

Groupoïdes de Garside et groupes de tresses complexes

Colloque tournant du RT algèbre

Owen Garnier

Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée
Université de Picardie Jules Verne (Amiens)

6 mars 2025



Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Réflexion complexe: $s \in GL(V)$ d'ordre fini et $\dim \text{Ker}(s - 1) = n - 1$.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Réflexion complexe: $s \in GL(V)$ d'ordre fini et $\dim \text{Ker}(s - 1) = n - 1$.

Définition

Un groupe fini $W \leq GL(V)$ est un **groupe de réflexions complexes** (GRC) s'il est engendré par des réflexions.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Réflexion complexe: $s \in GL(V)$ d'ordre fini et $\dim \text{Ker}(s - 1) = n - 1$.

Définition

Un groupe fini $W \leq GL(V)$ est un **groupe de réflexions complexes (GRC)** s'il est engendré par des réflexions.

Pour $W \leq GL(V)$ un GRC, on définit l'**arrangement de réflexions** par

$$\mathcal{A} := \{\text{Ker}(s - 1) \mid s \in W \text{ est une réflexion}\}.$$

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Réflexion complexe: $s \in GL(V)$ d'ordre fini et $\dim \text{Ker}(s - 1) = n - 1$.

Définition

Un groupe fini $W \leq GL(V)$ est un **groupe de réflexions complexes** (GRC) s'il est engendré par des réflexions.

Pour $W \leq GL(V)$ un GRC, on définit l'**arrangement de réflexions** par

$$\mathcal{A} := \{ \text{Ker}(s - 1) \mid s \in W \text{ est une réflexion} \}.$$

L'ensemble des **vecteurs réguliers** est $X := V \setminus \bigcup \mathcal{A}$.

L'espace des **orbites régulières** est X/W .

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow GL(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow GL(V)$ est une représentation irréductible.

Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r , $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d .

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r , $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d .

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e .

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r , $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d .

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e .

D'un autre côté, 34 groupes exceptionnels G_4, \dots, G_{37} . Parmi eux, 19 sont de rang 2.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r , $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d .

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e .

D'un autre côté, 34 groupes exceptionnels G_4, \dots, G_{37} . Parmi eux, 19 sont de rang 2.

Il est possible d'utiliser des preuves au cas-par-cas.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n + 1$ réflexions.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n + 1$ réflexions.

Si W peut être engendré par n réflexions, alors W est **bien-engendré**.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n + 1$ réflexions.

Si W peut être engendré par n réflexions, alors W est **bien-engendré**.

Corollaire

W admet au plus trois classes de conjugaison de réflexions (deux si W est bien-engendré).

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1$.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).
- Si W Coxeter, B est le **groupe d'Artin** de W .

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).
- Si W Coxeter, B est le **groupe d'Artin** de W .
- **Diagrammes de BMR**, donnant une présentation de W .

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes “paraboliques” de W , et de B .

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes “paraboliques” de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?
- Sous-groupes paraboliques de B ?

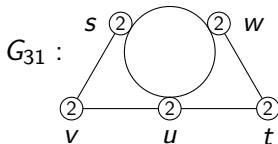
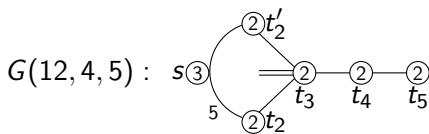
Diagrammes de BMR

Groupes réels = groupes de Coxeter finis \rightarrow diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W .
- Présentation du groupe d'Artin associé à W .
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W , et de B .

Groupes de réflexions complexes \rightarrow diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?
- Sous-groupes paraboliques de B ?



Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P .

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$$Z(B) = \langle z_B \rangle \text{ et } Z(P) = \langle z_P \rangle, \text{ avec } z_P := (z_B)^{|Z(W)|}.$$

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?
- + Est-ce que X/W est un $K(\pi, 1)$?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P . Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W . Son image dans B est notée z_B .

