta, x)$ w.r.t. ϑ, $f(\vartheta, x)$ is the density function, $I(\vartheta)$ is the Fisher information and $y = F_{\vartheta}^{-1}(s)$ is the inverse function to $F_0(\vartheta, y)$, i.e., $F_0(\vartheta, y) = s$. Note that the function $h(\cdot, \cdot)$ appears in (1) twice because we used the MLE.

For the minimum distance estimator (MDE) using the same arguments as in the case of the MLE we obtain the limit

$$u(t) = B(t) - \int_0^1 g(\vartheta, s) \; \mathrm{d}B(s) \int_0^t h(\vartheta, s) \; \mathrm{d}s, \qquad \int_0^1 g(\vartheta, s)^2 \, \mathrm{d}s = 1 \tag{2}$$

with two different functions. In both cases, the corresponding tests are no more asymptotically distribution free and the choice of the threshold c_α from the equation

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 u(s)^2 \, \mathrm{d}s > c_\alpha\right\} = \alpha$$

can be a difficult problem because it depends strongly on ϑ (unknown) and $F_0(\cdot, \cdot)$ (known), i.e., $c_\alpha = c_\alpha(\vartheta, F_0)$.

There are several possibilities to solve this problem in the case of the limit (1). One of them is to find a linear transformation $L[\cdot]$ of the random function $u(\cdot)$, such that $L[u](t) = W(t)$, where $W(t), 0 \le t \le 1$ is some Wiener process. Then, we have

$$\hat{\Delta}_n = \int_{-\infty}^{\infty} L[U_n](x)^2 \, \mathrm{d}F_0(\hat{\vartheta}_n, x) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W(F_0(\vartheta, x))^2 \, \mathrm{d}F_0(\vartheta, x)$$
$$= \int_0^1 W(t)^2 \, \mathrm{d}t \equiv \hat{\Delta}$$

and we obtain once more the distribution free limit $\hat{\Delta}$. Therefore the test

$$\hat{\psi}_n = \mathbb{1}_{\left\{\hat{\Delta}_n > d_\alpha\right\}}, \qquad \mathbf{P}\left\{\hat{\Delta} > d_\alpha\right\} = \alpha$$

is ADF. Such transformation was proposed by Khmaladze [5]. We have to emphasize that in [5] and in many other works (see, e.g., the paper Maglapheridze et al. [13]) the estimator used was always the MLE and this is important for the construction of this linear transformation and the ADF tests. Many authors wrote that similar transformation can be obtained in the case of other estimators with limit (2), but as we know this work (construction of the linear transformation with other estimators) was not done.

The problem of GoF testing for the model of continuous time observations of "small noise" diffusion process, with a simple null hypothesis $\Theta = \{\vartheta_0\}$, was studied in [3] and [8]. Suppose that the observed diffusion process under hypothesis is

$$\mathrm{d}X_t = S_0(X_t) \, \mathrm{d}t + \varepsilon \sigma(X_t) \; \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x_0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

with deterministic initial value x_0, known diffusion coefficient $\varepsilon^2 \sigma(\cdot)^2 > 0$, some known smooth function $S_0(\cdot)$ and $W_t, 0 \le t \le 1$ is a Wiener process. Note that if the functions $S_0(x)$ and $\sigma(x)$ are Lipschitz w.r.t. x, then we have with probability 1

$$\sup_{0 \le t \le T} |X_t - x_t| \le C\varepsilon \sup_{0 \le t \le T} |W_t|,$$

where C is some constant. Therefore the process X_t converges to $x_t = x_t(\vartheta_0)$ (solution of the equation (3) as $\varepsilon = 0$) uniformly w.r.t. $t \in [0, T]$ with probability 1. We have as well

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathbf{E} \left| X_t - x_t \right|^2 \le C\varepsilon^2.$$

For the proof see [9], Lemma 1.13.

The GoF test was constructed on the basis of the normalized difference $\varepsilon^{-1} \left(X_t - x_t \right)$ and the limit of this statistic is a Gaussian process. This process can be transformed into a Wiener process $w(s), 0 \le s \le 1$ as follows.

Introduce the statistic

$$\delta_\varepsilon = \left[\int_0^T \left(\frac{\sigma \left(x_t \right)}{S_0(x_t)} \right)^2 \mathrm{d}t \right]^{-2} \int_0^T \left(\frac{X_t - x_t}{\varepsilon S_0(x_t)^2} \right)^2 \sigma \left(x_t \right)^2 \mathrm{d}t.$$

The following convergence

$$\delta_\varepsilon \Longrightarrow \delta \equiv \int_0^1 w(s)^2 \, \mathrm{d}s$$

was proved and therefore the test $\phi_\varepsilon = \mathbb{1}_{\{\delta_\varepsilon > c_\varepsilon\}}$ with $\mathbf{P} \left(\delta > c_\varepsilon \right) = \varepsilon$ is ADF.

The case of parametric basic hypothesis and ADF tests for “small noise" diffusion processes was studied, for example, in [4], [10]−[11] and the estimator used, for the construction of the linear transformation and tests, was always the MLE (see Kutoyants [7]). There are several ADF GoF tests for the ergodic diffusion processes proposed, for example, in the works [14]−[15] and [6].

Note that in some problems it is not possible to have an explicit expression for the MLE and therefore sometimes it is better to use other estimators, which can be easily calculated. For example, this can be the minimum distance estimator, a method of moments estimator or a trajectory fitting estimator and so on. In all such cases, the limit expression for the underlying statistics will be like (2) but with two different functions $h \left(\cdot, \cdot \right)$ and $g \left(\cdot, \cdot \right)$.

