Algèbres de Hecke pour l'équation de Yang–Baxter

Colloque Tournant du RT Algèbre 2025

Edouard Feingesicht (LMNO, Caen)

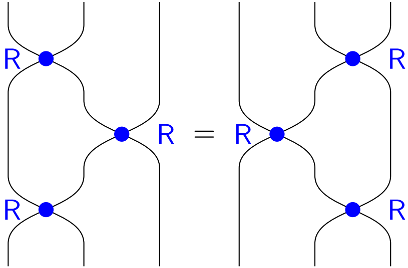
Mars 2025, Clermont-Ferrand

Equation de Yang–Baxter

Définition

Soit V un espace vectoriel, une application linéaire $R\colon V \otimes V \to V \otimes V$ est une solution de l'équation de Yang–Baxter si sur $V \otimes V \otimes V$:

$$(R \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes R)(R \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes R).$$



- Origine(s) : Mécanique quantique (*McGuire '64*, *Yang '67*), Mécanique statistique (*Onsager '44*, *Baxter '72*).

Solutions ensemblistes

Définition (*Drinfeld '92*)

Une solution ensembliste de l'équation de Yang–Baxter est un couple (X, r) où X est un ensemble et $r\colon X \times X \to X \times X$ est une bijection qui satisfait sur $X \times X \times X$:

$$(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r).$$

Exemple : Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \sigma = (12 \ldots n)$. En posant $r(x_i, x_j) = (\sigma(x_j), \sigma^{-1}(x_i))$ on obtient une solution ensembliste (notée X_n).

Problème

Classifier toutes les solutions ensemblistes.

Précision du contexte

On note $r(x, y) = (\lambda_x(y), \rho_y(x))$.

Définition (*Etingof-Schedler-Soloviev '99*)

On dit que (X, r) est :

- Finie si $|X| < \infty$.
- Involutive si $r^2 = \mathrm{id}_{X \times X}$.
- Non-dégénérée si λ_x, ρ_x sont bijectives pour tout $x \in X$.

Convention : On appelle "solution" une solution ensembliste finie involutive non-dégénérée. Dans ce cas les λ_x (ou ρ_x) déterminent r !

Définition (*Etingof-Schedler-Soloviev '99*)

On définit le groupe G (resp. monoïde M) de structure associé à (X, r) par la présentation

$$\langle X \mid xy = \lambda_x(y)\rho_y(x) \rangle.$$

Exemple : $M(X_n) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_i x_j = x_{j+1} x_{i-1} \rangle^+$.

Parallèle avec les groupes d'Artin–Tits

Artin–Tits sphérique	**Yang–Baxter**
Classifié	?
Garside (Dehornoy–Paris '99)	Garside *(Chouraqui '10)*
$W = A/\langle s^2 \rangle$ fini	$\overline{G} = G/\langle x^{[d]} \rangle$ fini *(Dehornoy '15)*
Irréductible	Indécomposable ?
Représentation de réflexion	Représentation monomiale *(Dehornoy '15)*
Algèbre d'Iwahori–Hecke	Algèbre de Hecke *(F. '24)*

I-structure de G

Théorème (*Etingof-Schedler-Soloviev '99*)

Soit (X, r) une solution. Alors $G(X, r) \hookrightarrow \mathbb{Z}^X \rtimes \mathfrak{S}_X$ tel que la projection sur la 1re coordonnée soit une bijection.

- On a donc une bijection (1-cocycle) $\Pi \colon \mathbb{Z}^X \overset{1:1}{\to} G(X, r)$.

Notons ψ le morphisme tel que le plongement soit $g \mapsto (\Pi^{-1}(g), \psi^{-1}(g))$.

- Le plongement est défini par $x \in X \mapsto ((0, \ldots, 1, \ldots 0), \lambda_x)$, et un élément de $\mathbb{Z}^X$ détermine uniquement un élément de $G(X, r)$.

Exemple : dans $G(X_n)$, on a $x_1 x_2 \cdots x_k \mapsto ((k, 0, \ldots, 0), \sigma^k)$ et $x_1^n \mapsto ((1, \ldots, 1), 1)$.

Structure de Garside

Théorème (*Chouraqui '10*)

$M(X, r)$ est un monoïde de Garside, et $G(X, r)$ est son groupe de Garside.