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?
- + Est-ce que X/W est un $K(\pi, 1)$?

À la publication de BMR, ces questions sont résolues pour la plupart des GRCs sauf

$$G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{31}, G_{33}, G_{34}.$$

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B , dite *présentation d'Hurwitz*.

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B , dite *présentation d'Hurwitz*.

Cette approche s'applique en particulier à G_{24} , G_{27} , G_{29} , G_{33} , G_{34} .

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B , dite *présentation d'Hurwitz*.

Cette approche s'applique en particulier à G_{24} , G_{27} , G_{29} , G_{33} , G_{34} .

Les questions de BMR sont toujours sans réponses à ce stade pour G_{31} .

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Définition [Dehornoy, Paris '99]

Structure de Garside sur G : monoïde $M \subset G$ et $\Delta \in M$ tel que

- M engendre G en tant que groupe.
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et à droite.
- Pour $x \in M$, la longueur d'un produit $x = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans M est bornée.
- $\text{Div}(\Delta) = \text{Div}_D(\Delta)$ est fini et engendre M .

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Définition [Dehornoy, Paris '99]

Structure de Garside sur G : monoïde $M \subset G$ et $\Delta \in M$ tel que

- M engendre G en tant que groupe.
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et à droite.
- Pour $x \in M$, la longueur d'un produit $x = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans M est bornée.
- $\text{Div}(\Delta) = \text{Div}_D(\Delta)$ est fini et engendre M .

On note un *groupe de Garside* par un triplet (G, M, Δ) .

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- “Groupes de Shephard” : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
(Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- “Groupes de Shephard” : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
(Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual**
(Birman-Ko-Lee '98, Bessis '03, Bessis-Corran '06, Bessis '15).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
(Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual**
(Birman-Ko-Lee '98, Bessis '03, Bessis-Corran '06, Bessis '15).

Cela exclut $B(d, e, n)$ pour $n \geq 3$ et $d \geq 2$ ou $e \geq 3$...

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
(Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual**
(Birman-Ko-Lee '98, Bessis '03, Bessis-Corran '06, Bessis '15).

Cela exclut $B(d, e, n)$ pour $n \geq 3$ et $d \geq 2$ ou $e \geq 3$... et B_{31} .

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \rightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \rightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G
(Dehornoy-Lafont '03).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \rightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G
(Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G
(Dehornoy-Paris '99).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \rightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G
(Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G
(Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G
(Godelle '07).

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ) .

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ) .

Définition [Godelle '07]

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ) .

Définition [Godelle '07]

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Notons que “être parabolique” dépend de (G, M, Δ) et pas que de G .

Exemple: $\langle a, b \mid aba = bab \rangle^+$ et $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle^+$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ) .

Définition [Godelle '07]

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Notons que “être parabolique” dépend de (G, M, Δ) et pas que de G .

Exemple: $\langle a, b \mid aba = bab \rangle^+$ et $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle^+$.

Les sous-groupes paraboliques sont-ils stables par intersection ?

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $PC(x)$, sa *clôture parabolique*.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $PC(x)$, sa *clôture parabolique*.

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $PC(x)$, sa *clôture parabolique*.

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $SPC(x)$ la *clôture parabolique standard* de x .

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $PC(x)$, sa *clôture parabolique*.

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $SPC(x)$ la *clôture parabolique standard* de x . On espère que $SPC(x) = PC(x)$ dans les bons cas, au moins si $x \in M$.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $PC(x)$, sa *clôture parabolique*.

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $SPC(x)$ la *clôture parabolique standard* de x . On espère que $SPC(x) = PC(x)$ dans les bons cas, au moins si $x \in M$.

Définition (González-Meneses, Marin '22, G. '24)

(G, M, Δ) **préserve le support** si pour tous $x, y \in M$, $\alpha \in G$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow SPC(x)^\alpha = SPC(y).$$

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\text{SPC}(x) = \text{PC}(x)$ pour $x \in M$.