Now, if we use the relation $B(t) = W(t) - W(1)t$, where $W(t)$ is a Wiener process, then we obtain

$$U \left(t \right) = W(t) - \sum_{l=1}^{3} \int_0^1 g_l \left(\vartheta, s \right) \, \mathrm{d}W(s) \int_0^t h_l \left(\vartheta, s \right) \, \mathrm{d}s,$$

where $h_1 \left(\vartheta, s \right) = g_1 \left(\vartheta, s \right) = 1$, $h_2 \left(\vartheta, s \right) = h_3 \left(\vartheta, s \right) = h \left(\vartheta, s \right)$, $g_2 \left(\vartheta, s \right) = g \left(\vartheta, s \right)$ and $g_3 \left(\vartheta, s \right) = - \int_0^1 g \left(\vartheta, s \right) \mathrm{d}s$. This will increase the dimension of the functions

$$g \left(\vartheta, s \right) = \left(g_1 \left(\vartheta, s \right), g_2 \left(\vartheta, s \right), g_3 \left(\vartheta, s \right) \right)$$

and

$$h \left(\vartheta, s \right) = \left(h_1 \left(\vartheta, s \right), h_2 \left(\vartheta, s \right), h_3 \left(\vartheta, s \right) \right).$$

Even if the estimated parameter is one-dimensional, the form of the linear transformation $L \left[\cdot \right]$ will become much more complicated. This is probably the reason why this problem was not considered till now. Our results thus should be understood as a constructive existence result for ADF tests based on the MDE.

Our goal is to construct a special linear transformation $L[\cdot]$, in the case of the stochastic processes, which transforms the limit process

$$U(t) = W(t) - \int_0^1 g(\vartheta, s)\,\mathrm{d}W(s) \int_0^t h(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s, \quad \int_0^1 g(\vartheta, s)^2\,\mathrm{d}s = 1 \qquad (4)$$

into Wiener process w_t such that $L[U](t) = w_t$. Note that this representation can be obtained for a large class of estimators in the case of the stochastic processes models. The linear transformation is based on the solution of Fredholm equation of the second kind with degenerated kernel. In our problem, the main difference with the i.i.d. case (see (2)) is due to the Wiener process. Therefore, it is possible to construct a linear transformation which transforms the process (4) into Wiener process. Indeed, this property allows us to construct ADF GoF tests for several stochastic processes models. Hence, we propose ADF GoF test based on this linear transformation in the case of diffusion process with "small noise" for the parametric null hypotheses.

2. Main results

We consider the problem of the construction of the GoF test in the case of continuous time observations of a diffusion process X^ε with small noise satisfying the stochastic differential equation

$$\mathrm{d}X_t = S(X_t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon\,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x_0, \quad 0 \le t \le T,$$

where $W_t,\ 0 \le t \le T$ is a Wiener process and $S(x)$ is some unknown smooth function. Based on a MDE, we construct an ADF test in the case of the parametric null hypothesis

$$\mathcal{H}_0: \quad S(x) = S(\vartheta, x), \qquad \vartheta \in \Theta = (a, b).$$

First, we show that the basic statistic

$$u_\varepsilon(t) = \frac{X_t - x_t(\vartheta_\varepsilon^*)}{\varepsilon\, S(\vartheta_\varepsilon^*, X_t)}, \qquad 0 \le t \le T$$

(ϑ_ε^* is the MDE) converges to some random process $u(t), 0 \le t \le T$. Then the process $u(\cdot)$ is transformed in $U(\cdot)$ which has the representation

$$U(\nu) = W(\nu) - \int_0^1 g(\vartheta, r)\,\mathrm{d}W(r) \int_0^\nu h(\vartheta, r)\,\mathrm{d}r, \quad \int_0^1 g(\vartheta, r)^2\,\mathrm{d}r = 1.$$

Further, we construct a special linear transformation $L[U](\nu) = w_\nu, 0 \le \nu \le 1$, (see [1]) where $w_\nu, 0 \le \nu \le 1$ is a Wiener process. Specifically, we have to solve Fredholm equation of the second kind with degenerated kernel (our proof follows the main steps of the work [6]). The solution of it gives us the desired linear transformation. This allows us to propose an ADF test $\psi_\varepsilon = \mathbb{1}_{\{\Delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$ of asymptotic ($\varepsilon \to 0$) size $\alpha \in (0, 1)$ such that

$$\Delta_\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T L[U_\varepsilon](t)^2\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int_0^1 w_\nu^2\,\mathrm{d}\nu$$

and

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 w_\nu^2\,\mathrm{d}\nu > c_\alpha\right\} = \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Here the process $U_\varepsilon(\cdot)$ is the "empirical version" of $U(\cdot)$. We shall mention that if in our problem we use the MLE of the unknown parameter, then the limit representation is

$$U(\nu) = W(\nu) - \int_0^1 h(\vartheta, s)\,\mathrm{d}W(s) \int_0^\nu h(\vartheta, s)\,\mathrm{d}s, \qquad \int_0^1 h(\vartheta, s)^2\,\mathrm{d}s = 1$$

and our transformation coincides with the known one proposed by Khmaladze [5].

3. Bibliographie

[1] M. BEN ABDEDDAIEM, « On goodness-of-fit tests for parametric hypotheses in perturbed dynamical systems using a minimum distance estimator », *Stat. Inference Stoch. Process.*, vol. 19, n° 3, 2016.

[2] D. A. DARLING, « The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises tests », *Ann. Math. Stat.*, vol. 28, n° 4, 1957.