Concrètement :

- $M(X, r)$ est simplifiable ($fgh = fg'h \Rightarrow g = g'$).
- $M(X, r)$ a une longueur (dans $\mathbb{N}^X$ $\ell(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \cdots + a_n$).
- $M(X, r)$ a des ppcm et pgcd pour la divisibilité à gauche/droite.
  Dans $\mathbb{N}^X$:
  $(a_1, \ldots, a_n) \wedge_l (b_1, \ldots, b_n) = (\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n))$
  $(a_1, \ldots, a_n) \vee_l (b_1, \ldots, b_n) = (\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n))$
- $M(X, r)$ a un élément de Garside Δ ($\mathrm{Div}_l(\Delta)$=$\mathrm{Div}_r(\Delta)$ engendre $M(X, r)$).
  $\Delta \mapsto (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^X$.

$\Rightarrow$ $G = \mathrm{Frac}(M)$ a des formes normales, un solution au problème du mot et au problème de conjugaison, etc.

Germe de Garside

Pour $x \in X$, on note $x^{[k]}$ l'élément correspondant à $(0, \ldots, k, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^X$.

Proposition (*Dehornoy '15*) : Classe de Dehornoy

Soit (X, r) une solution. Il existe un entier positif minimal d tel que, pour tout $x \in X$, on ait $\psi(x^{[d]}) = 1$.

Exemple : Pour X_n on a $x_i \cdots x_{i+k-1} \mapsto ((0, \ldots, k, \ldots, 0), \sigma^k)$ donc $d = n$.

Théorème (*Dehornoy '15*) : Quotient "à la Coxeter"

$\overline{G}(X, r) = G(X, r)/\langle x^{[d]} \rangle$ est une germe de Garside pour $(M(X, r), \Delta^{d-1})$.

Cela signifie que ce quotient fini permet de "reconstruire" M et sa structure de Garside.

Remarque

Cette construction marche pour tout multiple de d, on définit donc

$$\overline{G}_{m}(X, r) = G(X, r)/\langle x^{[md]} \rangle = G(X, r)/\langle (x^{[d]})^{m} \rangle.$$

Exemple : $\overline{G}_m(X_n) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_i x_j = x_{j+1} x_{i-1}, (x_i \cdots x_{i+n-1})^m = 1 \rangle$

Quelques statistiques

Enumeration des solutions de taille ≤ 10 (Akgün-Mereb-Vendramin '22) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# Sol.	1	2	5	23	88	595	3 456	34 530	321 931	4 895 272
d_{max}(F. '23)	1	2	3	4	6	8	12	15	24	30

- On sait que $d_{max}(n) \leq n!$, loin des vraies valeurs.

Conjecture *(F. '23)*

Soit (X, r) une solution de taille n. Alors sa classe est bornée par

$$\max\left(\{n_1 \cdots n_k | n_1 + \cdots + n_k = n, 1 \leq n_1 < \cdots < n_k\}\right).$$

Exemple : $10 = 2 + 8 = \cdots = 2 + 3 + 5$ donne un maximum de 30.

- Preuve pour certaines familles de solutions (F. '23, Castelli-Ramirez '23).

Indécomposabilité

Définition

On dit que (X, r) est décomposable s'il existe une partition non-triviale $X = X_1 \sqcup X_2$, telle que $r|_{X_i \times X_i}(X_i \times X_i) \subset X_i \times X_i$.
Si ce n'est pas le cas, on dit que (X, r) est indécomposable.

Exemple : $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ avec $\lambda_{x_i} = (12)(34)$ se décompose en $X = \{x_1, x_2\} \sqcup \{x_3, x_4\}$.

- (X, r) est indécomposable ssi $G(X, r)$ agit transitivement sur X.

Conjecture *(F. '23)*

Soit (X, r) une solution indécomposable de taille n. Alors sa classe est bornée par n.

- Preuve pour certaines familles de solutions (F. '23, Castelli-Ramirez '23).

Représentation monomiales

Propriété *(Dehornoy '15)*

On a une représentation fidèle $\Theta\colon G(X,r) \to \mathrm{GL}_X(\mathbb{C}[z^{\pm 1}])$ définie par

$$x \mapsto D_x P_{\psi(x)} \qquad \text{où } D_x = \mathrm{diag}(1,\ldots,z,\ldots,1), \psi(x) = \lambda_x$$

De plus, en spécialisant en $z = e^{\frac{2i\pi}{md}}$ on obtient une représentation fidèle $\overline{\Theta}_m\colon \overline{G}_m(X,r) \to \mathrm{GL}_X(\mathbb{C})$.

Example : $X_3 \ni x_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème *(Dietzel-F.-Properzi '24)*

Si $md > 2$ alors on a les équivalences :

$$(X,r) \text{ indécomposable} \Leftrightarrow \Theta \text{ irréductible} \Leftrightarrow \overline{\Theta}_m \text{ irréductible.}$$

Et ces représentations sont induites par des caractères de stabilisateurs.