De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\text{SPC}(x) = \text{PC}(x)$ pour $x \in M$.

De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Remarque: En pratique, la préservation du support est très difficile à vérifier.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\text{SPC}(x) = \text{PC}(x)$ pour $x \in M$.

De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Remarque: En pratique, la préservation du support est très difficile à vérifier.

Existe-t-il des groupes de Garside qui ne préservent pas le support ?

Groupoïdes de Garside

\mathcal{G} un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une catégorie.

Groupoïdes de Garside

\mathcal{G} un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une catégorie.

\preceq désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preceq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

Groupoïdes de Garside

\mathcal{G} un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une catégorie.

\preccurlyeq désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

\succcurlyeq désigne la divisibilité à droite : pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(-, u)$, on a

$$g \succcurlyeq f \Leftrightarrow \exists h' \in \mathcal{C} \mid g = h'f.$$

Groupoïdes de Garside

\mathcal{G} un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une catégorie.

\preccurlyeq désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

\succcurlyeq désigne la divisibilité à droite : pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(-, u)$, on a

$$g \succcurlyeq f \Leftrightarrow \exists h' \in \mathcal{C} \mid g = h'f.$$

Pour $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, on pose

$$\text{Div}(\Delta) = \{s \in \mathcal{C} \mid \exists u \in \text{Ob}(\mathcal{C}), s \preccurlyeq \Delta(u)\},$$

$$\text{Div}_R(\Delta) = \{s \in \mathcal{C} \mid \exists u \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \Delta(u) \succcurlyeq s\}.$$

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preceq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succeq)$ sont des treillis.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preceq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans \mathcal{C} est bornée.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preceq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans \mathcal{C} est bornée.
- $\text{Div}(\Delta) = \text{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre \mathcal{C} .

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preceq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans \mathcal{C} est bornée.
- $\text{Div}(\Delta) = \text{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre \mathcal{C} .

Δ est une **application de Garside**.

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ est un **groupoïde de Garside**.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur \mathcal{G} : catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- \mathcal{C} engendre \mathcal{G} en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preceq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans \mathcal{C} est bornée.
- $\text{Div}(\Delta) = \text{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre \mathcal{C} .

Δ est une **application de Garside**.

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ est un **groupoïde de Garside**.

Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un **groupe de Garside faible**.

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \rightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G
(Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G
(Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G
(Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale)
(Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$
(Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside)
(Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G
(Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G
(Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G
(Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans \mathcal{G} . (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans \mathcal{G} . (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M , qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans \mathcal{G} . (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de \mathcal{C} , qui coïncide avec celle de \mathcal{G} (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de M donnent une présentation de M , et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans \mathcal{G} . (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de \mathcal{C} , qui coïncide avec celle de \mathcal{G} (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de \mathcal{C} donnent une présentation de \mathcal{C} , et donc de \mathcal{G} (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur \mathcal{G} (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans \mathcal{G} . (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de \mathcal{C} , qui coïncide avec celle de \mathcal{G} (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de \mathcal{C} donnent une présentation de \mathcal{C} , et donc de \mathcal{G} (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Notion de sous-groupoïde parabolique de \mathcal{G} (Godelle '10) (G. '24).

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Pour $\delta : E \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Pour $\delta : E \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Pour $\delta : E \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Définition (Godelle '10)

Un groupe de la forme $G_\delta(u, u)$ est appelé **sous-groupe parabolique standard** de $\mathcal{G}(u, u)$. Pour $g \in \mathcal{G}(v, u)$, un groupe de la forme $gG_\delta(u, u)g^{-1}$ est appelé un **sous-groupe parabolique** de $\mathcal{G}(v, v)$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Pour $\delta : E \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \text{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Définition (Godelle '10)

Un groupe de la forme $G_\delta(u, u)$ est appelé **sous-groupe parabolique standard** de $\mathcal{G}(u, u)$. Pour $g \in \mathcal{G}(v, u)$, un groupe de la forme $gG_\delta(u, u)g^{-1}$ est appelé un **sous-groupe parabolique** de $\mathcal{G}(v, v)$.