[3] S. DACHIAN, YU. A. KUTOYANTS, « On the goodness-of-fit tests for some continuous time processes », *Statistical Models and Methods for Biomedical and Technical Systems* (F. Vonta, M. Nikulin, N. Limnios and C. Huber-Carol, eds.). Birkhäuser, Boston, 2008.

[4] S. IACUS, YU. A. KUTOYANTS, « Semiparametric hypotheses testing for dynamical systems with small noise », *Math. Methods Statist.*, vol. 10, n° 1, 2001.

[5] E. KHMALADZE, « Martingale approach in the theory of goodness-of-fit tests », *Theory Probab. Appl.*, vol. 26, 1981.

[6] M. KLEPTSYNA, YU. A. KUTOYANTS, « On asymptotically distribution free tests with parametric hypothesis for ergodic diffusion processes », *Stat. Inference Stoch. Process.*, vol. 17, n° 3, 2014.

[7] YU. A. KUTOYANTS, « Estimation of a parameter of a diffusion process », *Theory Probab. Appl.*, vol. 23, n° 3, 1978.

[8] YU. A. KUTOYANTS, « On goodness-of-fit tests for perturbed dynamical systems », *J. Statist. Plann. Inference.*, vol. 141, n° 5, 2011.

[9] YU. A. KUTOYANTS, « *Identification of Dynamical Systems with Small Noise* », Kluwer, Dordrecht, 1994.

[10] YU. A. KUTOYANTS, « On ADF goodness-of-fit tests for stochastic processes », *New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis* (J. R. Bozeman., V. Girardin and C. H. Skiadas, eds.). ISAST, Athens, 2014.

[11] YU. A. KUTOYANTS, « On score-functions and goodness-of-fit tests for stochastic processes », *Math. Methods Statist.*, vol. 25, n° 2, 2016.

[12] E. L. LEHMANN, J. P. ROMANO, « *Testing Statistical Hypotheses* », (3rd ed.) Springer, New York, 2005.

[13] N. MAGLAPHERIDZE, Z. P. TSIGROSHVILI, M. VAN PUL, « Goodness-of-fit tests for parametric hypotheses on the distribution of point processes », *Math. Methods. Statist.*, vol. 7, 1998.

[14] I. NEGRI, Y. NISHIYAMA, « Goodness of fit test for ergodic diffusion processes », *Ann. Inst. Statist. Math.*, vol. 61, n° 4, 2009.

[15] L. ZHOU, « On asymptotically parameter free test for ergodic diffusion process », *Ann. I. S. U. P.*, vol. 58, n° 1-2, 2014.

Rubrique

Scheduling Problem for unloading operations in a railway terminal

Sous-titre

Sanae Kouismi

Industrial Engineering Department
Equipe MOAD/SC
Ecole Mohammadia d'Ingénieurs
Mohammed 5 University
Rabat
Morocco
SanaeKouismi@research.emi.ac.ma

ABSTRACT. This study deals with the problem of minimizing the makespan of unloading containers from a train in the dry port MITA in Casablanca/Morocco. A combination of unloading requests using handling equipment in the topology of container terminal creates complex operational challenges for storage management. The main objective is to solve a real-world optimization problem. We present a new Mixed Integer Programming (MIP) model for the scheduling and storage problem taking into account the storage constraints in the terminal. To test the performance of the proposed model, numerical tests are conducted and analysed. The results show the good quality of the obtained solutions.

RÉSUMÉ. Cette étude traite le problème de minimisation de la date fin des opérations de déchargement des conteneurs d'un train dans le port sec MITA à Casablanca / Maroc. Une combinaison des opérations de déchargement utilisant les équipements de manutention dans la topologie du terminal à conteneurs crée des défis opérationnels complexes pour la gestion du stockage. L'objectif principal est de résoudre un problème d'optimisation du monde réel. Nous présentons un nouveau modèle de Programmation mixte à nombres entiers (MIP) pour le problème d'ordonnancement et de stockage en tenant compte les contraintes de stockage dans le terminal. Pour tester la performance du modèle proposé, des tests numériques ont été menés et analysés. Les résultats montrent une bonne qualité des solutions obtenues.

KEYWORDS : scheduling, makespan, optimization, crane assignment, Container terminal

MOTS-CLÉS : Ordonnancement, makepan, optimisation, affectation de grues, Container terminal

1. Introduction

A container terminal is an open system or a large number of operations can occur, including arrivals and departures of containers. MITA is interested in maximizing the number of trains that it can host, so the challenge of the platform is to increase the productivity by accelerating the duration of unloading operations of the train waiting in the quay. Thus, the main objective is to solve a real-world optimization problem by minimizing the time required to process all containers on a train. In this context, this paper studies the problem of train unloading in the Mita platform in Casablanca using the available cranes and the storage areas. The study attempts to determine the schedule of each container assigned to a crane and storage area, with the goal of completing all of the unloading operations of a train as fast as possible. So, the solution involves the selection of a crane and storage area for each container. The objective is to minimize the makespan of all operations of a waiting train in the quay.