Produit de Zappa-Szép

Soit (X,r) de classe $d = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$. On note $\alpha_i = p_i^{a_i}$ et $\beta_i = \frac{d}{\alpha_i}$.

Lemme *(F. '23)*

$\overline{G}^{[\beta_i]}(X,r) = \overline{\langle x^{[\beta_i]} \rangle}$ est un p_i-Sylow de $\overline{G}(X,r)$ qui définit une solution de classe α_i.
De plus, ces Sylow commutent 2 à 2 et $\overline{G}(X,r) = \overline{G}^{[\beta_1]} \cdots \overline{G}^{[\beta_r]}$.

On peut "inverser" cette factorisation :

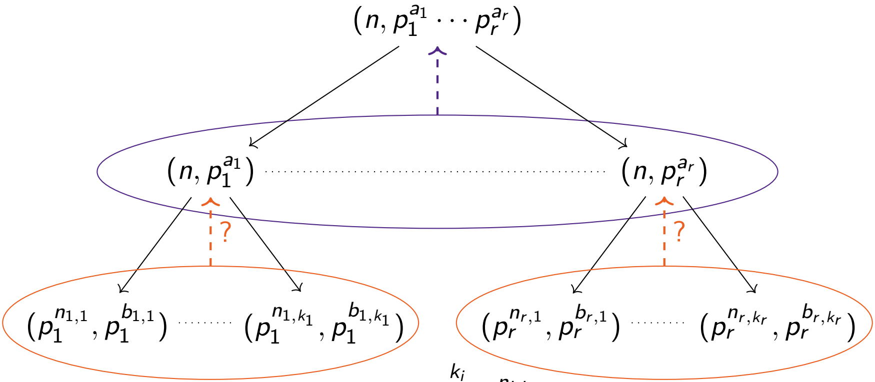
Théorème *(F. '23)*

Toute solution peut être construite à partir de solutions de classe puissance d'un nombre premier.

- On peut voir les solutions de classe p^a comme des solutions "élémentaires".
- Si on ajoute l'indécomposabilité, les solutions "élémentaires" sont alors celles de taille et de classe puissance d'un même nombre premier.

Visualisation du théorème

On va représenter les solutions par leur couple $(|X|, d)$:



$$\forall i, n = \sum_{j=1}^{k_i} p_i^{n_{i,j}}$$

Algèbre de Hecke : une construction naïve

- Rappel : pour W un groupe de Coxeter fini associé à un groupe d'Artin–Tits A engendré par S

$$\mathcal{H}_q(W) = {}^{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}][A]}\!\big/\!\langle s^2 = (q-1)s + q\rangle$$

Alors : rg $\mathcal{H}_q(W) =$ rg $\mathbb{Z}[W] = \# W$.

- Si on note $\delta(x) = \lambda_x(x)$, alors $x^{[k]} = x\delta(x)\cdots\delta^{k-1}(x)$.
- Si (X, r) est une solution on pose alors

$$\mathcal{H}_q(X,r) = {}^{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}][G(X,r)]}\Bigg/\Bigg\langle x^{[d]} = \sum_{\substack{g \in M(X,r) \\ \ell(g) < d}} a_g g \Bigg\rangle$$

Problème : En spécialisant q on obtient rg $\mathcal{H}_q(X,r) < \#\overline{G}$ (avec GAP).

La définition

- Problème : Les relations font intervenir des éléments g avec $\psi(g) \neq 1$.

$\Rightarrow$ On utilise des éléments avec permutations triviales : $(x^{[d]})^k$.

- Si on définit $\mathcal{H}_q(X,r) = {}^{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}][G(X,r)]}\big/_{\langle (x^{[d]})^2 = (q-1)x^{[d]} + q \rangle}$.

Alors rg $\mathcal{H}_q(X,r) = \#\overline{G}_2(X,r) = 2^{\#X} \cdot \#\overline{G}(X,r)$.

Théorème (*F. '24*)

Soit (X,r) une solution de classe de Dehornoy d. Soit R un anneau commutatif et $P \in R[t]$ unitaire de degré $m \geq 1$. On pose

$$\mathcal{H}((X,r),P) = {}^{R[G(X,r)]}\Big/\Big(P(x^{[d]})\Big)$$

Alors rg $\mathcal{H}((X,r),P) = \#\overline{G}_m(X,r) = m^{\#X} \cdot \#\overline{G}(X,r)$

Exemple : $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ et $P(t) = t^2 - (q-1)t - q$ donne $\mathcal{H}_q(X,r)$.

- On peut quotienter avec un polynome de degré quelconque !

Dans le cas du groupe de tresses B_n, pour que $B_n/\langle s^m \rangle$ soit fini il faut que $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$ (Coxeter '59), e.g. $n \geq 6 \Rightarrow m \leq 2$.