On peut poser la question de l'intersection et des clôtures paraboliques dans les groupoïdes de Garside.

Bancs

Problème : Les sous-groupoïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Bancs

Problème : Les sous-groupeïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Définition (G. '24)

Banc : famille \mathcal{T} de sous-groupeïdes paraboliques standards telle que

- $\mathcal{G} \in \mathcal{T}$ et $\{1_u\}_{u \in \text{Ob}(\mathcal{G})} \in \mathcal{T}$.
- \mathcal{T} est stable par l'automorphisme de Garside (conjugaison par Δ).
- L'intersection de deux éléments de \mathcal{T} , si non vide, appartient à \mathcal{T} .

Bancs

Problème : Les sous-groupoïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Définition (G. '24)

Banc : famille \mathcal{T} de sous-groupoïdes paraboliques standards telle que

- $\mathcal{G} \in \mathcal{T}$ et $\{1_u\}_{u \in \text{Ob}(\mathcal{G})} \in \mathcal{T}$.
- \mathcal{T} est stable par l'automorphisme de Garside (conjugaison par Δ).
- L'intersection de deux éléments de \mathcal{T} , si non vide, appartient à \mathcal{T} .

Définition (G. '24)

Pour $\mathcal{G}_\delta \in \mathcal{T}$, $u \in \text{Ob}(\mathcal{G}_\delta)$, le groupe $\mathcal{G}_\delta(u, u) \subset \mathcal{G}(u, u)$ est appelé un sous-groupe parabolique **\mathcal{T} -standard**. Les sous-groupes **\mathcal{T} -paraboliques** de $\mathcal{G}(u, u)$ sont les conjugués des sous-groupes paraboliques \mathcal{T} -standards.

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$.

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique \mathcal{T} -standard notée $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique \mathcal{T} -standard notée $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

Un banc \mathcal{T} **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^\alpha = \text{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique \mathcal{T} -standard notée $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

Un banc \mathcal{T} **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^\alpha = \text{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si \mathcal{T} préserve le support, alors les clôtures \mathcal{T} -paraboliques existent dans \mathcal{G} , et $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \text{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique \mathcal{T} -standard notée $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

Un banc \mathcal{T} **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^\alpha = \text{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si \mathcal{T} préserve le support, alors les clôtures \mathcal{T} -paraboliques existent dans \mathcal{G} , et $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \text{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

- Comment construire des bancs avec des bonnes propriétés ?

Clôture \mathcal{T} -parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique \mathcal{T} -standard notée $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

Un banc \mathcal{T} **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \text{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^\alpha = \text{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si \mathcal{T} préserve le support, alors les clôtures \mathcal{T} -paraboliques existent dans \mathcal{G} , et $\text{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \text{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

- Comment construire des bancs avec des bonnes propriétés ?
- Pas encore d'argument général pour l'intersection des sous-groupes \mathcal{T} -paraboliques.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S .

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S .

$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.

Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S .

$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.

Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \text{Ob}(S)}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \text{Ob}(S)$, $t_v : u \rightarrow v$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S .

$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.

Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \text{Ob}(S)}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \text{Ob}(S)$, $t_v : u \rightarrow v$.

Pour une telle transversale, et $s \in S(v, v')$, $\gamma(s) := t_v s (t_{v'})^{-1} \in \mathcal{G}(u, u)$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S .

$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.

Pour $u \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \text{Ob}(S)}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \text{Ob}(S)$, $t_v : u \rightarrow v$.

Pour une telle transversale, et $s \in S(v, v')$, $\gamma(s) := t_v s (t_{v'})^{-1} \in \mathcal{G}(u, u)$.