2. Literature review

E. Kozan [3] has studied the problem of minimizing the total processing time of containers in a terminal from arrival to departure (this time being equal to the sum of the handling time and the routing time or movement of the containers in the terminal). To solve this problem, he used the General Algebraic Modeling System (GAMS) program. C. Zhang et al. [5] Have determined the dates and routes of the cranes so as to minimize the total workload in a storage area. The authors showed the NP-completeness of the problem and developed a branch and bound approach as well as a metaheuristic based on simulated annealing. Y. Zhu and A.Lim [6] have been interested in the scheduling problems of handling equipment and containers in order to optimize the productivity of the RTG (Rubber Tyred Gantry Cranes). K. H. Kim et al. [2] Have presented a problem of scheduling the handling means by assigning operations at time intervals associated with the use of these means. The terminal studied contains three types of handling equipment: container gantries, short trucks and transfer gantries. The authors modelled the problem on three sub-problems. A.Galuszka et al. [1] modelled and analysed the problem of moving containers by (reachstakers) RSs in a terminal of limited capacity, whose objective is to determine the bays of the containers after unloading. The proposed heuristic makes it possible to find a planning of displacement of the RSs and to place the container towards its destination while minimizing the number of operations of handling.

3. Mathematical Formulation

This is to minimize the processing time of a train waiting on the rail terminal of the dry port MITA. This treatment involves unloading, transporting and placing all containers on board the train to the storage areas using the available cranes. This is the optimal allocation of containers to cranes and storage areas. After studying the existing situation in the field, we considered the following assumptions:

– All containers have the same processing time;

– Container processing is limited by the unavailability of cranes in some periods across the horizon, MITA has nine cranes

– A crane can carry a single container at a time

– All operations (unloading and storage) are processed by cranes of kind reach-stacker;

– A storage area has a limited capacity (in terms of number of containers), MITA has four storage areas;

– The processing of a container is non-preemptive: when a crane begins the processing of a container, it can not stop until the container is placed in the storage area assigned to it;

3.1. Parameters

– N : total number of containers;

– l: total number of cranes;

– m : total number of storage areas;

– k : container index;

– i : crane index;

– j : storage area index;

– τ : Processing time of a container by a crane to a storage area ;

– $\overline{\tau}$= τ+return;

– $cap(j)$: Residual capacity (in terms of the number of containers) of the storage area ;

– $G(i)$: Crane availability time i;

3.2. decision variables

– C_k : integer variable that present the completion time of the container $k(1 \leq k \leq N)$;

– C_{max}: integer variable that present the makespan;

– y_{ijk} : binary variable equal to 1 if and only if container k is assigned crane i ($1 \leq i \leq l$) and to storage area j ($1 \leq j \leq m$);

– r_{ik} : binary variable equal to 1 if and only if container k is assigned to crane i;

– z_{jk} : binary variable equal to 1 if and only if container k is assigned to storage area j;

– $g_{k'ki'i}$: binary variable equal to 1 if and only if container k' is assigned to crane i' and container k and crane i;

– $s_{k'kj'j}$: binary variable equal to 1 if and only if container k' is assigned to span j' and container k to storage area j;

– $p_{k'k}$: binary variable equal to 1 if and only if the processing of container k is started after the completion of container k';

3.3. Mathematical program

Minimize :

$$C_{max}$$

St :

$$C_{max} \geq c_k, \forall (1 \leq k \leq N) \quad [1]$$

$$c_k - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \tau y_{ijk} \geq 0, \forall (1 \leq k \leq N) \quad [2]$$

$$\sum_{i=1}^{l} r_{ik} = 1, \forall (1 \leq k \leq N) \quad [3]$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_{jk} = 1, \forall (1 \leq k \leq N) \quad [4]$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} y_{ijk} = N \quad [5]$$

$$r_{ik} + z_{jk} - 1 \leq y_{ijk} \leq \frac{1}{2}(r_{ik} + z_{jk}), \quad [6]$$
$$\forall (1 \leq i \leq l), \forall (1 \leq j \leq m), \forall (1 \leq k \leq N)$$

$$r_{i'k'} + r_{ik} - 1 \leq g_{k'ki'i} \leq \frac{1}{2}(r_{i'k'} + r_{ik}), \quad [7]$$
$$\forall (1 \leq k', k \leq N), \forall (1 \leq i', i \leq l)$$

$$z_{j'k'} + z_{jk} - 1 \leq s_{k'kj'j} \leq \frac{1}{2}(z_{j'k'} + z_{jk}), \quad [8]$$
$$\forall (1 \leq k', k \leq N), \forall (1 \leq j', j \leq m)$$

$$c_{k'} - (c_k - \tau) - (1 - p_{k'k})M \leq 0, \forall (1 \leq k', k \leq N) \quad [9]$$

$$c_{k'} - (c_k - \tau) + p_{k'k}M \geq 0, \forall (1 \leq k', k \leq N) \quad [10]$$

$$p_{k'k} + p_{kk'} \geq g_{k'kii}, \quad [11]$$
$$\forall (1 \leq k', k \leq N), k \neq k', \forall (1 \leq i \leq l)$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{N} y_{ijk} \leq cap(j), \forall (1 \leq j \leq m) \quad [12]$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} y_{ijk} \overline{\tau} \leq G(i), \forall (1 \leq i \leq l) \quad [13]$$

(M is a sufficiently large constant)

In this formulation, the constraints (1) and (2) define the properties of the decision variables C_{max} et c_k. The constraint (3) ensures that each container is transported by one crane. The constraint (4) ensures that each container is placed in one storage area. The constraint (5) ensures the processing of all containers. The constraint (6)defines the decision variable y_{ijk}. The constraint (7) defines the relationship between the crane-container assignment (r_{ik})and the assignment pairs of containers-cranes ($g_{k'ki'i}$). The constraint

Table 1. *Results for N=10*

N Instance	Size (Nxlxm)	value de Cmax (min)	CPU (sec)
1	10x2	10	7200
2	10x3	6	21
3	10x4	6	342
4	10x5	4	30
5	10x6	4	34
6	10x7	4	45
7	10x8	4	65
8	10x9	4	20