Schéma de preuve

- $\Pi\colon \mathbb{Z}^X \overset{1:1}{\to} G(X,r)$ induit $R[\mathbb{Z}^X] = R[Y_1,\ldots,Y_n] \overset{1:1}{\to} R[G]$, qui se restreint en $I_P = \left(P(Y_i^d)\right)_i \overset{1:1}{\to} \left(P(x^{[d]})\right)_x = J_P$.
- $\Pi\colon \mathbb{Z}^X \overset{1:1}{\to} G(X,r)$ induit $\overline{\Pi}_m\colon (\mathbb{Z}/md\mathbb{Z})^X \overset{1:1}{\to} \overline{G}_m(X,r)$.
- $\forall g \in \overline{G}_m(X,r), \exists!\, T_g \in \mathcal{H}((X,r),P)$ indépendant du choix d'une écriture réduite de g : $g = x_{i_1}\cdots x_{i_k} \Rightarrow T_g = T_{x_{i_1}}\cdots T_{x_{i_k}}$.
- Les T_g engendrent $\mathcal{H}((X,r),P)$.
- Pour voir que les T_g sont libres :

$$\sum_{\overline{g}\in\overline{G}_m} a_{\overline{g}}\Pi^{-1}(T_g) \in I_P \qquad \sum_{\overline{g}\in\overline{G}_m} a_{\overline{g}} T_g \in J_P$$

$$\begin{tikzcd} R[\mathbb{Z}^n] \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, two heads] & R[G(X,r)] \arrow[d, two heads] \\ R[(\mathbb{Z}/md\mathbb{Z})^n] \arrow[r, "1:1"] & \mathcal{H}((X,r),P) \end{tikzcd}$$

$$\sum_{\overline{g}\in\overline{G}_m} a_{\overline{g}}\overline{\Pi}_m^{-1}(T_{\overline{g}}) = 0 \qquad \sum_{\overline{g}\in\overline{G}_m} a_{\overline{g}} T_{\overline{g}} = 0$$

$$\Rightarrow \forall a_{\overline{g}} \in \overline{G}_m(X,r), a_{\overline{g}} = 0$$

Une anti-involution

- Rappel : Dans le cas Coxeter, on a une anti-involution de $\mathcal{H}_q(W)$ définie par $q \mapsto q^{-1}$, $T_g \mapsto T_{g^{-1}}$.

Proposition (*F. '24*)

Supposons P a toutes ses racines (α_i) dans R, que les (α_i) sont inversibles et qu'il existe une anti-involution ι de R telle que $\alpha_i \mapsto \alpha_i^{-1}$.
Alors ι s'étend en une anti-involution de $\mathcal{H}((X,r),P)$ par $T_g \mapsto T_{g^{-1}}$.

Exemple : Les hypothèses sont satisfaites pour $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ avec $P(t) = (t-q)(t+1)$.

- Attention : pour $g \in \overline{G}_m(X,r)$, a priori $T_{g^{-1}} \neq T_g^{-1}$. Dans l'exemple précédent,

$$T_x^{-1} = \frac{1-q}{q} T_{\delta(x)^{[d-1]}} + \frac{1}{q} T_{\delta(x)^{[2d-1]}}.$$

$$T_x^{-1} = \frac{1-q}{q} T_{\delta(x)^{[d-1]}} + \frac{1}{q} \underbrace{T_{\delta(x)^{[2d-1]}}}_{T_{x^{-1}}}.$$

Rétraction

Proposition-Définition

On définit une relation d'équivalence sur (X, r) par $x \sim y \Leftrightarrow \lambda_x = \lambda_y$.
Alors en notant $X' = X/\sim$ on a une solution (X', r').

Example : $X'_n = X_1$ la solution triviale.

Proposition *(F. '24)*

La classe d' de X' divise la classe d de X.
On a un morphisme d'algèbre $\mathcal{H}((X, r), P(t)) \twoheadrightarrow \mathcal{H}\left((X', r'), P\left(t^{\frac{d}{d'}}\right)\right)$.

Exemple : Si (X, r) est de classe 4, (X', r') est de classe 2 et $P(t) = t^2 + t + 1$, alors on a

$$\mathcal{H}((X, r), t^2 + t + 1) \twoheadrightarrow \mathcal{H}((X', r'), t^4 + t^2 + 1).$$

Pour la suite

1. Etudier les conjectures sur la classe de Dehornoy d.

2. Donner une interprétation géométrique de nos algèbres de Hecke.
   Peut-on construire des bases de Kazhdan–Lusztig ?
   Que peut-on dire des caractères irréductibles ?

Merci pour votre attention !