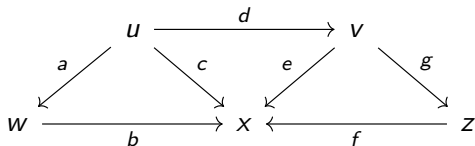
Proposition (G. '21)

Le groupe $\mathcal{G}(u, u)$ est engendré par $\gamma(s)$ pour $s \in S$, avec les relations

$$\gamma(s_1) \cdots \gamma(s_p) = \gamma(t_1) \cdots \gamma(t_q)$$

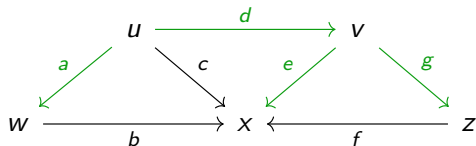
pour $s_1 \cdots s_p = t_1 \cdots t_q \in R$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



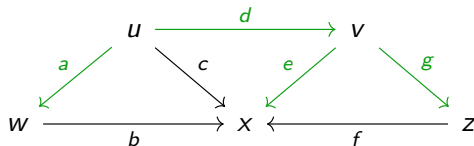
avec $ab = c$

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

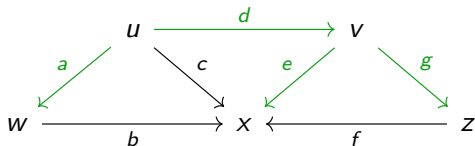
Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.

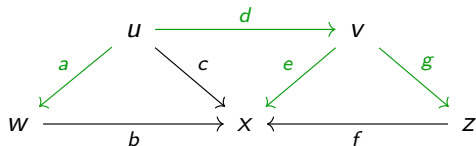
Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,

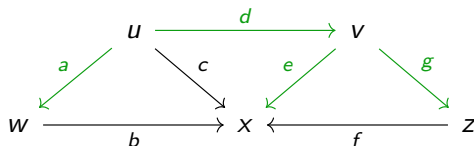
Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,

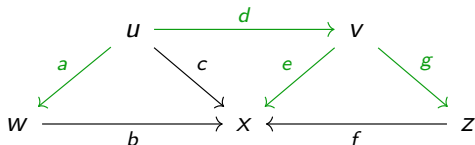
Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

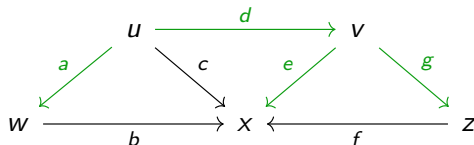


avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



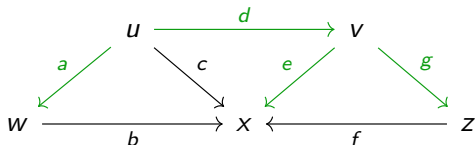
avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

$$\mathcal{G}(u, u) = \langle \gamma(b), \gamma(c), \gamma(f) \rangle \simeq \langle X, Y, Z \mid X = Y \rangle = \langle X, Z \mid \emptyset \rangle.$$

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple



avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

$$\mathcal{G}(u, u) = \langle \gamma(b), \gamma(c), \gamma(f) \rangle \simeq \langle X, Y, Z \mid X = Y \rangle = \langle X, Z \mid \emptyset \rangle.$$

Cette méthode requiert de lourdes simplifications.

Le groupoïde de Springer

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde \mathcal{B}_{31} est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés.

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde \mathcal{B}_{31} est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier.

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde \mathcal{B}_{31} est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde \mathcal{B}_{31} est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Corollaire [Bessis '15]

L'espace des orbites régulières pour G_{31} est un classifiant pour B_{31} .

Le groupoïde de Springer

Théorème [Bessis '15]

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde \mathcal{B}_{31} est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Corollaire [Bessis '15]

L'espace des orbites régulières pour G_{31} est un classifiant pour B_{31} .

Corollaire [Bessis '15]

Le centre de B_{31} est monogène et engendré par $z_{B_{31}}$.