(8)defines the relationship between the container-storage area assignment (z_{jk}) and the assignment pairs of containers-pairs of storage areas ($s_{k'kj'j}$). The constraints (9) and (10) express the precedence relationship: the constraint (9)indicates that when k' starts to be processed and the process of k is not completed Then $c_{k'} - (c_k - \tau) > 0$ and for this constraint to be satisfied$p_{k'k} = 0$. The constraint (10) indicates that when the process of k' is completed before k starts to be processed then $c_{k'} - (c_k - \tau) \leq 0$ which forces $p_{k'k} = 1$. The constraint (11) expresses the non simultaneous treatment of two different containers by the same crane (if two containers are processed by the same crane, then there is a precedence relationship between them). The constraint (12) expresses the satisfaction of the residual capacity of the storage area j. The constraint (13) expresses the satisfaction of the availability of the crane i.

4. Results

Tests were led on this problem to verify on one side that the mathematical program gives results corresponding to our expectations for three capacities of train: 10, 12 and 15 containers. On the other hand to determine the minimum number (lower for nine) of necessary cranes to minimize the duration of processing of a train. These tests were realized using the solveur CPLEX and of ILOG OPL studio by using the mathematical formulation presented in the section 3.

The results in the tables 1, 2 and 3 show as expected that the makespan decrease when we increase the number of cranes. We also notice that for 10 containers, from five cranes we keep the same quality level of solution, for 12 containers, the duration of makespan

Table 2. *Results for N=12*

N Instance	Size (Nxlxm)	value de Cmax (min)	CPU (sec)
1	12x2	11	7200
2	12x3	8	7200
3	12x4	6	7200
4	12x5	6	7200
5	12x6	4	365
6	12x7	4	326
7	12x8	4	100
8	12x9	4	215

Table 3. *Result for N=15*

N Instance	Size (Nxlxm)	value de Cmax (min)	CPU (sec)
1	15x2	14	5400
2	15x3	10	7200
3	15x4	8	7200
4	15x5	6	8100
5	15x6	6	7200
6	15x7	6	7200
7	15x8	5	1045
8	15x9	4	1671

stabilizes only from six cranes, and for 15 containers, the minimum is reached when the number of cranes is equal to nine.

5. Conclusion

In this paper, we studied the problem of the minimization of the processing time needed to unload a train of containers on the platform MITA. After the analysis of the existing, we modelled this problem as a MIP in a very large size (more than 2000 variables and more than 500 constraints). We solved this problem by using the solveur CPLEX for three capacities of the train (10, 12 and 15 containers) and by making vary the number of cranes from 2 to 9. The obtained results were in accordance with our expectations. Indeed, the makespan decreases with the increase of the number of cranes. From the threshold of 15 containers, the computational time CPU exceeds 24 hours. A runway of improvement resolution of the problem with the real data(60 containers) would be to develop metaheuristics.

6. References

[1] A. GALUSZKA, K. SKRZYPCZYK, D. BERESKA, M. PACHOLCZYK, " Re-Handling Operations in Small Container Terminal Operated by Reach Stackers", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, num. 70, 2010.

[2] K. H. KIM, K. W. KIM, H. HWANG, C. S. KO, "Operator-scheduling using a constraint satisfaction technique in port container terminals", *Computers and Industrial Engineering*, num. 46: 373-381, 2004.

[3] E. KOZAN, "Optimising container transfers at multimodal terminals", *Mathematical and Computer Modelling*, num. 31:235-243, 2000.

[4] D. H. LEE, J. X. CAO, Q. X. SHI, "Synchronization of yard truck scheduling and storage allocation in container terminals", *Engineering Optimization*, vol. 7 num. 41:659-672, 2009.

[5] C. ZHANG, Y. WAN, J. LIU, R.J. LINN, "Dynamic crane deployment in container storage yards", *Transportation Research-B*, num. 36:537-555, 2002.

[6] Y. ZHU, A. LIM, "Crane Scheduling with Spatial Constraints: Mathematical Model and Solving Approaches", *AMAI*,2004.

Mécanique des fluides et géosciences

Salt dome dissolution

Coupling flow, transport and geochemistry

BEN REFIFA Marwen[a,*], CANOT Edouard[b,**], GUELLOUZ Lamia[a,***], BOUHLILA Rachida[a,****]

[a] LMHE, ENIT, Université Tunis EL Manar, TUNISIE

[b] IPR,Université de Rennes 1,Campus de Beaulieu, Rennes, France

*Marwen.ben.refifa@gmail.com

.** edouard.canot@univ-rennes1.fr

***lamiaguellouz@yahoo.fr

****rjbouhlila@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Le problème du dôme de sel est un défi classique en hydrogéochimie ; il est constitué d'un dôme de sel solide de très faible perméabilité situé dans un écoulement souterrain. Habituellement, ce dôme est considéré comme imperméable et constitue une condition limite au bas du domaine. Dans la réalité, l'eau pénètre dans le dôme et conduit à sa dissolution. Un modèle couplé écoulement-transport-géochimie, adapté aux fortes concentrations, montre que cette dissolution, même si elle est lente, ne peut pas être négligée pour des durées très longues.

ABSTRACT. A classical hydrogeochemical challenge is the salt dome problem, which consists in a rock salt dome having a very low permeability located in an underground flow. The hydrogeologists usually consider this rock as impervious and the salt is taken as a boundary condition at the bottom of the domain. In reality, this value of permeability allows the circulation of the water inside the rock so that the dome can be dissolved. We use a coupled model of flow, transport and geochemistry dealing with high concentrations, and we show that this dissolution process, even if it is rather slow, cannot be neglected for long durations.