Présentation de B_{31}

Le groupoïde B_{31} admet une présentation

$$B_{31} = \langle \text{atomes} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes} \rangle.$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde B_{31} admet une présentation

$$B_{31} = \langle \text{atomes (660)} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes (4230)} \rangle.$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde B_{31} admet une présentation

$$B_{31} = \langle \text{atomes (660)} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes (4230)} \rangle.$$

En appliquant la méthode de Reidemeister-Schreier, on obtient

Théorème (G. '21)

Le groupe B_{31} admet (entre autres) la présentation suivante

$$\left\langle s, t, u, v, w \mid \begin{array}{l} st = ts, vt = tv, wv = vw, \\ suw = uws = wsu, \\ svv = vsv, vuv = uvu, utu = tut, twt = wtw \end{array} \right\rangle.$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde B_{31} admet une présentation

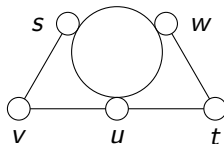
$$B_{31} = \langle \text{atomes (660)} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes (4230)} \rangle.$$

En appliquant la méthode de Reidemeister-Schreier, on obtient

Théorème (G. '21)

Le groupe B_{31} admet (entre autres) la présentation suivante

$$\left\langle s, t, u, v, w \mid \begin{array}{l} st = ts, vt = tv, wv = vw, \\ suw = uws = wsu, \\ svu = vsv, vuv = uvu, utu = tut, twt = wtw \end{array} \right\rangle.$$



Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Argument principal :

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ) .

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ) .
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ) .
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.
- Montrer que pour s atome et $x \in G$, alors $xs^n = s^n x$ entraîne $xs = sx$.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31} .

Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ) .
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.
- Montrer que pour s atome et $x \in G$, alors $xs^n = s^n x$ entraîne $xs = sx$.

Problème : comment retrouver les réflexions tressées dans le groupoïde de Springer ?

Centre de P_{31}

Soit $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$ sont exactement les conjugués dans \mathcal{B}_{31} des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans \mathcal{C}_{31} , et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$ sont exactement les conjugués dans \mathcal{B}_{31} des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans \mathcal{C}_{31} , et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Corollaire

Soit $\sigma \in B_{31}$ une réflexion tressées. Si $x\sigma^n = \sigma^n x$, alors $x\sigma = \sigma x$.

Centre de \mathcal{P}_{31}

Soit $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $\mathcal{B}_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$ sont exactement les conjugués dans \mathcal{B}_{31} des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans \mathcal{C}_{31} , et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Corollaire

Soit $\sigma \in \mathcal{B}_{31}$ une réflexion tressées. Si $x\sigma^n = \sigma^n x$, alors $x\sigma = \sigma x$.

Remarque : Pour tout $u \in \text{Ob}(\mathcal{B}_{31})$, les boucles atomiques de $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ engendrent $\mathcal{B}_{31}(u, u)$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31} -modules :

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31} -modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.

On en déduit deux B_{31} -modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31} -modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

En utilisant \mathcal{B}_{31} , on peut calculer l'homologie de B_{31} à coefficients dans ces modules.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1. On en déduit deux B_{31} -modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

En utilisant B_{31} , on peut calculer l'homologie de B_{31} à coefficients dans ces modules.

Proposition (G. '24)

$B(G_{31})$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4
\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_6	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
\mathbb{Z}_ε	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_6	\mathbb{Z}_{20}	0
$\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$	\mathbb{Q}	0	Φ_6	$\frac{t^{10}-1}{t+1}\Phi_{15}$	0

Où \mathbb{Z}_n désigne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $P(t)$ désigne $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]/(P(t))$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Théorème [González-Meneses, Marin '22]

On suppose W irréductible et différent de G_{31} .

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Théorème [González-Meneses, Marin '22]

On suppose W irréductible et différent de G_{31} .