MOTS-CLÉS : hydrogéologie, géochimie, milieux poreux, simulation numérique, dissolution, précipitation.

KEYWORDS: Hydrogeology, geochemistry, porous media, numerical simulation, dissolution,

2 **ARIMA** – Volume 1 – 2002

1. Introduction

For storing nuclear waste, the most appropriate configuration is the salt dome. Physical and chemical characteristics of these rocks, low porosity and permeability, are favorable for this type of use. In order to quantify the risk of escape of nuclear particles outside the dome, the salt dome problem has been the subject of several works and studies. The results of these studies were highly different in a way to be sometimes contradictory [3]. The reference work used by all these problems is the one described by [1]. Although numerous other studies have been realized, they have considered the salt rock as impermeable and they were only interested by the top of the salt dome area to study the distribution of the concentration and velocity fields and their possible evolution over time. This rock is characterized by a permeability that ranges between 10^{-15} and 10^{-21} m^2. These values over a period of time, which can vary from a few hundreds to thousands of years (depending on applied pressure), allow liquids to pass through the rock pores [4].

In the present work, we use GEODENS code [2] which has been recently improved by using numerical methods for coupling and solving the problems: flow-chemistry-transport. The problem which is presented here takes into account the low permeability of a salt dome. The domain is extended in depth, compared to that described by [1], in order to take into consideration a part of the dome. This configuration allows us to study the changes and evolution of the porosity and permeability of the rock on a time scale of tens of thousands of years. The variation of the porosity may not only influence the salt transport but also modify the transfer of a contaminant, initially stored in the rock of the dome and thus may increase the risk that this pollutant reaches the soil surface.

2. Code description

GEODENS is a numerical model for the resolution of density coupled flow and transport in porous media. It is based on a finite element method with Galerkin approximation. The reference elements are six-node based triangles.

2.1. Physical model

The equations used are those of mass conservation, conservation of momentum [2]. The relation between porosity and permeability is very complicated in natural environments. Several models exist. This relationship depends strongly on the type of soil and mostly on the tortuosity (topology of pore connectivity). We chose to apply a logarithmic relationship between k (m^2) and ϕ which was developed by [5] :

$$log(k) = a * \emptyset + b \quad (1)$$

The density of the mixture ρ is the coupling element between the different code processes. Studied problems are generally characterized by high concentrations with the existence of salts precipitates. The calculation of the density is no longer a simple linear relationship, applicable only to low concentrations. For that, this variable is calculated using a geochemical code SELSAUM [2]. The only phenomenon to be considered would be the precipitation of minerals or their dissolution.

2.2. Numerical implementation

In the original version of GEODENS, the flow and transport are coupled using density at each node. In the current extended version, at each time step and for each iteration, until convergence is reached, the chemical calculation (at equilibrium) is done using the chemistry code (SELSAUM). This latter calculates the density by taking into account the existence of solute and/or solid salt. Once the geochemical code detects the existence of one or more precipitated and/or dissolved salts, it updates the values of the appropriate concentrations and returns the precipitated and/or dissolved amounts to GEODENS to use it to update the values of the physical parameters (porosity, permeability...).This new approach has been validated by using few simple configurations having analytical solutions, and the results will be shown in another publication.

3. Salt dome

The problem treated is inspired from the actual geological configuration in the north of Germany. The salt dome is located 300 m deep from the surface of the soil where a circulation of fresh water takes place. The water dissolves the salt and moves it to the exit.

3.1. Description and simulation of the original problem

The domain is a vertical section of 300 m in height and 900 m in width. The boundary conditions are as presented by [1]. On the upper face of the domain we impose, for transport, a zero concentration (C = 0) on the section ($0 \leq x \leq 200$), the remaining surface is characterized by a Neumann condition where (dc/dz = 0). For the flow, a pressure condition which decreases linearly, from the left to the right, from 10^5 to 0 Pa is imposed. On the bottom side, the concentration C_0 (saturation value) is different from zero only for x ranged in [300,600] m.

The simulations were performed using 1681 nodes. The steady state is attained when convergence is reached i.e. when the evolution of the solution vector $\Delta x/\|\Delta x\|$ for t_{n+1} is less than 10^{-9}. In our case, the steady state is reached at 600 years which agrees with literature [1]. The results (Figure 1) perfectly match those of work of [1].

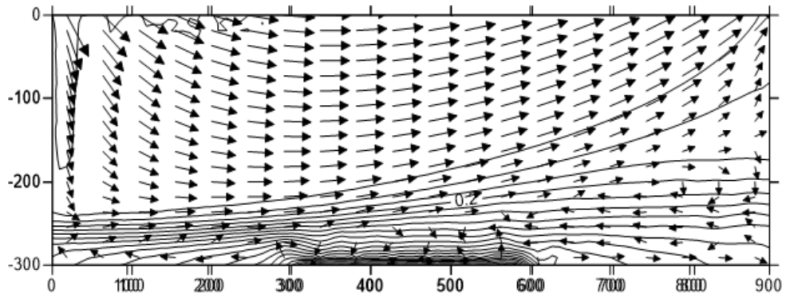


Figure 1. Concentration and velocity fields above the salt dome (T=1000 year)

3.2. New approach: Dome with variable porosity

The small values of permeability [10^{-15} to 10^{-21} m^2], allow the circulation of water in the rocks [4]. Salt domes cannot be considered as impermeable and small water circulation may change the physical characteristics (porosity and permeability) and the general form of the salt dome. In order to study the evolution of the porosity and permeability, we propose a new configuration of this problem. The idea is to expand the computational domain to contain a portion of the dome. We have expanded the computational domain by 50 meters. New Problem dimensions are (350m x 900m). The adopted mesh consists of 2136 elements i.e. 4391 nodes. We suppose that the domain is a porous medium characterized by porosity equals to 0.2 and that the dome is composed by 90% of solid salt (NaCl) and 10 % of a solid matrix. The total porosity of the dome rock is equal to 0.02, its permeability is 10^{-17} m^2. To compare the results of this problem with those of the original one, we conducted a simulation over a period of 1000 years (figure 2).

The concentration field has a configuration similar to that of the original problem. Recirculating cells exist on both sides of the salt dome. These cells are larger than those found in the original problem.

The dome rock has a very low permeability; fresh water dissolves the salt dome surface. The porosity of the elements on the upper layer of the dome has increased from 0.02 to 0.04 for a simulation of 1000 years, these values depends on the size element mesh. The amount of dissolved salt, which is calculated by considering a domain thickness of about 1 m, is of the order of 1.2 10^5 kg including 400 kg which circulates in the computational domain.

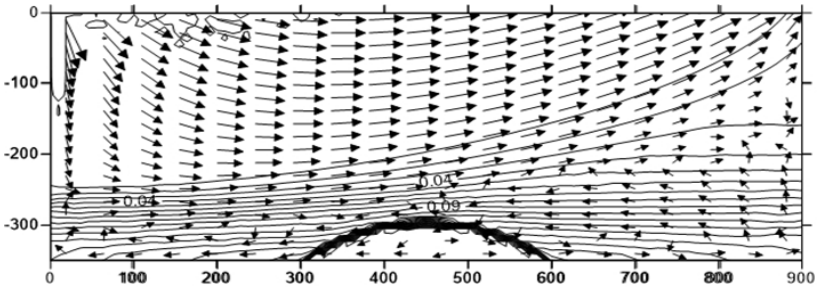


Figure 2.Velocity and concentration fields for a simulation of 1000 years

The purpose of this study is to quantify the change in the salt dome porosity. Thus, we have extended our simulations over a time of 10,000 years. At the end of this period the porosity of the upper layer of the rock has increased to 0.09 (Figure 3). The porosity has increased by a factor of 4.5. The amount of dissolved salt (lost) is of the order of 3 10^{5} kg. This quantity represents 50% of the amount of initially existing salt on this upper layer of dome. The porosity of the second layer of elements increased slowly by a factor of 2.

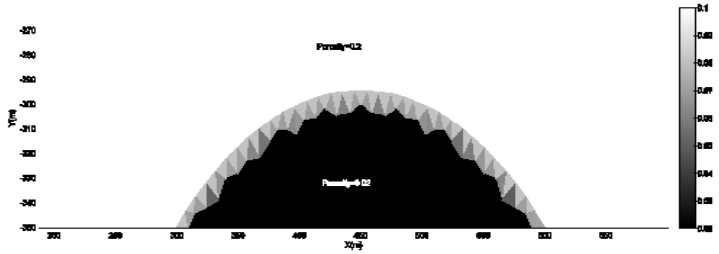


Figure 3. Porosity fields for a simulation of 10000 years

The amount of lost salt is not constant over time-. The dissolution process is much faster for the first 1000 years. After establishing steady state, the circulating water in the field is more concentrated and the dissolution process becomes slower. Different grids have been used to compute the percentage of the amount of dissolved salt at the top surface of the dome: 50% of the amount of initially existing salt in this band is dissolved after 5000 years. Thus, by comparing the total stock of dissolved salt, the dissolution process has the same behavior and the same speed for all the grid meshes. The quantity of salt dissolved remains the same per meter of depth irrespective of the adopted mesh. Taking into account the evolution of the porosity and the dissolution process, we

estimate the time required for the disappearance of the dome top layer about 32000 years. This layer can be seen as a band of 8 m depth.

4. Conclusion

The salt dome problem is one of the most interesting hydrogeological applications according to its use for the storage of nuclear waste. The rock that forms the dome cannot be considered impermeable. The outcomes of the GEODENS code are in perfect agreement with the previous work done on this problem. The porosity of the top band of the dome has increased by a factor of 4.5 after a simulation of 10000 years. For the same duration, the top layer of the dome lost 50% of the quantity of salt initially stored in these pores. The dissolution process is quite slow but we proved that it cannot be neglected. The diffusive movement, inside the dome, will increase with the increase of the permeability of the upper layer. This process will speed up the salt dissolving process in the lower layers of the dome.

5. Bibliographie

[1] A. W. Herbert, C. P. Jackson et D. A. Lever, «Coupled groundwater flow and solute transport with fluid density strongly dependent upon concentration,» *Water Ressources Research,* vol. 34, n° %10, pp. 1781-1795, 1988.

[2] B. Rachida, «Ecoulement et transport densitaires dans les milieux poreux. Modèles etapplications,» *Les Annales Maghrébines de l'Ingénieu,* pp. 08-10, Avril 1996.

[3] H. J. Diersch et O. Kolditz, «Coupled groundwater flow and transport:2.Thermoline and 3D convection Systems,» *Advences in water Ressource,* vol. 21, pp. 401-425, 1998.

[4] M. Ghoryechi et X. Dauplay, «Devenir à long terme d'exploitation abandonnées de sel en France,» chez *Colloque International Après-mine 2003*, Nancy,France, 2003.