- 1 Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $PC(x)$. On a $PC(x^m) = PC(x)$ pour tout $m \neq 0$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Théorème [González-Meneses, Marin '22]

On suppose W irréductible et différent de G_{31} .

- 1 Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $PC(x)$. On a $PC(x^m) = PC(x)$ pour tout $m \neq 0$.
- 2 Les sous-groupes paraboliques de B sont stables par intersection.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B , qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Théorème [González-Meneses, Marin '22]

On suppose W irréductible et différent de G_{31} .

- 1 Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $PC(x)$. On a $PC(x^m) = PC(x)$ pour tout $m \neq 0$.
- 2 Les sous-groupes paraboliques de B sont stables par intersection.
- 3 B_1, B_2 sont adjacents dans Γ si et seulement si $z_{B_1}z_{B_2} = z_{B_2}z_{B_1}$, où $\langle z_{B_i} \rangle = Z(B_i)$.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le “monoïde parachute” pour $G(e, e, n)$.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le “monoïde parachute” pour $G(e, e, n)$.
- Les monoïdes duaux de type $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B .
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le “monoïde parachute” pour $G(e, e, n)$.
- Les monoïdes duaux de type $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Théorème (G. '24)

Soit W un CRG irréductible et bien-engendré. La structure duale $(G(W), M(W), \Delta)$ préserve le support.

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc \mathcal{T} sur B_{31} qui préserve le support et tel que les sous-groupes \mathcal{T} -paraboliques de $B_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq B_{31}(u, u)$.

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc \mathcal{T} sur B_{31} qui préserve le support et tel que les sous-groupes \mathcal{T} -paraboliques de $B_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq B_{31}(u, u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31} .

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc \mathcal{T} sur B_{31} qui préserve le support et tel que les sous-groupes \mathcal{T} -paraboliques de $B_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq B_{31}(u, u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31} .

En imitant la preuve du 2ème point donnée en général par González-Meneses et Marin, on obtient aussi

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc \mathcal{T} sur B_{31} qui préserve le support et tel que les sous-groupes \mathcal{T} -paraboliques de $B_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq B_{31}(u, u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31} .

En imitant la preuve du 2ème point donnée en général par González-Meneses et Marin, on obtient aussi

Corollaire

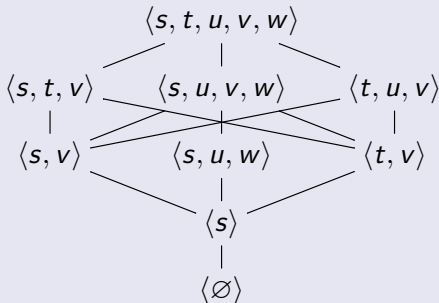
Les sous-groupes paraboliques de B_{31} sont stables par intersection.

Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par

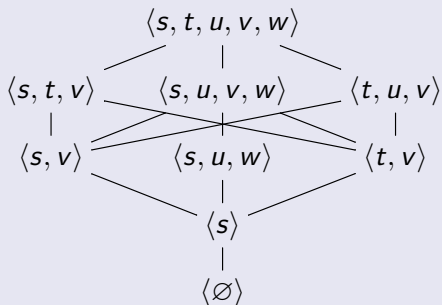
Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par



Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par

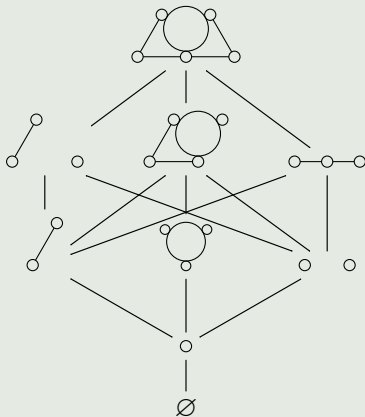


Corollaire (G. '24)

Le point C du théorème de González-Meneses, Marin est vrai pour G_{31} .

Corollaire

Le diagramme de BMR de G_{31} fournit des présentations des sous-groupes paraboliques.



Merci à vous !