[5] W. Stanford et L. F. Konikow, «Simulation of calcite dissolution and porosity changes in saltwater mixing zones in coastal aquifers,» Water Ressource, vol. 25, pp. 655-667, 1989.

Index

AbdelAziz Ezziani, 45
Abderrahmane Bendali, 41
Abderrahmane Habbal, 107, 119, 339
Ahmed Boughammoura, 243
Anis Matoussi, 137
Anis Mohamed, 43
Anis Theljani, 325
Asma Gdhami, 313
Asma Yahmadi, 391

Badreddine Rjaibi, 325
Belkacem Said-Houari, 427
Ben Abdeddaiem Maroua, 447
Bentarzi Mohamed, 365
Bochra Riahi, 123
Boujlida Hanen, 333
Boussad Hamour, 301
Boutarene Khaled El-Ghaouti, 179
Boutheina Yahyaoui, 339

Cesare Corrado, 117
Chaima Moufid, 125
Chikh Bouzar, 319
Chorfi Lahcène, 353
Choutri Abdelaziz, 213
Christos Papageorgakis, 29
Claude Lobry, 55
Cocquet Pierre-Henri, 179

Dalah Mohamed, 203
Derbazi Ammar, 203

Edouard Cano, 459
El Amir Djeffal, 221
El Mahdi El Guarmah, 105, 411
Elkamel Maayoufi, 377
Eric Soccorsi, 93

Fadhel Jday, 439
Faker Ben Belgacem, 113
Fares Mokhtari, 133
Fares Ouzzani, 347
Faten Khayat, 35
Fatiha Boulahia, 289
Fatima Zahra Tchouar, 319
Fatima Zohra Bouseba, 307
Fatma Zohra Nouri, 397
Fayssal Benkhaldoun, 147, 405
Fazia Bedouhene, 289
Franck Delvare, 33

Guy Vallet, 13

Hafedh Mohamed Babou, 173
Haithem Ben Kahla, 87
Hajer Rejeb, 89
Halim Zeghdoudi, 307
Hamdi Houichet, 325
Hamdi Zorgati, 11
Hela Ayed, 359
Hend Ben Ameur, 371, 377, 383
Hisao Fujita Yashima, 261
Houssem Haddar, 21, 419

Ibtissem Annaka, 261
Ibtissem Ben Aïcha, 95
Imen Ben Tahar, 137
Imen Rassas, 99

Jérome Harmand, 69
Jacques Henry, 439
Jamila Lassoued, 117

Kacimi Abderrahim, 183
Kallekh Afef, 267
Kamouche Nesrine, 199
Khélifa Imène, 353
Khaled El-ghaouti Boutarene, 47
Khalid Bellaj, 411
Kheloufi Arezki, 249
Khiari Souad, 431
Khouider Boualem, 183
Konstantinos Mavreas, 27

Lamia Guellouz, 459
Lassaad Elasmi, 161
Lassoued Jamila, 25
Leila Djouamai, 427
Leonardo Baffico, 359

Maatoug Hassine, 267
Maher Moakher, 313, 325, 419
Martin Vorahlik, 3
Marwa Kchaou, 419
Marwen Ben Refifa, 459

Mebarki Karima, 255
Mejdi Azaïez, 7
Mekki Ayadi, 339, 359
Meraghni Djamel, 231
Mghazli Zoubida, 273
Moez Kallel, 119
Mohamed Anis Ben Lasmar, 143
Mohamed Bentarzi, 347
Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine, 295
Mohamed Hédi Riahi, 383
Mohamed Haiour, 295
Mohamed Tarek Touaoula, 5
Mohamed Verid Abdelkader, 175
Mohamed-Yahya Mohamed-Salem Dah, 171
Mohammed Addouche, 439
Mohammed Boubekeur, 155
Mohammed Seaid, 405
Mokhtari Fares, 191
Moncef Mahjoub, 25, 117
Mounder Benseghir, 397

Nabil Gmati, 43
Nadra Bouarroudj, 439
Nahla Abdellatif, 51, 61, 69, 391
Naji Ilyas, 273
Necir Abdelhakim, 231
Nejib Zemzemi, 115, 117, 119, 439
Nejla Tlatli, 371
Nizar Kharrat, 383

Omar Gouasnouane, 411

Pierre-Henri Cocquet, 47

Rabeb Chamekh, 119
Rachida Bouhlila, 459
Radhouane Fekih-Saleh, 55, 75
Radhouane Fekih-Salem, 391
Rajae Aboulaïch, 9
Regis Duvigneau, 313
Rezgui Hayat, 213
Rim Guetat, 237

Sadoun Mohamed, 365
Said Agoujil, 85
Saida sari, 405
Saloua AOUADI, 237
Saloua Aouadi, 115
Sanae Kouismi, 453
Skander Belhaj, 83
Soltane Louiza, 231
Soufiane Gasmi , 279
Soumaya Boujena, 103, 411
Soumaya Ghnimi, 279
Stéphane Lanteri, 43

Taoufik Sassi, 359
Tewfik Sari, 55, 69, 75
Thouraya Nouri Baranger, 371

Vitaly Volpert, 109

Wafa Mansouri, 371
Wahid Faidi, 141
Wajih Mbarki, 115
Wissal Sabbagh, 139

Yacine Mabrouki, 127
Yessmine Daoud, 69
Yosra Boukari, 37
Yosra Braham, 243
Yousra Djabari, 289
Youssef Mejri, 97

Zahar Samira, 227
Zakaria Belhechmi, 15
Zemzemi Nejib, 25